KELUARGA BARU METODE ITERASI ORDE DELAPAN OPTIMAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Rini Mulyana Sari[1*], Khozin Mu'tamar[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

*rini.afran@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses a new family of three-step iteration method. Analytically, it is showed using Taylor expansion and geometry series that this iterative method has a convergence eight-order. Numerical comparisons show that this method is comparable with the others eight-order methods and can be used as an alternative method in solving nonlinear equations.

Keywords: *Iterative method, eight-order, nonlinear equation, iterating three step*

ABSTRAK

Artikel ini membahas keluarga baru metode iterasi tiga langkah. Secara analitik, menggunakan ekspansi Taylor dan deret geometri ditunjukkan bahwa metode iterasi ini memiliki orde konvergensi delapan. Perbandingan numerik menunjukkan bahwa metode ini sebanding dengan metode orde delapan lainnya dan dapat dijadikan sebagai metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Kata kunci: *Metode iterasi, orde delapan, persamaan nonlinear, iterasi tiga langkah*

1. PENDAHULUAN

Persoalan yang melibatkan persamaan nonlinear banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Seringkali persamaan nonlinear tersebut muncul dalam bentuk yang sulit dikerjakan secara analitik untuk mendapatkan solusi sejatinya, sehingga diperlukan metode numerik sebagai alternatif untuk menemukan akar sederhana α dari suatu persamaan nonlinear $f(x) = 0$.

Banyak metode numerik yang digunakan untuk mencari akar dari suatu persamaan nonlinear. Salah satunya adalah metode Newton dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dengan tebakan awal x_0. Selain metode Newton terdapat beberapa metode lain untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, diantaranya metode Bi-Wu-Ren (BRW) yang dikembangkan oleh Bi et al. [2] dengan orde konvergensi delapan, metode Corderro-Torregrosa-Vassileva (CTV) yang dikembangkan oleh Cordero et al. [3] dengan orde konvergensi delapan dan metode Thukral-Petkovic (TP) yang dikembangkan oleh Thukral dan Petkovic [9] dengan orde konvergensi delapan.

Pembahasan ini merupakan *review* sebagian dari artikel Sharma [6]. Pada artikel ini di bagian dua dibahas mengenai keluarga baru metode iterasi orde delapan dan analisis kekonvergenannya. Kemudian dilakukan uji komputasi yang dibahas pada bagian tiga.

2. KELUARGA BARU METODE ITERASI DENGAN KONVERGENSI ORDE DELAPAN

Sharma [6] memperkenalkan keluarga baru metode iterasi tiga langkah dengan bentuk iterasi

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n = y_n - \dfrac{1}{2f[y_n, x_n] - f'(x_n)} f(y_n), \\ x_{n+1} = z_n - \dfrac{f[z_n, y_n]}{f[z_n, x_n]} \dfrac{f(z_n)}{2f[z_n, y_n] - f[z_n, x_n]}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

Orde konvergensi dari persamaan (1) disajikan pada Teorema 1.

Teorema 1 (Orde Konvergensi) [6] Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari sederhana dari fungsi terdiferensial $f : I \to \mathbb{R}$ untuk interval terbuka I. Jika x_0 cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada persamaan (1) mempunyai konvergensi orde delapan.

Bukti. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah eror pada iterasi ke-n, α adalah akar sederhana dari fungsi $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Dengan melakukan ekspansi Taylor [1, h. 189] dari $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ sampai orde delapan dan mengabaikan orde yang lebih tinggi diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2!} f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^3 + \cdots \\ + \frac{1}{8!} f''(\alpha)(x_n - \alpha)^8 + O((x_n - \alpha)^9), \end{aligned} \tag{2}$$

Karena $x_n - \alpha = e_n$ dan $f(\alpha) = 0$, maka persamaan (2) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \cdots \quad + \frac{1}{8!}f^{(8)}(\alpha)e_n^8 + O((e_n^9)). \quad (3)$$

Kemudian dengan memfaktorkan $f'(\alpha)$ dan misalkan $A_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 1, 2, \ldots, 8$, persamaan (3) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\Bigg(e_n + A_2e_n^2 + A_3e_n^3 + \cdots + A_8e_n^8\Bigg) + O(e_n^9). \quad (4)$$

Selanjutnya dengan melakukan ekspansi Taylor dari $f'(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x_n) = {} & f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2!}f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \frac{1}{3!}f^{(4)}(\alpha)(x_n - \alpha)^3 \\ & + \cdots + \frac{1}{8!}f^{(9)}(\alpha)(x_n - \alpha)^8 + O((x_n - \alpha)^9). \end{aligned} \quad (5)$$

Karena $x_n - \alpha = e_n$, maka persamaan (5) menjadi

$$\begin{aligned} f'(x_n) = {} & f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f'''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^{(4)}(\alpha)e_n^3 + \cdots + \frac{1}{8!}f^{(9)}(\alpha)e_n^8 \\ & + O(e_n^9). \end{aligned} \quad (6)$$

Lalu dengan memfaktorkan $f'(\alpha)$ dan karena $A_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, 9$, maka persamaan (6) menjadi

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\Bigg(1 + 2A_2e_n + 3A_3e_n^2 + 4A_4e_n^3 + \cdots + 9A_9e_n^8\Bigg) + O(e_n^9). \quad (7)$$

Selanjutnya $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dihitung menggunakan persamaan (4) dan (7), dengan bantuan deret geometri [8, h. 730] diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = {} & e_n - A_2e_n^2 + (2A_2^2 - 2A_3)e_n^3 + \cdots + (27A_3A_6 - 118A_3A_2A_5 - 7A_8 \\ & + \cdots + 135A_3^3A_2 + 92A_2^3A_5)e_n^8 + O(e_n^9). \end{aligned} \quad (8)$$

Lalu persamaan (8) disubstitusikan ke langkah pertama pada persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned} y_n = {} & \alpha + A_2e_n^2 + \left(2A_3 - 2A_2^2\right)e_n^3 + \cdots + \big(27A_3A_6 - 118A_3A_2A_5 - 7A_8 \\ & + \cdots + 135A_3^3A_2 + 92A_2^3A_5\big)e_n^8 + O\left(e_n^9\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Selanjutnya ekspansi Taylor dari $f(y_n)$ dilakukan di sekitar $y_n = \alpha$ dengan menggunakan persamaan (9), kemudian diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(y_n) = f'(\alpha)\Big(& A_2 e_n^2 + \left(2A3 - 2A2^2\right) e_n^3 + \cdots + \left(134 A_3 A_5 A_2\right. \\
& \left. + \cdots + 75 A_3^2 A_4 + 582 A_3^2 A_2^3\right) e_n^8 \Big) + O(e_n^9). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan definisi beda terbagi [5, h. 223], $f[y_n, x_n]$ dihitung dengan bantuan deret geometri menggunakan persamaan (10), (4), (9) dan $x_n = e_n + \alpha$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
f[y_n, x_n] = {} & 1 + A_2 e_n + \left(A_3 + A_2^2\right) e_n^2 + \left(A_4 - 2\,A_2^3 + 3\,A_2 A_3\right) e_n^3 + \cdots + \left(84\,A_3^3 A_2^2\right. \\
& \left. + \cdots + 8\,A_2 A_8 - 16\,A_3 A_6 A_2\right) e_n^8 + O\left(e_n^9\right). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Kemudian $\dfrac{f(y_n)}{2f[y_n, x_n] - f'(x_n)}$ dihitung dengan bantuan deret geometri. Misalkan $T = 2f[y_n, x_n] - f'(x_n)$, dengan menggunakan persamaan (10), (11) dan (7) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\frac{f(y_n)}{T} = {} & A_2 e_n^2 + \left(2\,A_3 - 2\,A_2^2 2\,A_3 - 2\,A_2^2\right) e_n^3 + \cdots + \left(50\,A_3 A_5 A_2 - 41\,A_2^3 A_5\right. \\
& \left. + \cdots + 27\,A_4^2 A_2 - 44\,A_3^3 A_2\right) e_n^8 + O\left(e_n^9\right). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya persamaan (9) dan (12) disubstitusikan ke langkah kedua dari persamaan (1), diperoleh

$$
\begin{aligned}
z_n = {} & \alpha + \left(A_2^3 - A_2 A_3\right) e_n^4 + \left(8\,A_2^2 A_3 - 2\,A_3^2 - 4\,A_2^4 - 2\,A_2 A_4\right) e_n^5 + \cdots \\
& + \left(20\,A_2^2 A_6 - 17\,A_4 A_5 + \cdots - 178\,A_2^5 A_3 + 36\,A_2^7\right) e_n^8. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Kemudian dengan melakukan ekspansi Taylor dari $f(z_n)$ di sekitar $z_n = \alpha$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(z_n) = f'(\alpha)\Big(& \left(A_2^3 - A_2 A_3\right) e_n^4 + \left(8\,A_2^2 A_3 - 2\,A_3^2 - 4\,A_2^4 - 2\,A_2 A_4\right) e_n^5 + \cdots \\
& + \left(50\,A_3^2 A_4 - 17\,A_4 A_5 + \cdots - 180\,A_2^5 A_3 + 37\,A_2^7\right) e_n^8 \Big) \\
& + O\left(e_n^9\right). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan definisi beda terbagi [5, h. 223], $f[z_n, y_n]$ dan $f[z_n, x_n]$ dihitung menggunakan persamaan (14), (10),(13), (9) dan $x_n = e_n + \alpha$, berturut-turut diperoleh

$$f[z_n, y_n] = f'(\alpha)\Big(1 + A_2^2 e_n^2 + \left(2\,A_2 A_3 - 2\,A_2^3\right) e_n^3 + \cdots + \left(35\,A_2^4 A_5 + 124\,A_4 A_5 A_2 + \cdots + 56\,A_2^8 - 30\,A_4 A_6\right) e_n^8\Big) + O\left(e_n^9\right) \tag{15}$$

dan

$$f[z_n, x_n] = f'(\alpha)\Big(1 + A_2 e_n + A_3 e_n^2 + A_4 e_n^3 + \cdots + \left(92\,A_3 A_5 A_2^2 - 55\,A_2^4 A_5 + \cdots + 21\,A_2^3 A_6 + 12\,A_3^4\right) e_n^8\Big) + O\left(e_n^9\right). \tag{16}$$

Kemudian $\dfrac{f[z_n, y_n]}{f[z_n, x_n]}$ dihitung menggunakan persamaan (15) dan (16), dengan bantuan deret geometri diperoleh

$$\frac{f[z_n, y_n]}{f[z_n, x_n]} = 1 - A_2 e_n + \left(2A_2^2 - A_3\right) e_n^2 + \left(4A_2 A_3 - 4A_2^3 - A_4\right) e_n^3 + \cdots + 16\,\frac{A_3^5}{A_2^2} + \cdots - 72\,A_2^3 A_6 - 284\,A_4^2 A_2^2) e_n^8 + O\left(e_n^9\right). \tag{17}$$

Selanjutnya $\dfrac{f(z_n)}{2f[z_n, y_n] - f[z_n, x_n]}$ dihitung dengan menggunakan persamaan (14), (15) dan (16). Misalkan $S = 2f[z_n, y_n] - f[z_n, x_n]$, dengan menggunakan bantuan deret geometri diperoleh

$$\frac{f(z_n)}{S} = \left(A_2^3 - A_2 A_3\right) e_n^4 + \left(7\,A_2^2 A_3 - 3\,A_2^4 - 2\,A_3^2 - 2\,A_2 A_4\right) e_n^5 + \cdots + \left(42\,A_3 A_4 A_2 - 4\,A_2 A_6 + 35\,A_2^4 A_3 + \cdots - 122\,A_3 A_4 A_2^2 + 54\,A_3 A_5 A_2\right) e_n^8. \tag{18}$$

Selanjutnya persamaan (13), (17) dan (18) disubstitusikan ke langkah ketiga dari persamaan (1) diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha - A^2\left(A_2^2 - A_3\right)\left(A_3^2 - A_2 A_4\right) e_n^8 + O\left(e_n^9\right). \tag{19}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka dari persamaan (19) diperoleh

$$e_{n+1} = -A^2\left(A_2^2 - A_3\right)\left(A_3^2 - A_2 A_4\right) e_n^8 + O\left(e_n^9\right). \tag{20}$$

Berdasarkan definisi persamaan eror [7] dan persamaan (20), maka KBMO8 memiliki orde konvergensi [4, h. 77] delapan, sehingga Teorema 1 terbukti.

3. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan metode yang dibahas dengan beberapa metode pembanding yaitu metode Bi-Wu-Ren (BWR), metode Corderro-Torregrosa-Vassileva (CTV) dan metode Thukral-Petkovic (TP) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear menggunakan program Maple13. Adapun fungsi-fungsi yang digunakan dalam melakukan perbandingan metode yang didiskusikan yaitu

(i) $f_1(x) = \log(x^2 + x + 1) - x + 1$

(ii) $f_2(x) = (x - 2)(x^{10} + x + 1)e^{-x-1}$

(iii) $f_3(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x + 1) + x^3 + 1$

(iv) $f_4(x) = \dfrac{e^{-x^2}\sin(x)}{x^2 - 1} + x^2\log(1 + x - \pi)$ dengan $\pi = 3.1415926535897932$

Untuk mendapatkan solusi numerik dari keempat contoh fungsi di atas, digunakan toleransi 1.0×10^{-50} serta ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk setiap metode yang dibandingkan, yaitu jika nilai $|f(x_n)| < tol$, atau jika $|x_n - x_{n-1}| < tol$ atau jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi dengan iterasi maksimum 100.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

f_i	x_0	Metode	n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert f'(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
f_1	1.5	MBWR	4	$1.00000e-79$	$5.78175e-01$	$1.30538e-12$
		MCTV	4	$0.00000e+00$	$5.78175e-01$	$7.96541e-34$
		MTP	4	$1.08000e-77$	$5.78175e-01$	$1.28578e-09$
		KBMO8	3	$1.00000e-79$	$5.78175e-01$	$2.73731e-20$
	3.0	MBWR	2	$2.36681e-59$	$5.78175e-01$	$3.86282e-07$
		MCTV	3	$0.00000e+00$	$5.78175e-01$	$4.71897e-50$
		MTP	3	$0.00000e+00$	$5.78175e-01$	$1.02285e-38$
		KBMO8	2	$3.06331e-65$	$5.78175e-01$	$9.58733e-08$
f_2	2.2	MBWR	3	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$1.19125e-23$
		MCTV	3	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$1.20724e-19$
		MTP	3	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$2.62304e-14$
		KBMO8	3	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$5.00143e-32$
	4.0	MBWR	5	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$1.61092e-23$
		MCTV	5	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$7.28677e-25$
		MTP	5	$3.91079e-70$	$5.11313e+01$	$2.64217e-10$
		KBMO8	4	$0.00000e+00$	$5.11313e+01$	$8.41710e-17$

f_3	-0.7	MBWR	2	$2.68135e-51$	$6.00000e+00$	$7.86433e-07$
		MCTV	2	$5.46617e-51$	$6.00000e+00$	$6.93622e-07$
		MTP	2	$2.84178e-57$	$6.00000e+00$	$1.65288e-07$
		KBMO8	2	$3.91181e-52$	$6.00000e+00$	$5.18644e-07$
	2.7	MBWR	4	$0.00000e+00$	$6.00000e+00$	$4.31862e-13$
		MCTV	4	$0.00000e+00$	$6.00000e+00$	$1.57917e-35$
		MTP	3	$0.00000e+00$	$6.00000e+00$	$1.36108e-16$
		KBMO8	4	$0.00000e+00$	$6.00000e+00$	$3.33173e-24$
f_4	3.0	MBWR	2	$9.61256e-80$	$9.86960e+00$	$3.78217e-11$
		MCTV	2	$8.90834e-79$	$9.86960e+00$	$9.61718e-11$
		MTP	2	$9.61256e-80$	$9.86960e+00$	$2.15550e-11$
		KBMO8	2	$9.61256e-80$	$9.86960e+00$	$7.45090e-11$
	9.0	MBWR	3	$9.61256e-80$	$9.86960e+00$	$1.85230e-14$
		MCTV	3	$9.61256e-80$	$9.86960e+00$	$2.98487e-11$
		MTP	3	$5.47731e-73$	$9.86960e+00$	$1.99114e-09$
		KBMO8	3	$9.61256e-80$	$9.86960e+00$	$3.57390e-29$

Keterangan untuk Tabel 1 adalah, n menyatakan jumlah iterasi, x_0 menyatakan tebakan awal, $|f(x_n)|$ menyatakan nilai fungsi untuk akar pendekatan ke n, $|f'(x_n)|$ menyatakan nilai turunan pertama fungsi untuk akar pendekatan ke n dan $|x_n - x_{n-1}|$ menyatakan selisih akar hampiran.

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa:

(i) Pada fungsi pertama dengan tebakan awal 1.5, KBMO8 lebih unggul karena memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dari metode pembanding lainnya, sedangkan dengan tebakan awal 3.0, KBMO8 memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit atau sama dengan metode pembanding lainnya.

(ii) Pada fungsi kedua dengan tebakan awal 2.2, KBMO8 lebih unggul dari metode pembanding lainnya dari segi selisih nilai akar hampiran, dan dengan tebakan awal 4.0, KBMO8 juga lebih unggul dari segi jumlah iterasi.

(iii) Pada fungsi ketiga dengan tebakan awal -0.7, KBMO8 sebanding dengan metode pembanding lainnya dan tebakan awal 2.7, MTP lebih unggul dari KBMO8 dari segi jumlah iterasi.

(iv) Pada fungsi keempat dengan tebakan awal 3.0, KBMO8 sebanding dengan metode pembanding lainnya, sedangkan dengan tebakan awal 9.0, KBMO8 lebih unggul dari segi selisih nilai akar hampiran.

Hal tersebut membuktikan bahwa KBMO8 dapat dijadikan sebagai metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berdasarkan simulasi numerik beberapa contoh fungsi nonlinear yang didiskusikan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. G. Bartle dan D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*, John Wiley dan Sons, Hoboken, 2011.

[2] W. Bi, Q. Wu dan H. Ren, *A new family of eight-order convergence for solving nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 214 (2009), 236-245.

[3] A. Cordero, J. R. Torregrosa dan M. P. Vassileva, *Three step iterative methods with optimal eight order convergence*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011), 3189-3194.

[4] J. H. Mathews, *Numerical Method for Mathematical Science and Engineer, Second Edition*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.

[5] J. H. Mathews dan K. D. Fink, *Numerical Method Using MATLAB, Third Edition*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

[6] J. R. Sharma, *A new family of optimal eighth order methods with dynamics for nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 273 (2016), 924-933.

[7] J. R. Sharma, R. K. Guha dan R. Sharma, *Some modified Newton's methods with fourth-order convergence*, Advances in Applied Science Research, 2 (2011), 240-247.

[8] J. Stewart, *Calculus, Seventh Edition*, Brooks/Cole Publishing, Belmont, 2012.

[9] R. Thukral dan M. S. Petkovic, *A family of three-point methods of optimal order for solving nonlinear equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233 (2010), 2278-2284.