METODE NEWTON-COTES TERBUKA BERDASARKAN TURUNAN

Nurholilah Siagian[1*], Samsudhuha[2], Khozin Mu'tamar[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*nurholilah.siagian@student.unri.ac.id

ABSTRACT

This final project discusses Open Newton-Cotes methode based derivatives. Furthermore, in this discussion of numerical solution from Open Newton-Cotes method (ONC) and Open Newton-Cotes Based Derivatives method (ONC1) compared with solutions analytically. For some examples of cases it appears that the method ONC1 provide a better solution, with minimum error.

Keywords: Based derivatives methods, open Newton-Cotes.

ABSTRAK

Skripsi ini membahas penurunan metode Newton-Cotes Terbuka berdasarkan turunan. Selanjutnya pada pembahasan ini solusi numerik dari metode Newton-Cotes Terbuka (NCT) dan metode Newton-Cotes Terbuka Berdasarkan Turunan (NCT1) dibandingkan dengan solusi secara analitik. Dari beberapa contoh kasus terlihat bahwa metode NCT1 memberikan solusi yang lebih baik, dengan eror yang lebih kecil.

Kata kunci: berdasarkan turunan, metode newton-cotes terbuka.

1. PENDAHULUAN

Salah satu cara untuk menaksir integral tentu dari suatu fungsi adalah dengan menggunakan formula kuadratur Newton-Cotes Terbuka (NCT) [2, h. 201], yaitu metode integrasi yang hanya melibatkan titik titik di dalam batas integrasi, yang bentuk umumnya diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i). \tag{1}$$

Dalam penerapannya titik x_i berjarak sama dan untuk menentukan bobot w_i ditentukan dengan menerapkan formula (1) terlebih dahulu pada monomial x^k dimana

$k = 0, 1, \cdots, P$ [3, h. 1] sehingga hasilnya eksak, sedangkan untuk x^{P+1} hasilnya tidak eksak.

Dalam metode NCT evaluasi fungsi pada titik ujung interval tidak dilakukan, yaitu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

dimana $x_0, x_1, \cdots, x_n$ adalah $n+1$ titik integrasi yang berbeda dalam interval $[a, b]$ dengan $x_i = a+(i+1)h$, dan $h = (b-a)/(n+2)$. Selanjutnya ruas kanan persamaan (1) dinotasikan sebagai

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

Pembahasan dimulai dengan mendiskusikan metode Newton-Cotes terbuka pada bagian dua, dilanjutkan dibagian tiga dengan mendiskusikan metode Newton-Cotes berdasarkan turunan. Pendiskusian diakhiri pada bagian empat dengan contoh komputasi.

2. METODE NEWTON-COTES TERBUKA

Formula kuadratur Newton-Cotes Terbuka NCT bergantung kepada nilai bobot dari sebuah fungsi yang dievaluasikan sebagai berikut [3, h. 1]

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i). \tag{2}$$

Secara umum pendekatan untuk mencari nilai bobot ini berdasarkan prediksi formula kuadratur, yang diintegralkan monomial x^k dimana $k = 0, 1, \cdots, P$ tapi tidak untuk k^{P+1}. Dengan menggunakan koefisien yang tidak dapat ditentukan, penggunaan pendekatan yang menghasilkan sebuah sistem $P+1$ persamaan linear untuk bobot w_i. Untuk $n = 0$, persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0).$$

Selanjutnya untuk $f(x) = 1$ dengan $f(x_0) = 1$

$$\begin{aligned} \int_{x_{-1}}^{x_1} dx &\approx w_0 \\ x_1 - x_{-1} &\approx w_0 \\ 2h &\approx w_0, \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx =& 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f^{(2)}\xi \\ I_0(f) =& 2hf(x_0). \end{aligned}$$

Untuk $n = 1$ persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1). \quad (3)$$

Untuk $f(x) = 1$ dengan $f(x_0) = 1$ dan $f(x_1) = 1$

$$\begin{aligned} \int_{x_{-1}}^{x_2} dx &\approx w_0 + w_1 \\ x_2 - x_{-1} &\approx w_0 + w_1 \\ 3h &\approx w_0 + w_1 \quad (4) \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \int_{x_{-1}}^{x_2} dx &\approx w_0 x_0 + w_1 x_1 \\ \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_{-1}^2\right) &\approx w_0 x_0 + w_1 x_1 \\ \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_{-1}^2\right)\left(x_2^2 + x_{-1}^2\right) &\approx w_0 x_0 + w_1 x_1 \\ \frac{3h}{2}\left(x_2^2 - x_{-1}^2\right) &\approx w_0 x_0 + w_1 x_1. \quad (5) \end{aligned}$$

Dari persamaan (4) dan persamaan (5) diperoleh:

$$w_0 = \frac{3h}{2}, w_1 = \frac{3h}{2},$$

sehingga persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{3h^3}{4} f^{(2)}(\xi),$$

dimana $\xi \in (x_{-1}, x_2)$

$$I_1(f) = \frac{3h}{2}(f(x_0) + f(x_1)).$$

Untuk $n = 2$ bentuk kuadratur NCT dapat disederhanakan menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)dx = \frac{4h}{3}(2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)) + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi),$$

dimana $\xi \in (x_{-1}, x_3)$

$$I_2(f) = \frac{4h}{3}(2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)).$$

Untuk $n = 3$ dan $n = 4$ diperoleh dengan langkah yang sama seperti di atas sehingga diperoleh

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{24}(11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)) + \frac{95h^5}{144} f^4(\xi),$$

dimana $\xi \in (x_{-1}, x_4)$

$$I_3(f) = \frac{5h}{24}(11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)),$$

dan untuk $n = 4$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} f(x)dx =& \frac{3h}{10}(11f(x_0) - 14f(x_1) + 26f(x_2)\\ & - 14f(x_3) + 11f(x_4)) + \frac{41h^7}{140}f^6(\xi).\end{aligned}$$

dimana $\xi \in (x_{-1}, x_5)$

$$\begin{aligned}I_4(f) =& \frac{3h}{10}(11f(x_0) - 14f(x_1) + 26f(x_2)\\ & - 14f(x_3) + 11f(x_4)) + \frac{41h^7}{140}f^6(\xi).\end{aligned}$$

3. METODE NEWTON-COTES TERBUKA BERDASARKAN TURUNAN

Misalkan $f \in C^{2n+1}[a,b]$ adalah sebuah fungsi bernilai real. Misalkan pada interval $[a,b]$ dibagi lagi menjadi $n+2$ subinterval dengan $x_{-1}, x_0, \cdots, x_{n+1}$. Nilai fungsi dari turunan pertama pada $x_i \in (a,b)$ sehingga bentuk umumnya adalah

$$\int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} u_i f'(x_i)h. \tag{6}$$

dimana w_i dan u_i adalah nilai bobot untuk fungsi dan turunannya secara berturut-turut, dan n adalah sebuah subinterval yang digunakan pada formula dasar[12,h.2]. Untuk $n = 0$, persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = w_0 f(x_0) + u_0 f'(x_0)h. \tag{7}$$

Untuk $f(x) = 1$ dari persamaan (7) sehingga didapat:

$$\begin{aligned}\int_{x_{-1}}^{x_1} 1\ dx &= w_0\\ x_1 - x_{-1} &= w_0.\end{aligned}$$

Oleh karena $x_1 = x_{-1} + 2h$ maka diperoleh

$$w_0 = 2h.$$

Untuk $f(x) = x$ dari persamaan (7) akan menghasilkan

$$\begin{aligned}
\int_{x_{-1}}^{x_1} x dx &= w_0 x_0 + u_0 h \\
\frac{1}{2}(x_1^2 - x_{-1}^2) &= w_0 x_0 + u_0 h \\
u_0 &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}(x_1 - x_{-1})(x_1 + x_{-1}) - w_0 x_0\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2} w_0 2 x_0 - w_0 x_0\right) \\
u_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Jadi untuk $n = 0$ bentuk kuadratur NCT1 dapat disederhanakan menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) = 2hf(x) + \frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(\xi).$$

Untuk $n = 1$, persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + u_0 f'(x_0)h + u_1 f'(x_1)h. \tag{8}$$

Untuk $f(x) = 1$ dari persamaan (8) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\int_{x_{-1}}^{x_2} 1 \; dx &= w_0 + w_1 \\
x_2 - x_{-1} &= w_0 + w_1.
\end{aligned}$$

Oleh karena $x_2 = x_{-1} + 3h$ maka diperoleh

$$w_0 + w_1 = 3h.$$

Selanjutnya $f(x) = x$, dari persamaan (8) akan menghasilkan

$$\begin{aligned}
\int_{x_{-1}}^{x_2} x dx &= w_0 x_0 + w_1 x_1 + u_0 h + u_1 h \\
\frac{(x_2^2 - x_{-1}^2)}{2} &= w_0 x_0 + w_1 x_1 + u_0 h + u_1 h,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$w_1 + u_0 + u_1 = \frac{3}{2}h.$$

Untuk $f(x) = x^2$ dari persamaan (8) akan menghasilkan

$$\begin{aligned}
\int_{x_{-1}}^{x_2} x^2 dx &= w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + 2u_0 h x_0 + 2u_1 h x_1 \\
\frac{(x_2^3 - x_{-1}^3)}{3} &= w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + 2u_0 h x_0 + 2u_1 h x_1
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$w_1 + 2u_1 = 3h$$

Untuk $f(x) = x^3$ dari persamaan (8) akan menghasilkan

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} x^3 dx = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 + 3u_0 h x_0^2 + 3u_1 h x_1^2$$
$$\frac{(x_2^4 - x_{-1}^4)}{4} = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 + 3u_0 h x_0^2 + 3u_1 h x_1^2$$

diperoleh

$$w_1 = \frac{3}{2}h.$$

Jadi untuk $n = 1$ bentuk kuadratur NCT1 dapat di sederhanakan menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3}{2}h[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{3}{4}h^2[f'(x_0) + f'(x_1)].$$

Untuk $n = 2$ bentuk kuadratur NCT1 dapat disederhanakan menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = h\left[\frac{-16}{15}f(x_0) + \frac{92}{15}f(x_1) - \frac{16}{15}f(x_2)\right] - \frac{28}{15}h^2[f'(x_0) - f'(x_2)].$$

Untuk $n = 3$ bentuk kuadratur NCT1 dapat disederhanakan menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = h\left[-\frac{1245}{224}f(x_0) + \frac{1805}{224}f(x_1) + \frac{1805}{224}f(x_2) - \frac{1245}{224}f(x_3)\right] + h^2\left[-\frac{6605}{2016}f'(x_0) - \frac{1315}{224}f'(x_1) + \frac{1315}{224}f'(x_2) + \frac{6605}{2016}f'(x_3)\right]$$

Untuk $n = 4$ bentuk kuadratur NCT1 dapat disederhanakan menjadi

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = h\left[\frac{-2509}{210}f(x_0) - \frac{757}{105}f(x_1) + \frac{3102}{70}f(x_2) - \frac{757}{105} - \frac{2509}{210}f(x_4)\right] + h^2\left[\frac{-347}{70}f'(x_0) - \frac{773}{35}f'(x_1) + \frac{773}{35}f'(x_3) + \frac{347}{70}f'(x_4)\right]$$

4. CONTOH KOMPUTASI

Beberapa contoh simulasi numerik untuk melihat penggunaan metode NCT1 dalam menghitung integral secara. Simulasi ini menggunakan aplikasi pemrograman MATLAB versi (R11.1). Simulasi akan dilakukan dengan mengambil $n = 0$ sampai dengan $n = 5$ untuk masing-masing contoh.

Contoh 1 Tentukan nilai integral dari $\int_0^2 e^{-x^2} dx$. Solusi eksak untuk Contoh 1 dengan menggunkan integral secara analitik adalah

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} erf(2)\pi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} erf(0)\pi^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.8820813908,\end{aligned}$$

sedangkan solusi dengan uji numerik dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Hasil Uji Numerik Contoh 1 dengan Metode NCT dan NCT1

n	eksak	NCT	eror	NCT1	eror
0	0.8820813908	0.7357588823	16.588322804	0.7357588823	16.588322804
1	0.8820813908	0.8101937038	8.1497793457	0.8101937038	8.1497793457
2	0.8820813908	0.9336803827	5.8496860310	0.8724717332	1.0894298077
3	0.8820813908	0.9336803827	5.8496860310	0.8829081993	0.0937338105
4	0.8820813908	0.9156795005	3.8089579998	0.8820470828	0.0038894370

Contoh 2 Tentukan nilai integrasi dari $\int_0^1 e^x \cos(x)x\ dx$. Secara manual bentuk integral Contoh 2 dapat diselesaikan dengan integral parsial. Misalkan

$$u = e^x \text{ dan } dv = \cos(x), \text{ sehingga } du = e^x dx \text{ dan } v = \sin(x)$$

Selanjutnya integral dihasikan

$$\int_0^1 e^x \cos(x)xdx = e^x \sin(x)|_0^1 - \int_0^1 e^x \sin(x)dx.$$

$$u = e^x \text{ dan } dv = \sin(x)dx \text{ sehingga } du = e^x dx \text{ dan } v = -\cos(x)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x \cos(x)dx &= e^x \sin(x)|_0^1 - \int_0^1 e^x \sin(x)dx \\ &= e^x \sin(x) - \left[e^x(-\cos(x)) - \int_0^1 e^x(-\cos(x))dx\right] \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x)|_0^1 - \int_0^1 e^x \cos(x)dx \\ &= \frac{1}{2}(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)|_0^1) \\ &= \frac{1}{2}(e^x \sin(1) + e^x \cos(1)) - \frac{1}{2}(e^x \sin(0) + e^x \cos(0)) \\ &= 1.3780246135.\end{aligned}$$

Solusi eksak untuk Contoh 2 adalah 1.3780246135, sedangkan solusi dengan uji numerik dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2: Hasil Uji Numerik Contoh 2 dengan Metode NCT dan NCT1

n	eksak	NCT	eror NCT	NCT1	eror NCT1
0	1.3780246135	1.4468890366	4.9973289562	1.4468890366	4.9973289562
1	1.3780246135	1.4247465128	3.3904981697	1.4424053224	4.6719563837
2	1.3780246135	1.3797660035	0.1263685686	1.3780156855	0.0006478839
3	1.3780246135	1.3792324825	0.0876522022	1.3780245444	0.0000050144
4	1.3780246135	1.3780178452	0.0000491161	1.3780246137	0.0000000145

Contoh 3 Tentukan nilai integrasi dari $\int_0^1 x^3 \ln 5x \; dx$. Secara manual bentuk integral Contoh 3 dapat diselesaikan secara analitik dengan integral parsial sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \ln 5x dx &= \left(\frac{x^4}{4}\ln 5x - \frac{x^4}{16}\right)\bigg|_0^1\\ &= \left(\frac{(1)^4}{4}\ln 5(1) - \frac{1}{16}(1)^4\right) - \left(\frac{(0)^4}{4}\ln 5(0) - \frac{1}{16}(0)^4\right)\\ &= 0.3398594781.\end{aligned}$$

Solusi eksak untuk Contoh 3 adalah 0.3398594781, sedangkan solusi dengan uji numerik dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3: Hasil Uji Numerik Contoh 3 dengan Metode NCT dan NCT1

n	eksak	NCT	eror NCT	NCT1	eror NCT1
0	0.3398594781	0.1145363415	66.2989120910	0.1145363415	66.2989120910
1	0.3398594781	0.1878260752	44.7341953796	0.3351890083	1.3742355304
2	0.3398594781	0.3358894615	1.1681347354	0.3396678426	0.0563866575
3	0.3398594781	0.3370529798	0.8257819678	0.3398300712	0.0086526349
4	0.3398594781	0.3397091303	0.0442382122	0.3398518562	0.0022426328

Contoh 4 Tentukan nilai integrasi dari $\int_0^1 \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$. Solusi analitik dari permasalahan ini adalah

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx &= \left(-\frac{x^2 e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} e^{x^2} \right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(-\frac{(1)^2 e^{(1)^2}}{2((1)^2+1)} + \frac{1}{2} e^{(1)^2} \right) - \left(-\frac{(0)^2 e^{(0)^2}}{2((0)^2+1)} + \frac{1}{2} e^{(0)^2} \right) \\ &= 0.17957045711476.\end{aligned}$$

Solusi eksak untuk Contoh 4 adalah 0.17957045711476, sedangkan solusi dengan uji numerik dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4: Hasil Uji Numerik Contoh 4 dengan Metode NCT dan NCT1

n	eksak	NCT	eror NCT	NCT1	eror NCT1
0	0.1795704571	0.1027220333	42.7956942442	0.1027220333	42.7956942442
1	0.1795704571	0.1878260751	28.9942872835	0.1774428312	1.1990486658
2	0.1795704571	0.1777639436	1.0060193419	0.1795039369	0.0374882431
3	0.1795704571	0.1782957761	0.7098500828	0.1795153617	0.0310496624
4	0.1795704571	0.1795120652	0.0325175333	0.1795754950	0.0028391679

Dari Tabel 1 sampai dengan Tabel 4 dapat dilihat perubahan nilai eror pada metode NCT dan metode NCT1. Semakin tinggi nilai orde-n semakin kecil nilai erornya dimana antara metode NCT dan NCT1 perubahan terbaik terjadi pada metode NCT1

DAFTAR PUSTAKA

[1] Brock, B. W. 1992. Generating Functions for Newton-Cotes Formulae Weights and Errors Terms. *Applicable Analysis*, **47**: 103-106.

[2] Burden, R. L. & Faires, J. D. 2011. *Numerical Analysis, Ninth Edition*. Brooks/Cole, Boston.

[3] Burg, C. O. E. & Degny, E. 2013. Derivative-Based Midpoint Quadrature Rule, *Applied Matehmatics*, **4**: 228-234.

[4] Graca, M. M. 2012. A Simple Derivation of Newton-Cotes Formulas with Realistic Errors. *Journal of American Mathematical Society*, **7**: 103-106.

[5] Faires, J. D. *Numerical Method, Third Edition*. Youngstown State Univercity.

[6] Jamei, M, M., Milovanovicb, G. V. & Jafari, M. A. 2013. Closed Expressions for Coefficients in Weight Newton-Cotes Quadratures. *Filomat*, **27(4)**: 649-658.

[7] Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Penerbit Informatika, Bandung.

[8] Zafar, F., Saleem, S. & Burg, C. O. E. 2011. Numerical Algorithms for Newton-Cotes Open Quadrature Formulae. *International Journal of Current Research*, **6**: 9653-9656.

[9] Zafar, F., Saleem, S. & Burg, C. O. E. 2011. New Derivative Based Open Newton-Cotes Quadrature Rules. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**: 1-16.