SIFAT *MULTIPLICATIVE* PADA HIMPUNAN SISA

Yurnalis [1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*yurnalisdaulay@gmail.com

ABSTRACT

In article we study the multiplicative property of set residue mod n. Given a natural number n, every set of residues mod n of cardinality at least $n/2$ contains residues a, b, c with $ab = c$. The set is said to be a product free if $ab = c$ has no solution with $abc \in S$. We say a modulus n having property P if the largest product-free subset S of Z_n has cardinality strictly smaller than $n/2$.

Keywords: *Product free sets, set residue, modulus n*

ABSTRAK

Artikel ini mempelajari sifat *multiplicative* pada himpunan sisa mod n. Diberikan bilangan asli n, setiap himpunan sisa mod n dengan kardinalitas kecil dari $n/2$ memuat anggota $a, b, c \in S$ dengan $ab = c$. Himpunan dikatakan bebas perkalian jika $ab = c$ tidak mempunyai solusi dengan $abc \in S$. Modulus n mempunyai sifat P jika sub himpunan S bebas perkalian terbesar dari Z_n mempunyai kardinalitas lebih kecil dari pada $n/2$.

Kata kunci: *Perkalian himpunan sisa, himpunan sisa, modulo n*

1. PENDAHULUAN

Salah satu masalah dalam teori bilangan adalah tentang himpunan dengan perkalian. Misalnya $ab = c$ dengan $abc \in S$ dan kondisi seperti $ab \neq c$ dengan $abc \in S$ yang diberikan pada himpunan semua kongruen modulo n. Himpunan semua kongruen modulo n dinamakan himpunan sisa modulo n yang dinotasikan dengan Z_n.

Kardinalitas S adalah jumlah anggota yang ada dihimpunan S dinotasikan dengan $|S|$. Himpunan $S \subset Z_n$ dikatakan bebas perkalian jika $ab = c$ tidak mempunyai solusi atau $ab \neq c$ dengan $a, b, c \in S$. Suatu himpunan sisa modulo n mempunyai sifat P jika sub himpunan S bebas perkalian terbesar dari Z_n mempunyai kardinalitas kecil dari $n/2$.

2. Aritmatika Dasar

Pada bagian ini akan membahas tentang kardinalitas, himpunan sisa dan keterbagian.

Definisi 1 [1, h. 1] Bilangan bulat b dapat dibagi dengan bilangan bulat $a = 0$ atau a membagi b yang dinotasikan dengan $a \mid b$ jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$. Sementara itu $a \nmid b$ jika b tidak bisa dibagi oleh a.

Definisi 2 [4, h. 6] Jika himpunan X mempunyai anggota yang hingga maka X adalah himpunan hingga. Jika X himpunan hingga maka jumlah elemen didalam himpunan X dinamakan kardinalitas X yang dinotasikan dengan $|X|$.

Definisi 3 [1, h. 21] Misalkan a dan b bilangan bulat dengan salah satu bukan nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan (a, b) adalah bilangan bulat positif d sehingga

1. $d|a$ dan $d|b$,
2. Jika $c|a$ dan $c|b$, maka $c \leq d$.

Definisi 4 [5, h. 51] Pada kongruen kelas modulo n, terdapat Z_n merupakan himpunan kelas kongruen sehingga

$$Z_n = [0], [1], [2], \cdots, [n-1].$$

yang didefinisikan sebagai himpunan sisa, selanjutnya dinotasikan dengan $Z_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$.

Definisi 5 [10, h. 80] Bilangan bulat n dikatakan bebas kuadrat jika tidak ada bilangan bulat k sehingga $k^2 \mid n$.

Contoh 1 $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, \cdots$.

Definisi 6 [8, h. 1] Bilangan bulat n dikatakan *Square full* jika terdapat prima p membagi n, maka p^2 membagi n.

Contoh 2 $1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125, \cdots$.

2. Sifat P

Setiap himpunan sisa modulo n yang mempunyai kardinalitas kecil dari $n/2$ memuat sisa a, b, c dengan

$$ab = c \tag{1}$$

Himpunan S dikatakan bebas perkalian (*product free*) jika persamaan (1) tidak mempunyai solusi dengan $a, b, c \in S$ atau $ab \neq c$.

Contoh 3 Misalkan himpunan $S = \{2, 4, 6\}$ merupakan bebas perkalian (*product free*) pada $S \subset Z_{12}$, karena untuk setiap $a, b, c \in S$ menunjukkan $ab \neq c$.

Suatu himpunan sisa modulo n mempunyai sifat P jika sub himpunan $S \subset Z_n$ bebas perkalian *(product free)* terbesar mempunyai kardinalitas lebih kecil dari $n/2$.

4. Bilangan Asli yang Mempunyai Sifat P

Pada subbab ini dibahas suatu himpunan bilangan asli pada Z_n yang mempunyai sifat P. Untuk bilangan asli n dan bilangan prima p, misalkan $v_p(n)$ adalah jumlah faktor prima dari n. Misalkan n,m adalah bilangan bulat yang relatif prima. Anggap *multiplicative monoid* $Z_n \times Z_m^*$. Misalkan m,n bilangan bulat positif sehingga $(m, n) = 1$ untuk $n \neq m$ didapat di tulis

$$\{a \in Z_{mn} : (a, m) = 1\}. \tag{2}$$

Untuk $d|n$ misalkan

$$T_d(n, m) = \{T_d = a \in Z_n \times Z_m^* : (a, n) = d\}. \tag{3}$$

Selanjutnya jika $S \subset Z_n \times Z_m^*$, misalkan

$$S_d = \{(n, m) = S_d = T_d \cap S\} \tag{4}$$

$$R_d = \{(n, m) = R_d = T_d \backslash S_d\} \tag{5}$$

Lema 7 [9] Misalkan n bilangan bulat. Jika m bilangan bebas kuadrat yang relatif prima ke n dan jika $S \subset Z_n \times Z_m^*$ adalah bebas perkalian (*product free*), maka $|S| \leq \frac{1}{2}\varphi(m)n$. Maka untuk setiap m bebas kuadrat yang relatif prima ke n, mn mempunyai sifat P

Bukti: lihat [9] □

Lema 8 [9] Jika n, m bilangan asli yang relatif prima, $S \subset Z_n \times Z_m^*$ adalah bebas perkalian (*product free*) dan D himpunan pembagi dari n yang tidak kosong dengan $S_d = \varnothing$ untuk setiap $d \in D$. Misalkan $\sigma = \sum_{d \in D} \frac{1}{d}$. Jika

$$\frac{\varphi(n)}{n} > \frac{1}{2\sigma}$$

maka $|S| < \frac{1}{2}\varphi(m)n$.

Bukti: lihat [9] □

Lema 9 [9] Jika m, n bilangan asli yang relatif prima, $S \in Z_n \times Z_m^*$ adalah bebas perkalian(*product free*), dan $S_1 \neq \varnothing$, maka $|S| \leq \frac{1}{2}\varphi(m)n$.

Bukti: lihat [9] □

Akibat 10 [9] Jika n, m adalah bilangan asli yang relatif prima, $\varphi(n) > \frac{1}{2}n$, dan m adalah bebas kuadrat. Maka mn mempunyai sifat P. Setiap bilangan bebas kuadrat mempunyai sifat P.

Bukti: lihat [9] □

Proposisi 1 [9] Jika m, n bilangan asli yang relatif prima dan S sub himpunan dari $Z_n \times Z_m^*$ yang bebas perkalian (*product free*). Jika p adalah faktor prima dari n dan $S_p \neq \varnothing$. Misalkan D adalah himpunan pembagi dari n yang tidak kosong dan tidak habis dibagi dengan p dengan $S_d = \varnothing$ untuk setiap $d \in D$. Misalkan $\sigma = \sum_{d \in D} \frac{1}{d}$. Jika

$$\frac{\varphi}{n} > \frac{p-1}{2p\sigma} \tag{6}$$

maka $|S| < \frac{1}{2}\varphi(m)n$.

Bukti: lihat [9] □

Proposisi 2 [9] Jika n, m adalah bilangan asli relatif prima, $4 \mid n, S \subset Z_n \times Z_m^*$ adalah bebas perkalian (*product free*), $S_2 = \varnothing, S_4 \neq \varnothing$, dan D adalah himpunan pembagi ganjil dari n memuat 1 dengan $S_d = \varnothing$ untuk setiap $d \in D$. Misalkan $\sigma = \sum_{d \in D} \frac{1}{d}$.Jika

$$\frac{\varphi(n)}{n} > \frac{3}{4+8\sigma} \tag{7}$$

maka $|S| < \frac{1}{2}\varphi(m)n$.

Bukti: lihat [9] □

Proposisi 3 [9] Jika n, m bilangan bulat positif yang relatif prima, $S \subset Z_n \times Z_m^*$ adalah bebas perkalian (*product free*), $p, q \mid n$ adalah bilangan prima yang berbeda, $S_p, S_q \neq \varnothing$, dan D adalah himpunan pembagi n yang tidak kosong dan relatif prima ke pq dengan $S_d = \varnothing$ untuk setiap $d \in D$. Misalkan $\sigma = \sum_{d \in D} \frac{1}{d}$. Jika

$$\frac{\varphi(n)}{n} > \frac{\varphi(pq)}{2pq\sigma}, \tag{8}$$

maka $|S| < \frac{1}{2}\varphi(m)\, n$.

Bukti: lihat [9] □

Selanjutnya akan ditunjukkan lebih banyak lagi bilangan yang mempunyai sifat P. Misalkan $s(n)$ dinotasikan dengan *square full* terbesar pembagi dari n dan $\omega(n)$ jumlah bilangan prima yang berbeda faktor dari n. Diketahui bahwa $S \subset Z_n \times Z_m^*$.

Teorema 11 [9] Bilangan asli n mempunyai sifat P jika $\omega(s(n)) \leq 5$.

Bukti: Misalkan n adalah bilangan asli yang *square full* dengan $w(s(n)) \leq 5$. Berdasarkan Lema 7, membuktikan bahwa mn mempunyai sifat P, untuk setiap bilangan m bebas kuadrat yang relatif prima ke n menunjukkan untuk setiap m, sub himpunan dari $Z_n \times Z_m^*$ yang merupakan bebas perkalian (*product free*) terbesar mempunyai kardinalitasi $\frac{1}{2}\varphi(mn)$.

Dapat diselesaikan sebarang bilangan bulat m yang relatif prima ke n dan ambil $S \subset Z_n \times Z_m^*$ himpunan bebas perkalian (*product free*). Dengan menggunakan Lema 9 asumsikan bahwa $S_1 = \varnothing$. dari 4 kasus bergantung pada 4 kemungkinan untuk $(6, n)$.

Kasus pertama asumsikan bahwa $(6, n) = 1$ maka

$$\frac{\varphi(n)}{n} \geq \frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{10}{11}\frac{12}{13}\frac{16}{17} > \frac{1}{2},$$

Sehingga dengan menggunakan Akibat 10 memenuhi untuk kasus pertama.

Kasus kedua asumsikan bahwa $(6, n) = 3$. Maka $\varphi(n)/n \geq 348/1001$. Jika $S_3 = \varnothing$, berdasarkan Lema 8 dengan $D = \{1, 3\}$. Selanjutnya diasumsikan $S_3 \neq \varnothing$ maka Proposisi 1 dengan $p = 3$ dan $D = \{1\}$ menyelesaikan kasus kedua.

Kasus ketiga asumsikan $(6, n) = 2$ maka $\varphi(n)/n \geq 288/1001$. Jika $S_2 = \varnothing$ Proposisi 1 dengan $p = 2$, $D = \{1\}$ menunjukkan $|S| < \frac{1}{2}\varphi(m)n$. Maka dapat asumsikan $S_2 = \varnothing$. Jika $5 \nmid n$, maka $\varphi(n)/n > 1/3$, kemudian Lema 8 dengan $D = \{1, 2\}$, sehingga asumsikan $5 \mid n$. Jika $S_5 \neq \varnothing$, Proposisi 1 dengan $p = 5, D = \{1, 2\}$ sehingga dapat diasumsikan $S_5 = \varnothing$. Jika $S_4 \neq \varnothing$ hasil berikut dengan Proposisi 2 dengan $D = \{1, 5\}$. Jadi asumsikan $S_4 = \varnothing$ maka dengan Lema 8 dengan $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ menyelesaikan kasus ini.

Kasus keemapat $(6, n) = 6$. Pada kasus ini diketahui $\varphi(n)/n \geq 16/77$. Jika $S_2, S_3 \neq \varnothing$, hasil berikut dari Proposisi 3 dengan $p = 2$, $q = 3$, dan $D = \{1\}$. Kemudian asumsikan bahwa $S_2 \neq \varnothing, S_3 = \varnothing$. Kemudian mengikuti hasil dari Proposisi 1 dengan $p = 2, D = \{1, 3\}$. Sekarang asumsikan $S_2 = \varnothing, S_3 \neq \varnothing$. Jika $5 \nmid n$ maka $\varphi(n)/n \geq 240/1001$ dan mengikut hasil dari Proposisi 1 dengan $p = 3$, $D = \{1, 2\}$. Jadi assumsikan bahwa $5 \mid n$. Jika $S_5 \neq \varnothing$, mengikuti hasil dari Proposisi3 dengan $p = 3, D = \{1, 2\}$, jadi ambil $S_5 = \varnothing$. Mengikuti hasil dari Proposisi 1 dengan $p = 3, D = \{1, 2, 5\}$.

Selanjutnya kasus bahwa $6 \mid n$ dan $S_1 = S_2 = S_3 = \varnothing$ dengan menggunakan Proposisi 2 dengan $D = \{1, 3\}$ menyelesaikan $S_4 \neq \varnothing$, asumsikan $S_4 = \varnothing$. Mengingat untuk $(34, n)$ ada empat kemungkinan. Jika $(35, n) = 1$, maka $\varphi(n)/n \geq 640/2431$, jadi Lema 8 dengan $D = \{1, 2, 3, 4\}$ menyelesaikan kasus ini.

Jika $(35, n) = 7$ sehingga $\varphi(n)/n \geq 240/1001$. Proposisi 1 dengan $p = 7$ dan $D = \{1, 2, 3, 4\}$ menyelesaikan kasus $S_7 \neq \varnothing$, sedangkan Lema 8 dengan $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ menyelesaikan kasus $S_7 = \varnothing$.

Jika $(35, n) = 5$ sehingga $\varphi(m)n \geq 32/143$. Proposisi 1 dengan $p = 5$ dan $D = \{1, 2, 3, 4\}$ menyelesaikan kasus $S_5 \neq \varnothing$, sedangkan Lema 8 dengan $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ menyelesaikan kasus $S_5 = \varnothing$.

Akhirnya jika $35 \mid n$ jika salah satu dari $S_5 \neq \varnothing$ atau $S_7 \neq \varnothing$, Proposisi 1 dengan $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Jadi asumsikan $S_5 = S_7 = \varnothing$, maka Lema 8 dengan $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $\square$

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Ibu Dr. Sri Gemawati, M.Si. dan Drs. Rolan Pane, M.Si. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burton, D. M. 2005. *Elementary Number Theory, Sixth Edition*. McGraw-Hill, New York.

[2] Fine, B. & G. Rosenberger. 2007. *Number Theory: An Introduction via the Distribution of Primes*. Birkauser, Boston.

[3] Hajdu, L., A. Schinzel & M. Skalba. 2009. Multiplicative Property of Sets of Positive Integers. *Arch. Math. (Basel)*, **93**:269-276.

[4] Houston, K.2009. *How to Think Like a Mathematician*. Cambridge University Press, New York.

[5] Hungerford, T.W. 2014. *Abstract Algebra: An Introduction, Third Edition*. Brooks/Cole, Boston.

[6] Koshy, T. 2007. *Elementary Number Theory with Applications, Second Edition*. Elsevier, New York.

[7] Melvyn, B. N. 1944. *Elementary Methods in Number Theory*. Springer, New York.

[8] Mollin, R. A. & P. G. Walsh. 1987. On Nonsquare Powerful Numbers, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* **10**: 125-130.

[9] Pomerance, C. & A Schinzel. 2011. Multiplicative Properties of Sets of Residues. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **1**: 52-66.

[10] Raji, W. 2013. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Lecturer Note. University of Beirut.