CADANGAN ZILLMER BERDASARKAN DISTRIBUSI MAKEHAM DENGAN MENGGUNAKAN TINGKAT BUNGA MODEL RENDLEMAN-BARTTER

Rusti Nella Rinawati[1*], Hasriati[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

*rustinella.rinawati@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses Zillmer's reserve in term of life insurance by using Rendleman-Bartter interest model. Interest rate model of Rendleman-Bartter is a lognormally distributed *equilibrium one factor* interest rate model and is expressed by stochastic differential equations that follow the Ito's process. Interest rate models of Rendleman-Bartter has parameters μ and σ to be estimated. To determine the parameter estimations is used MLE (*maximum likelihood estimation*) and then followed by a numerical approach using Newton-Raphson method. Then Makeham distribution is used to evaluate the life annuity, single premium and annual premium.

Keywords: Zillmer's reserve, term life insurance, Rendleman-Bartter interest model, Makeham distribution

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter. Tingkat bunga model Rendleman-Bartter adalah tingkat bunga model *equilibrium one factor* yang dinyatakan dengan persamaan diferensial stokastik yang mengikuti proses Ito. Tingkat bunga model Rendleman-Bartter mempunyai parameter yang harus diestimasi yaitu μ dan σ. Penentuan estimasi parameter menggunakan MLE (*maximum likelihood estimation*) dan kemudian dilanjutkan dengan pendekatan numerik menggunakan metode Newton-Raphson. Selanjutnya perhitungan anuitas, premi tunggal, premi tahunan berdasarkan distribusi Makeham.

Kata kunci: Cadangan Zillmer, asuransi jiwa berjangka, tingkat bunga model Rendleman-Bartter, distribusi Makeham

1. PENDAHULUAN

Asuransi jiwa berjangka adalah suatu asuransi apabila pemegang polis mulai dari disetujuinya kontrak asuransi sampai dengan jangka waktu tertentu meninggal, maka akan dibayarkan sejumlah uang pertanggungan. Dalam mengikuti program asuransi jiwa, terdapat sejumlah uang yang dibayarkan oleh peserta asuransi kepada perusahaan asuransi yang besarnya sudah ditentukan yang disebut dengan premi. Untuk menentukan besarnya premi tahunan dipengaruhi oleh anuitas dan premi tunggal. Anuitas dan premi tunggal dipengaruhi oleh peluang hidup dan tingkat bunga. Peluang hidup pada artikel ini dalam perhitungannya dinyatakan dengan menggunakan distribusi Makeham dan tingkat bunga yang digunakan adalah model Rendleman-Bartter. Tingkat bunga model Rendleman-Bartter ditemukan oleh Richard J. Rendleman dan Brit J. Bartter pada tahun 1980. Rendleman dan Bartter [7] menjelaskan bahwa model Rendleman-Bartter merupakan model tingkat bunga yang berdistribusi lognormal.

Setiap peserta asuransi membayar premi kepada perusahaan asuransi selama masa pertanggungan. Dalam pembayaran uang pertanggungan kepada peserta asuransi, perusahaan asuransi perlu mempersiapkan biaya cadangan. Biaya cadangan ini digunakan untuk membayar keperluan perusahaan asuransi dan peserta asuransi. Di dalam Futami [5, h. 123] menyatakan bahwa cadangan merupakan besarnya uang yang ada pada perusahaan asuransi dalam jangka waktu pertanggungan.

Artikel ini membahas cadangan Zillmer pada asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter.

2. NILAI TUNAI ANUITAS HIDUP BERDASARKAN DISTRIBUSI MAKEHAM

Anuitas adalah serangkaian pembayaran dalam jumlah tertentu secara berkelanjutan yang dilakukan setiap selang waktu tertentu sepanjang peserta masih hidup. Dalam menentukan anuitas hidup dipengaruhi oleh peluang hidup , yang dapat dinyatakan dalam distribusi Makeham. Distribusi Makeham merupakan penyempurnaan dari distribusi Gompertz. Sehingga terlebih dahulu dijelaskan mengenai distribusi Gompertz.

Definisi 1 [8, h. 170] Distribusi Gompertz $G(x|\mu,\sigma)$ dengan rata-rata μ dan standar deviasi σ dinyatakan sebagai berikut:

$$G(x|\mu,\sigma) = W\left(\frac{x-a}{b}\right),$$

dengan $W(x) = 1 - \exp\left(-\exp(x)\right)$ dan konstanta a dan b memenuhi

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}b \ \text{ dan } \ \mu = a - b\gamma. \tag{1}$$

$G(x|\mu,\sigma)$ dinamakan distribusi Gompertz karena

$$G(x|\mu,\sigma) = 1 - g^{c^x},$$

dengan

$$g = \exp\left(-\exp(\frac{-a}{b})\right) \text{ dan } c = \exp\left(\frac{1}{b}\right). \tag{2}$$

Distribusi Makeham merupakan salah satu distribusi yang dapat digunakan dalam menentukan besarnya peluang hidup. Feng et al. [6] menjelaskan bahwa percepatan mortalita berdasarkan distribusi Makeham dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mu(x) = A + Bc^x, \; B > 0, A \geq -B, x \geq 0, c > 1. \tag{3}$$

dengan A menyatakan risiko yang disebabkan oleh faktor lain selain usia dan konstanta B dan c menyatakan risiko karena faktor usia dan x menyatakan usia.

Berdasarkan persamaan (3), percepatan mortalita untuk seseorang yang berusia x sampai y tahun berikutnya dinyatakan dengan

$$\mu_x(y) = A + Bc^{x+y}, \tag{4}$$

Hubungan antara peluang hidup dan percepatan mortalita adalah [4, h. 38]

$$_tp_x = -\int_0^t \mu_x(y)\, dy. \tag{5}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (4) ke persamaan (5) diperoleh

$$_tp_x = \exp\left[-At + \frac{B}{\ln(c)} c^x \left(c^t - 1\right)\right].$$

Dengan memisalkan $\ln s = -A$ dan $\ln g = -\frac{B}{\ln(c)}$, peluang seseorang berusia x tahun akan hidup hingga t tahun kemudian berdasarkan distribusi Makeham dapat dinyatakan dengan

$$_tp_x = s^t g^{c^x\left(c^t-1\right)}, \tag{6}$$

dan untuk peluang meninggal tertunda berdasarkan distribusi Makeham adalah

$$_{t|}q_x = s^t g^{c^x\left(c^t-1\right)} - s^{t+1} g^{c^x\left(c^{t+1}-1\right)}. \tag{7}$$

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka selama n tahun untuk seseorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x, \tag{8}$$

dengan v merupakan faktor diskon yang dinyatakan dengan [4, h. 2]

$$v = \frac{1}{1+i}. \tag{9}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (6) ke persamaan (8) diperoleh nilai tunai anuitas hidup awal berjangka selama n tahun untuk seseorang yang berusia x tahun berdasarkan distribusi Makeham yaitu

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ s^t g^{c^x(c^t-1)}. \tag{10}$$

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka selama m tahun untuk seseorang yang berusia x tahun berdasarkan distribusi Makeham yaitu

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{t=0}^{m-1} v^t \ s^t g^{c^x(c^t-1)}. \tag{11}$$

Berdasarkan persamaan (11), nilai tunai anuitas hidup awal berjangka untuk seseorang yang berusia $x + j$ tahun dengan jangka waktu pertanggungan $m - j$ tahun berdasarkan distribusi Makeham adalah

$$\ddot{a}_{x+j:\overline{m-j}|} = \sum_{t=0}^{m-j-1} v^t \ s^t g^{c^{x+j}(c^t-1)}. \tag{12}$$

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka selama h tahun untuk seseorang yang berusia x tahun berdasarkan distribusi Makeham yaitu

$$\ddot{a}_{x:\overline{h}|} = \sum_{t=0}^{h-1} v^t \ s^t g^{c^x(c^t-1)}. \tag{13}$$

Berdasarkan persamaan (13), nilai tunai anuitas hidup awal berjangka untuk seseorang yang berusia $x + j$ tahun dengan jangka waktu pertanggungan $h - j$ tahun berdasarkan distribusi Makeham adalah

$$\ddot{a}_{x+j:\overline{h-j}|} = \sum_{t=0}^{h-j-1} v^t \ s^t g^{c^{x+j}(c^t-1)}. \tag{14}$$

3. PREMI ASURANSI JIWA BERJANGKA DENGAN MENGGUNAKAN TINGKAT BUNGA RENDLEMAN-BARTTER

Tingkat bunga model Rendleman-Bartter merupakan model *equilibrium one factor* yang menggambarkan pergerakan tingkat bunga jangka pendek (*short rate*). Tingkat bunga model Rendleman-Bartter dinyatakan sebagai berikut [10, h. 24]

$$dr_k = \mu \, r_k \, dk + \sigma \, r_k \, dW_k, \tag{15}$$

dengan r_k menyatakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter, μ menyatakan ekspektasi laju *return*, σ menyatakan standar deviasi yang menunjukkan volatilitas tingkat bunga, dan W_k menyatakan proses Wiener.

Hull [2, h. 232] menjelaskan bahwa persamaan (15) mengikuti proses Ito, sehingga solusi dari tingkat bunga model Rendleman-Bartter akan didapat dengan menggunakan Lemma Ito yaitu

$$r_k = r_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) k + \sigma W_k\right). \tag{16}$$

Walpole [3, h. 201] menjelaskan bahwa tingkat bunga model Rendleman-Bartter yaitu r_k berdistribusi lognormal dengan *mean* $\left(\ln r_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)k\right)$ dan variansi $(\sigma^2 k)$. Oleh karena itu, *pdf* dari *short rate* r_k dalam selang $[u, k]$ dengan $u < k$ adalah

$$f(r_k) = \frac{1}{r_k\sqrt{2\pi\sigma^2\delta k}} \exp\left(-\frac{[\ln r_k - \left(\ln r_u + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta k\right)]^2}{2\sigma^2\delta k}\right). \tag{17}$$

Selanjutnya dari fungsi kepadatan peluang persamaan (17) dapat dibentuk fungsi *likelihood* nya yaitu

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i\sqrt{2\pi\sigma^2\delta k}} \exp\left(-\frac{[\ln r_i - \left(\ln r_{i-1} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta k\right)]^2}{2\sigma^2\delta k}\right). \tag{18}$$

Untuk mempermudah perhitungan, persamaan (18) dimodifikasi menjadi bentuk $\ln\ L(\mu, \sigma)$ yaitu

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \sigma) = & -\sum_{i=1}^{n} \ln r_i + \frac{n}{2} \ln \frac{1}{2\pi\sigma^2\delta k} - \frac{1}{2\sigma^2\delta k} \\ & \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\ln r_i^2 - 2\ln r_i\ (\ln r_{i-1} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta k) \right.\right. \\ & \left.\left. + (\ln r_{i-1} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta k)^2 \right)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Solusi dari σ dan μ tidak dapat ditentukan secara analitik, maka akan dilakukan pendekatan numerik metode Newton-Raphson untuk menentukan σ dan μ. Dengan menggunakan *software* Matlab versi R2013a dan data BI *rate* dari tahun 2006 sampai 2015 diperoleh taksiran parameter tingkat bunga model Rendleman-Bartter yaitu $\bar{\mu} = 0,0378$ dan $\bar{\sigma} = 0,276$.

Faktor diskon untuk tingkat bunga model Rendleman-Bartter yaitu [1, h. 645]

$$v^t = \frac{1}{\prod_{k=1}^{t} (1 + r(k))}. \tag{20}$$

Sehingga dengan mensubtitusikan persamaan (16) dan hasil estimasi parameter tingkat bunga model Rendleman-Bartter ke persamaan (20), diperoleh

$$v^t = \frac{1}{\prod_{k=1}^{t}\left(1 + \ r(0)\exp\left((0,0378 - \frac{1}{2}(0,276)^2)k + 0,276\ W_k\right)\right)}, \tag{21}$$

dan pada waktu $t+1$ persamaan (21) dapat juga dinyatakan dengan

$$v^{t+1} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1 + \ r(0)\exp\left((0,0378 - \frac{1}{2}(0,276)^2)k + 0,276\ W_k\right)\right)}. \tag{22}$$

Premi tunggal asuransi jiwa berjangka untuk usia x tahun dapat dinyatakan dengan [4, h. 83]

$$A^1_{x:\overline{n}|} = R\left(\sum^{n-1}{}_{t=0} v^{t+1}\ {}_{t|}q_x\right). \tag{23}$$

Premi tunggal asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter yaitu

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \ R\left[\sum_{t=0}^{n-1}\frac{s^t g^{c^x\left(c^t-1\right)} - s^{t+1}g^{c^x\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1 + \ r(0)\exp\left((0,0378 - \frac{1}{2}(0,276)^2)k + 0,276\ W_k\right)\right)}\right]. \tag{24}$$

Kemudian, premi tunggal asuransi jiwa berjangka untuk usia $x+j$ tahun dengan jangka waktu pertanggungan $n-j$ tahun berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter adalah

$$A^1_{x+j:\overline{n-j}|} = R\left[\sum_{t=0}^{n-j-1}\frac{s^t g^{c^{x+j}\left(c^t-1\right)} - s^{t+1}g^{c^{x+j}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1 + \ r(0)\exp\left((0,0378 - \frac{1}{2}(0,276)^2)k + 0,276\ W_k\right)\right)}\right]. \tag{25}$$

Premi tahunan asuransi jiwa berjangka untuk seseorang yang berusia x tahun dengan jangka waktu pertanggungan n tahun dan masa pembayaran premi selama m tahun dapat dinyatakan dengan [9, h. 58]

$${}_mP^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}. \tag{26}$$

Premi tahunan asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter yaitu

$$ {}_{m}P^{1}_{x:\overline{n}|} = R\left[\frac{\sum_{t=0}^{n-1}\frac{s^t g^{c^x\left(c^t-1\right)}-s^{t+1}g^{c^x\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{s^t g^{c^x(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}\right]. \tag{27}$$

4. CADANGAN ZILLMER ASURANSI JIWA BERJANGKA

Cadangan prospektif adalah cadangan yang perhitungannya berdasarkan nilai sekarang dari semua pengeluaran di waktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang dari total pendapatan di waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis.

Cadangan premi prospektif asuransi jiwa berjangka untuk seseorang yang berusia x tahun dengan j merupakan waktu perhitungan cadangan, m merupakan masa pembayaran premi, dan n merupakan jangka waktu pertanggungan untuk $j < m < n$ [4, h. 126] dengan uang pertanggungan dibayarkan diakhir tahun polis yaitu

$$ {}_{j}^{m}V^{1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A^{1}_{x+j:\overline{n-j}|} - {}_{m}P^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{m-j}|}, & j < m < n \\ A^{1}_{x+j:\overline{n-j}|}, & m \leq j < n. \end{cases} \tag{28}$$

Cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-bartter yaitu

$$ {}_{j}^{m}V^{1}_{x:\overline{n}|} = R\Bigg[\left(\sum_{t=0}^{n-j-1}\frac{s^t g^{c^{x+j}\left(c^t-1\right)} - s^{t+1}g^{c^{x+j}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ r(0)\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right) - \left(\frac{\sum_{t=0}^{n-1}\frac{s^t g^{c^x\left(c^t-1\right)}-s^{t+1}g^{c^x\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{s^t g^{c^x(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}\right) \left(\sum_{t=0}^{m-j-1}\frac{s^t g^{c^{x+j}\left(c^t-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ r(0)\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right)\Bigg]. \tag{29}$$

Selanjutnya akan dibahas cadangan Zillmer. Cadangan Zillmer merupakan cadangan premi yang dimodifikasi yang perhitungannya menggunakan cadangan prospektif dan tingkat Zillmer sebesar α. Pada cadangan Zillmer digunakan premi bersih modifikasi pada tahun polis ke-1 yaitu P_1 dan premi bersih modifikasi mulai dari tahun polis ke-2 sampai ke-h yaitu P_2, dengan h merupakan waktu Zillmer. Premi modifikasi P_1 dan P_2 diberikan oleh

$$\begin{aligned} P_1 &= {}_mP^1_{x:\overline{n}|} - \alpha\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right), \\ P_2 &= {}_mP^1_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Dengan menggunakan persamaan (28) dan premi bersih modifikasi diperoleh cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka yaitu

$$\begin{aligned} {}^m_jV^{1\ (hz)}_{x:\overline{n}|} = A^1_{x+j:\overline{n-j}|} - \Big[&P_2\ddot{a}_{x+j:\overline{h-j}|} \\ &+ {}_mP^1_{x:\overline{n}|}\left(\ddot{a}_{x+j:\overline{m-j}|} - \ddot{a}_{x+j:\overline{h-j}|}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{31}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (30) ke persamaan (31) maka diperoleh

$${}^m_jV^{1\ (hz)}_{x:\overline{n}|} = A^1_{x+j:\overline{n-j}|} - {}_mP^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{m-j}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+j:\overline{h-j}|}. \tag{32}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan persamaan (28) ke persamaan (32) diperoleh cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka dengan jangka waktu pertanggungan n tahun selama masa pembayaran premi m tahun dan waktu Zillmer h tahun adalah

$${}^m_jV^{1\ (hz)}_{x:\overline{n}|} = {}^m_jV^1_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+j:\overline{h-j}|}. \tag{33}$$

Cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter adalah

$${}^m_jV^{1\ (hz)}_{x:\overline{n}|} = R\Bigg[\left(\sum_{t=0}^{n-j-1} \frac{s^t g^{c^{x+j}\left(c^t-1\right)} - s^{t+1} g^{c^{x+j}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1 + \ r(0)\exp\left((0,0378 - \frac{1}{2}(0,276)^2)k + 0,276\ W_k\right)\right)}\right)$$

$$
-\left(\frac{\sum_{t=0}^{n-1}\frac{s^t g^{c^x\left(c^t-1\right)}-s^{t+1}g^{c^x\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{s^t g^{c^x(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}\right)
$$

$$
\left(\sum_{t=0}^{m-j-1}\frac{s^t g^{c^{x+j}\left(c^t-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ r(0)\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right)\Bigg]
$$

$$
-\frac{\alpha}{\sum_{t=0}^{h-1}\frac{s^t g^{c^x(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ r(0)\exp\left((0{,}0378-\frac{1}{2}(0{,}276)^2)k+0{,}276\ W_k\right)\right)}}
$$

$$
\left(\sum_{t=0}^{h-j-1}\frac{s^t g^{c^{x+j}(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ r(0)\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right). \tag{34}
$$

Contoh 1 Pak Riza adalah seorang karyawan swasta yang berusia 55 tahun, ingin mengikuti program asuransi jiwa berjangka dengan masa pertanggungan 15 tahun dan masa pembayaran premi 10 tahun. Uang pertanggungan yang akan diterima oleh ahli waris adalah sebesar Rp 50.000.000,00. Jika tingkat bunga yang berlaku 2,5%, $r(0) = 0,025$, tingkat Zillmer sebesar 0,025, waktu Zillmer 8 tahun dan konstanta dari distribusi Makeham adalah 0,0005. Tentukan :

1. Cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka.
2. Cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dan dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter.

Dari permasalahan di atas diketahui $x = 55$ tahun, $n = 15$ tahun, $m = 10$ tahun, $i = 2,5\%$, $r(0) = 0,025$, $\alpha = 0,0025$, $h = 8$ tahun, $A = 0,0005$, dan $R =$ Rp $50.000.000,00$. Berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia (TMI) tahun 1999, maka peluang hidup pria adalah $p_{55} = 0,9909239$.

1. Cadangan Zillmer Asuransi Jiwa Berjangka

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka dengan masa pembayaran premi 10 tahun, yaitu sebesar

$$
\ddot{a}_{55:\overline{10}|} = \sum_{t=0}^{10-1} v^t\ {}_tp_{55},
$$

$$
\ddot{a}_{55:\overline{10}|} = 9,19427.
$$

Selanjutnya dapat ditentukan premi tunggal asuransi jiwa berjangka, yaitu

$$A^{1}_{55:\overline{15}|} = R\left(\sum_{t=0}^{15-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_{55}\right),$$

$$A^{1}_{55:\overline{15}|} = \text{Rp } 10.274.240\ .$$

Kemudian berdasarkan persamaan (26) premi tahunan yang harus dibayar oleh tertanggung adalah

$${}_{10}P^{1}_{55:\overline{15}|} = \frac{A^{1}_{55:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{55:\overline{10}|}},$$

$${}_{10}P^{1}_{55:\overline{15}|} = \text{Rp } 1.117.461\ .$$

Kemudian berdasarkan persamaan (28) dapat ditentukan cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka pada akhir tahun ke 1 ($j = 1$).

$$\begin{aligned}
{}^{10}_{1}V^{1}_{55:\overline{15}|} &= A^{1}_{55+1:\overline{15-1}|} - {}_{10}P^{1}_{55:\overline{15}|}\ \ddot{a}_{55+1:\overline{10-1}|},\\
&= 10169697 - (\ (1117461)\ (7,050322)\ ),\\
{}^{10}_{1}V^{1}_{55:\overline{15}|} &= \text{Rp } 697.938,2951\ .
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditentukan cadangan Zillmer. Anuitas hidup awal berjangka dengan jangka waktu pertanggungan $h = 8$ tahun yaitu

$$\ddot{a}_{55:\overline{8}|} = \sum_{t=0}^{8-1} v^{t}\ {}_{t}p_{55},$$

$$\ddot{a}_{55:\overline{8}|} = 7,815866\ .$$

Cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka pada akhir tahun ke 1 ($j = 1$) dapat ditentukan dengan menggunakan hasil cadangan prospektif pada pengerjaan sebelumnya dan persamaan (33) yaitu

$$\begin{aligned}
{}^{10}_{1}V^{1\ (8z)}_{55:\overline{15}|} &= {}^{10}_{1}V^{1}_{55:\overline{15}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{55:\overline{8}|}}\ \ddot{a}_{55+1:\overline{8-1}|},\\
&= 697938,2951 - \left(\frac{0,0025}{7,815866}\ (7,050322)\right),\\
{}^{10}_{1}V^{1\ (8z)}_{55:\overline{15}|} &= \text{Rp } 697.938,2725\ .
\end{aligned}$$

2. Cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dan dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter.
Berdasarkan Definisi 1 dapat ditentukan konstanta Gompertz dari Tabel Mortalita Indonesia (TMI) 1999 pria dengan terlebih dahulu menghitung σ dan μ, dengan menggunakan *microsoft excel* diperoleh $\sigma = 29,30017065$ dan $\mu = 50$.

Subtitusikan nilai σ dan μ ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\, b \ \text{ maka } \ b = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\,(29,30017065) = \ 22,85683677,$$

$$\text{dan } \mu = a - b\gamma \ \text{ maka } \ a = 50 + (22,85683677)(0,577215665) = 63,19332423.$$

Dengan mensubtitusikan nilai a dan b ke persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} g &= \exp\left(-\exp(\frac{-a}{b})\right), \\ g &= 0,939068452 \ , \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} c &= \exp\left(\frac{1}{b}\right), \\ c &= 1,044763345 \ . \end{aligned}$$

Kemudian, untuk konstanta Makeham A=0,0005 diperoleh nilai s dengan pemisalan $\ln s = -A$

$$\begin{aligned} \ln s &= -0,0005, \\ s &= 0,999500125. \end{aligned}$$

Peluang hidup untuk peserta asuransi yang berusia 55 tahun bertahan hidup hingga 15 tahun kemudian, dengan menggunakan persamaan (6) adalah

$$\begin{aligned} {}_{15}p_{55} &= s^{15} g^{c^{55}\left(c^{15}-1\right)}, \\ {}_{15}p_{55} &= 0,518626594 \ . \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan memisalkan nilai $r(0) = 0,025$, dapat ditentukan nilai tunai anuitas hidup awal berjangka peserta yang berusia 55 tahun dengan jangka pembayaran premi selama 10 tahun berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter yaitu

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{55:\overline{10}|} &= \sum_{t=0}^{10-1} \frac{s^t g^{c^{55}(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1 + \ 0,025 \exp\left((0,0378 - \frac{1}{2}(0,276)^2)k + 0,276\ W_k\right)\right)}, \\ \ddot{a}_{55:\overline{10}|} &= \ 7,961419812 \ . \end{aligned}$$

Dengan uang pertanggungan Rp 50.000.000,00 dan menggunakan persamaan (24) maka premi tunggal asuransi jiwa berjangka berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter adalah

$$A^{1}_{55:\overline{15}|} = R\left[\sum_{t=0}^{15-1}\frac{s^{t}g^{c^{55}\left(c^{t}-1\right)}-s^{t+1}g^{c^{55}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ 0,025\exp\left(\left(0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2\right)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right],$$

$$A^{1}_{55:\overline{15}|} = \text{Rp } 21.110.287\ .$$

Selanjutnya dapat ditentukan premi tahunan yang akan dibayar oleh tertanggung selama 10 tahun berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter. Berdasarkan persamaan (26) diperoleh

$$\begin{aligned}
{}_{10}P^{1}_{55:\overline{15}|} &= R\left[\frac{\sum_{t=0}^{15-1}\frac{s^{t}g^{c^{55}\left(c^{t}-1\right)}-s^{t+1}g^{c^{55}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ 0{,}025\exp\left((0{,}057-\frac{1}{2}(0{,}339)^2)k+0{,}339\ W_k\right)\right)}}{\sum_{t=0}^{10-1}\frac{s^{t}g^{c^{55}(c^{t}-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0{,}025\exp\left((0{,}057-\frac{1}{2}(0{,}339)^2)k+0{,}339\ W_k\right)\right)}}\right],\\
&= \frac{\text{Rp } 21.110.287}{7,961419812}\ ,\\
{}_{10}P^{1}_{55:\overline{15}|} &= \text{Rp } 2.651.573\ .
\end{aligned}$$

Sebelum menentukan cadangan Zillmer, akan ditentukan terlebih dahulu cadangan prospektif berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter berdasarkan persamaan (29) untuk tahun ke 1 ($j = 1$) yaitu

$$\begin{aligned}
{}^{10}_{1}V^{1}_{55:\overline{15}|} =& R\Bigg[\left(\sum_{t=0}^{15-1-1}\frac{s^{t}g^{c^{55+1}\left(c^{t}-1\right)}-s^{t+1}g^{c^{55+1}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,057-\frac{1}{2}(0,339)^2)k+0,339\ W_k\right)\right)}\right)\\
&-\left(\frac{\sum_{t=0}^{15-1}\frac{s^{t}g^{c^{55}\left(c^{t}-1\right)}-s^{t+1}g^{c^{55}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ 0{,}025\exp\left((0{,}057-\frac{1}{2}(0{,}339)^2)k+0{,}339\ W_k\right)\right)}}{\sum_{t=0}^{10-1}\frac{s^{t}g^{c^{55}(c^{t}-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0{,}025\exp\left((0{,}057-\frac{1}{2}(0{,}339)^2)k+0{,}339\ W_k\right)\right)}}\right)\\
&\left(\sum_{t=0}^{10-1-1}\frac{s^{t}g^{c^{55+1}\left(c^{t}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,057-\frac{1}{2}(0,339)^2)k+0,339\ W_k\right)\right)}\right)\Bigg],\\
=& \text{ Rp } 50.000.000\left[0,410610632\ -\ (0,053031463)\,(7,306967355)\right],\\
{}^{10}_{1}V^{1}_{55:\overline{15}|} =& \text{ Rp } 1.155.573,562\ .
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditentukan cadangan Zillmer berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter. Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka dengan jangka waktu pertanggungan $h = 10$ tahun yaitu

$$\ddot{a}_{55:\overline{8}|} = \sum_{t=0}^{8-1} \frac{s^t g^{c^{55}(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)},$$

$$\ddot{a}_{55:\overline{8}|} = 6,698065251\ .$$

Cadangan Zillmer asuransi jiwa berjangka pada akhir tahun ke 1 ($j = 1$) berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (34) yaitu

$$\begin{aligned}
{}_{1}^{10}V^{1\ (8z)}_{55:\overline{15}|} =& R\Bigg[\left(\sum_{t=0}^{15-1-1} \frac{s^t g^{c^{55+1}\left(c^t-1\right)} - s^{t+1} g^{c^{55+1}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right) \\
&- \left(\frac{\sum_{t=0}^{15-1} \frac{s^t g^{c^{55}\left(c^t-1\right)} - s^{t+1} g^{c^{55}\left(c^{t+1}-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t+1}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}}{\sum_{t=0}^{10-1} \frac{s^t g^{c^{55}(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}}\right) \\
&\left(\sum_{t=0}^{10-1-1} \frac{s^t g^{c^{55+1}\left(c^t-1\right)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right)\Bigg] \\
&- \frac{\alpha}{\sum_{t=0}^{8-1} \frac{s^t g^{c^{55}(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}(0,276)^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}} \\
&\left(\sum_{t=0}^{8-1-1} \frac{s^t g^{c^{55+1}(c^t-1)}}{\prod_{k=1}^{t}\left(1+\ 0,025\exp\left((0,0378-\frac{1}{2}0,276^2)k+0,276\ W_k\right)\right)}\right), \\
=& \text{ Rp } 50.000.000\,[0,410610632\ -\ (0,053031463)\,(7,306967355)] \\
&- \left(\frac{0,025}{6,698065251}\right) 5,985241876\ , \\
{}_{1}^{10}V^{1\ (8z)}_{55:\overline{15}|} =& \text{ Rp } 1.155.573,54\ .
\end{aligned}$$

5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh adalah, tingkat bunga model Rendleman-Bartter dipengaruhi oleh nilai parameternya yang tiap saat dapat berubah. Nilai cadangan Zillmer berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter lebih besar dibandingkan cadangan Zillmer dengan tingkat bunga konstan. Hal ini dikarenakan cadangan prospektif berdasarkan distribusi Makeham dengan menggunakan tingkat bunga model Rendleman-Bartter lebih besar dibandingkan cadangan prospektif dengan tingkat bunga konstan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] N. Bowers, L. J. Gerber dan U. Hans, *Actuarial Mathematics*, *Second Ed*, The Society of Actuaries, Schaumburg, 1997.

[2] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivative*, *Fifth Ed*, Pearson Education International, New Jersey, 2003.

[3] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers dan K. Ye, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, *Eight Ed*, Pearson Education International, London, 2007.

[4] T. Futami, *Matematika Asuransi Jiwa*, *Bagian I*, Terj. *Seimei Hoken Sugaku, Gekan (92 Revision)*, oleh G. Herliyanto, Incoporated Fundation, Tokyo, 1993.

[5] T. Futami, *Matematika Asuransi Jiwa*, *Bagian II*, Terj. *Seimei Hoken Sugaku, Gekan (92 Revision)*, oleh G. Herliyanto, Incoporated Fundation, Tokyo, 1994.

[6] X. Feng, G. He dan Abdurishit, *Estimation of parameters of the Makeham distribution using the least squares method*, Mathematics and Computers in Simulation, 77 (2008), 34-44.

[7] R. J. Rendleman dan B. J. Bartter, *The pricing of options on debt securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 15 (1980), 11-24.

[8] W. J. Willemse dan H. Koppelaar, *Knowledge elicitation of Gompertzs law of mortality*, Scandinavian Actuarial Journal, 2(2000), 168-179.

[9] W. O. Menge dan C. H. Fischer, *The Mathematics of Life Insurance*, Ulrich's Books Inc, Michigan, 1985.

[10] Y. Yeliz, *One Factor Interest Rate Models: Anallytic Solutions and Approximations*, Middle East Technical University, Ankara, 2005.