GERSHGORIN DISK FRAGMENT UNTUK MENENTUKAN DAERAH LETAK NILAI EIGEN PADA SUATU MATRIKS

Anggy S. Mandasary[1*], Zulkarnain[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*Anggy_s_mandasary@yahoo.com

ABSTRACT

Gershgorin disk method is an analytic technique available for determining the location of eigenvalues. In this article, we discuss the method of Gershgorin disk fragment by narrowing the location of eigenvalues obtained using the method of Gershgorin disk. By knowing the narrowed location of eigenvalues, better initial guesses to determine the numerical estimates can be obtained.

Keywords: *Gershgorin disk method, Gershgorin disk fragment, eigenvalues, matrix*

ABSTRAK

Metode *Gershgorin disk* adalah teknik analitik yang tersedia untuk menentukan lokasi nilai eigen. Artikel ini membahas metode *Gershgorin disk fragment*, yang merupakan penyempitan dari lokasi nilai eigen yang diperoleh menggunakan metode *Gershgorin disk*. Dengan diketahuinya lokasi nilai eigen yang lebih sempit, tebakan awal yang lebih baik untuk menentukan taksiran secara numerik dapat diperoleh.

Kata kunci: *Metode Gershgorin disk, Gershgorin disk fragment, nilai eigen, matriks*

1. PENDAHULUAN

Dalam aljabar linear dibahas topik mengenai penentuan nilai eigen [5, h. 35] atau nilai karakteristik [3, h.269] dari suatu matriks yang penerapannya sangat penting di bidang matematika terapan. Penentuan nilai eigen untuk sebarang matriks sulit dilakukan secara analitik, sehingga diperlukan taksiran secara numerik. Hal yang mungkin dilakukan secara analitik adalah penentuan lokasi nilai eigen menggunakan metode *Gershgorin disk*. Metode ini diperkenalkan oleh matematikawan Soviet Semyon Aranovich Gershgorin pada tahun 1931. Metode *Gershgorin disk* [5, h.344] menyatakan bahwa nilai eigen dari suatu matriks $A \in M_n$ terletak pada daerah gabungan (*union*) dari n *disk*, yaitu

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i'(A)\} \equiv G(A),$$

dengan

$$R_i'(A) = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Selanjutnya, daerah nilai eigen yang dimiliki begitu luas, sehingga perlu dipersempit dengan membuang beberapa daerah yang pasti bukan merupakan daerah lokasi nilai eigen berada. Maka, digunakan Metode "*Gershgorin Disk Fragment*" yang dikemukakan oleh Melman [8] dan yang direview di artikel ini. Metode ini bertujuan untuk memperoleh daerah yang semakin spesifik terhadap keberadaan nilai eigen. Ketika daerah spesifik tersebut diperoleh, maka akan memudahkan dalam penentuan tebakan awal untuk perhitungan nilai eigen atau akar suatu polinomial secara numerik.

Pembahasan dimulai dengan memperkenalkan Metode *Gershgorin disk* berikut contohnya dan ilustrasi geometri, kemudian dilanjutkan dengan Metode "*Gershgorin Disk Fragment*" berikut contohnya dan ilustrasi geometri. Terakhir diberikan bentuk sajian matriks kompanion dari suatu polinomial.

2. METODE *GERSHGORIN DISK*

Teorema *Gershgorin disk* [8] menyatakan bahwa nilai-nilai eigen dari $A \in M_n$ terletak pada gabungan dari n *disk*, masing-masing berpusat pada elemen diagonal a_{pp} dari matriks A. Radius (jari-jari) dari setiap *disk* sama dengan mutlak dari jumlah nilai-nilai elemen yang bukan elemen diagonal pada baris ke-p, yaitu

$$R_p'(A) = \sum_{\substack{j=1\\j\neq p}}^{n} |a_{pj}|. \tag{1}$$

Gershgorin disk yang dinotasikan dengan Γ_p^R diberikan oleh

$$\Gamma_p^R(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{pp}| \leq R_p'(A)\}. \tag{2}$$

Teorema 1 [8] Semua nilai-nilai eigen $A \in M_n$ berada pada

$$\bigcup_{p=1}^{n} \Gamma_p^R(A) \equiv \Gamma^R(A). \tag{3}$$

Bukti: Lihat [5, h.344-345] □

Contoh 1 Misalkan diberikan matriks sebagai berikut

$$A_1 = \begin{bmatrix} 14 & i & 0 & 18-2i \\ 0 & 16 & 4+i & 0 \\ 1+i & 4+i & 11 & 0 \\ 14+i & 0 & 1+i & 10 \end{bmatrix}.$$

Tentukan *Gershgorin disk* dan gambarkan daerah *Gershgorin disk* matriks A_1 tersebut.

Penyelesaian: Perhatikan diagonal utama matriks A_1, dengan menggunakan metode *Gershgorin disk* maka diperoleh pusat *disk* sebagai berikut

$$a_{11} = 14, \quad a_{22} = 16, \quad a_{33} = 11, \quad a_{44} = 10.$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh jari-jari *disk*, yaitu

$$\begin{aligned}
R'_1(A_1) &= \sum_{\substack{j=i \\ j\neq 1}}^{n} |a_{1j}| = |i| + |0| + |18 - 2i| = 1 + \sqrt{328}, \\
R'_2(A_1) &= \sum_{\substack{j=i \\ j\neq 2}}^{n} |a_{2j}| = |0| + |4 + i| + |0| = \sqrt{17}, \\
R'_3(A_1) &= \sum_{\substack{j=i \\ j\neq 3}}^{n} |a_{3j}| = |1 + i| + |4 + i| + |0| = \sqrt{2} + \sqrt{17}, \\
R'_4(A_1) &= \sum_{\substack{j=i \\ j\neq 4}}^{n} |a_{4j}| = |14 + i| + |0| + |1 + i| = \sqrt{197} + \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

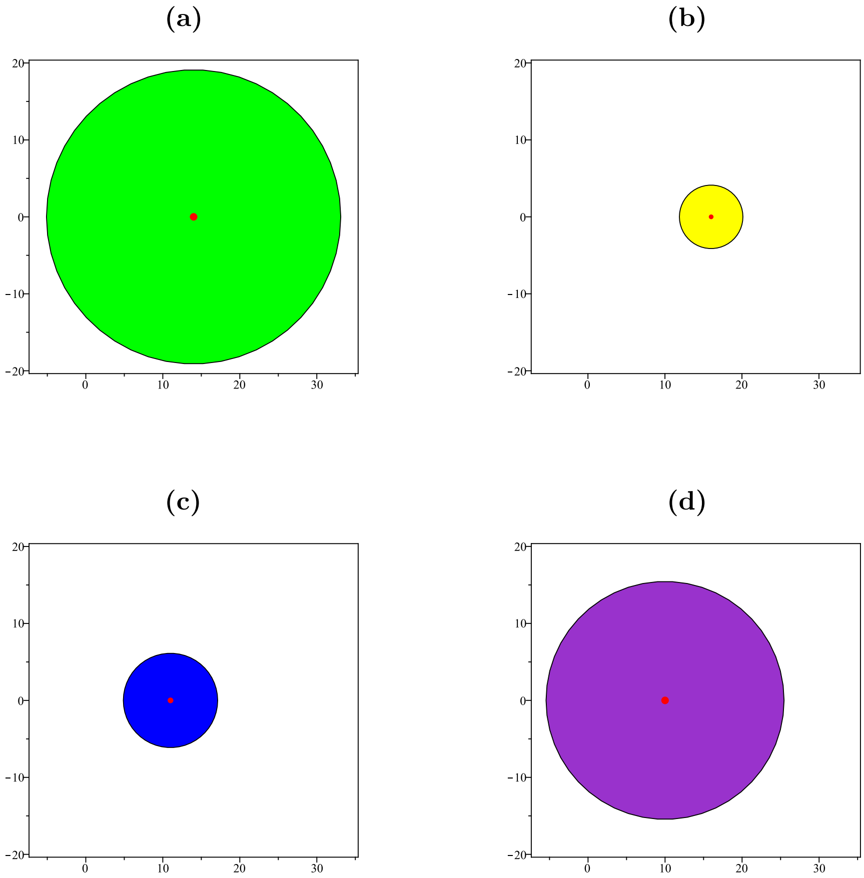
Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2) diperoleh empat *Gershgorin disk*, yaitu

1. $\Gamma_1^R(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{11}| \leq R'_1(A_1)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 14| \leq 1 + \sqrt{328}\}$, yaitu *disk* yang berpusat di (14,0) dan berjari-jari $R'_1(A_1) = 1 + \sqrt{328}$.
2. $\Gamma_2^R(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{22}| \leq R'_2(A_1)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 26| \leq \sqrt{17}\}$, yaitu *disk* yang berpusat di (16,0) dan berjari-jari $R'_2(A_1) = \sqrt{17}$.
3. $\Gamma_3^R(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{33}| \leq R'_3(A_1)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 11| \leq \sqrt{2} + \sqrt{17}\}$, yaitu *disk* yang berpusat di (11,0) dan berjari-jari $R'_3(A_1) = \sqrt{2} + \sqrt{17}$.
4. $\Gamma_4^R(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{44}| \leq R'_4(A_1)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq \sqrt{197} + \sqrt{2}\}$, yaitu *disk* yang berpusat di (10,0) dan berjari-jari $R'_4(A_1) = \sqrt{197} + \sqrt{2}$.

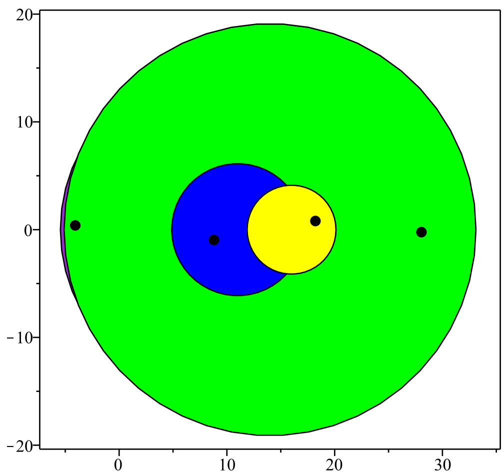
Daerah ini ditunjukkan pada Gambar 1. Matriks A_1 memiliki empat nilai eigen yang dihitung berdasarkan multiplisitasnya (*algebraic multiplicity* [6, h.298]) yang mana dapat dicari dengan Maple, yaitu

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 28.05255011 - 0,2325217889i, \\
\lambda_2 &= 18,21395677 + 0,8017918181i, \\
\lambda_3 &= -4,070741407 + 0,3937083500i, \\
\lambda_4 &= 8,804234527 - 0,9629783792i.
\end{aligned}$$

Untuk menentukan daerah letak nilai eigen matriks A_1, maka gabungan dari keempat *disk* dapat digambarkan sehingga membentuk *union Gershgorin disk*, sebagaimana diberikan Gambar 2.



Gambar 1: Empat *Gershgorin disk* matriks A_1 (a) *Disk* 1 (Γ_1^R), (b) *Disk* 2 (Γ_2^R), (c) *Disk* 3 (Γ_3^R), dan (d) *Disk* 4 (Γ_4^R)



Gambar 2: Gabungan (*union*) dari empat *Gershgorin disk* matriks A_1

3. METODE *GERSHGORIN DISK FRAGMENT*

Asumsikan bahwa λ adalah sebuah nilai eigen dari matriks kompleks $A \in M_n$ yang bersesuaian dengan vektor eigen x, yaitu $Ax = \lambda x$. Panjang vektor Ax dinyatakan dengan *norm* Ax [1, h.100] yang dapat ditulis sebagai $\|Ax\|$. Karena x adalah sebuah vektor eigen, maka akan mempunyai paling sedikit satu komponen yang bukan nol. Untuk menjelaskan hal ini pandang

$$Ax = \lambda x. \tag{4}$$

Jadi, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= \lambda x_3,\\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \quad \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n,
\end{aligned}$$

yang dapat ditulis

$$\lambda x_p = a_{pp}x_p + \sum_{j \neq p} a_{pj}x_j, \quad \text{dengan} \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Misalkan x_p adalah sebuah komponen ke-p dari x dengan nilai mutlak terbesar, maka $|x_p| \geq |x_j|$ untuk $j = 1, 2, ..., n$ dan $x_p \neq 0$. Karena $(Ax)_p = (\lambda x)_p$, maka

$$\begin{aligned}
\lambda x_p &= a_{pp}x_p + \sum_{j \neq p} a_{pj}x_j,\\
\lambda x_p - a_{pp}x_p &= \sum_{j \neq p} a_{pj}x_j,\\
(\lambda - a_{pp})x_p &= \sum_{j \neq p} a_{pj}x_j.
\end{aligned} \tag{5}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga [2, h.42] dan pembagian dengan $|x_p|$ pada persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned}
|\lambda - a_{pp}|\frac{|x_p|}{|x_p|} &\leq \sum_{j \neq p} |a_{pj}|\frac{|x_j|}{|x_p|},\\
|\lambda - a_{pp}| &\leq \sum_{j \neq p} |a_{pj}|\frac{|x_j|}{|x_p|},\\
&\leq \sum_{j \neq p} |a_{pj}|,\\
&= R'_p(A).
\end{aligned}$$

Jadi,

$$|\lambda - a_{pp}| \leq R'_p(A). \tag{6}$$

Dengan demikian, λ berada dalam *disk* dengan pusat a_{pp} dan jari-jari $R'_p(A)$. Untuk mengetahui p yang berhubungan dengan nilai eigen, maka perlu diambil gabungan (*union*) dari semua *disk* untuk memperoleh daerah yang menjamin berisikan semua nilai eigen.

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (4) perhatikan bahwa untuk sembarang $q \neq p$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda x_q &= a_{qp}x_p + a_{qq}x_q + \sum_{j\neq p,q} a_{qj}x_j, \\ a_{qp}x_p &= \lambda x_q - a_{qq}x_q - \sum_{j\neq p,q} a_{qj}x_j, \\ a_{qp}x_p &= (\lambda - a_{qq})x_q - \sum_{j\neq p,q} a_{qj}x_j. \end{aligned} \tag{7}$$

Kemudian, dengan memutlakkan kedua ruas pada persamaan (7) dan dibagi dengan $|x_p|$, diperoleh

$$\begin{aligned} |a_{qp}|\frac{|x_p|}{|x_p|} &\leq |\lambda - a_{qq}|\frac{|x_q|}{|x_p|} + \sum_{j\neq p,q} |a_{qj}|\frac{|x_j|}{|x_p|}, \\ |a_{qp}| &\leq |\lambda - a_{qq}|\frac{|x_q|}{|x_p|} + \sum_{j\neq p,q} |a_{qj}|\frac{|x_j|}{|x_p|}, \\ |a_{qp}| &\leq |\lambda - a_{qq}| + \sum_{j\neq p,q} |a_{qj}|, \end{aligned}$$

karena $\frac{|x_j|}{|x_p|} \leq 1$ untuk $j \neq p$. Maka, diperoleh pertidaksamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{qq}| &\geq |a_{qp}| - \sum_{j\neq p,q} |a_{qj}|, \\ &= |a_{qp}| - \sum_{j\neq q} |a_{qj}| + |a_{qp}|, \\ &= 2|a_{qp}| - R'_q(A). \end{aligned}$$

Jadi,

$$|\lambda - a_{qq}| \geq 2|a_{qp}| - R'_q(A). \tag{8}$$

Pertidaksamaan (8) ini menerangkan bahwa nilai eigen (λ) tidak berada pada suatu *disk* terbuka [9, h.3] dengan pusat di a_{qq} dan mempunyai jari-jari $2|a_{qp}| - R'_q(A)$ yang disebut *exclusion disk*. Perhatikan bahwa *Gershgorin disk* ditentukan oleh baris p, sedangkan *exclusion disk* ditentukan oleh baris q dengan sebuah hubungan khusus untuk a_{qp}, yang mana hal ini akan nontrivial ketika jari-jari bernilai positif.

Exclusion disk ada untuk setiap $q \neq p$. Kemudian, dengan membentuk gabungan *exclusion disk* dan membuang bagian dari *Gershgorin disk*, maka akan memberikan sebuah himpunan inklusi yang lebih kecil yang berkorespondensi pada p. Himpunan ini disebut dengan *Gershgorin disk fragment*.

Definisi 2 (*Exclusion Disk* dan *Gershgorin Disk Fragment*) [8] *Exclusion disk* yang dinotasikan dengan $\triangle_{pq}^{R}$ merupakan *disk* yang berpusat di a_{qq} dan memiliki jari-jari $2|a_{qp}| - R'_q(A)$, dapat ditulis

$$\triangle_{pq}^{R}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{qq}| \geq 2|a_{qp}| - R'_q(A)\}, \tag{9}$$

$$\triangle_{p}^{R}(A) = \bigcup_{\substack{q=1 \\ q\neq p}}^{n} \triangle_{pq}^{R}(A).$$

Gershgorin disk fragment yang dinotasikan dengan Ω_p^R adalah

$$\Omega_p^R(A) = \Gamma_p^R(A) \backslash \triangle_p^R(A). \tag{10}$$

Teorema 3 [8] Semua nilai-nilai eigen dari matriks $A \in M_n$ berada dalam gabungan dari n *disk fragment*

$$\bigcup_{p=1}^{n} \Omega_p^R(A) \equiv \Omega^R(A).$$

Gabungan ini berada dalam himpunan *Gershgorin disk* $\Gamma^R(A)$.

Bukti: Lihat [7, h. 24] □

Contoh 2 Untuk matriks A_1 pada Contoh 1, tentukan *Gershgorin disk fragment* dan gambarkan daerah *Gershgorin disk fragment* matriks A_1 tersebut.

Penyelesaian: Selanjutnya akan ditentukan *exclusion disk* untuk matriks A_1 tersebut. Jari-jari *exclusion disk* diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1: Jari-Jari *Exclusion Disk* Matriks A_1

Jari-jari	p			
	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
r_1	$-\sqrt{17}$	$1-\sqrt{328}$	$-1-\sqrt{328}$	$\sqrt{328}-1$
r_2	$\sqrt{2}-\sqrt{17}$	$\sqrt{17}-\sqrt{2}$	$\sqrt{17}$	$-\sqrt{17}$
r_3	$\sqrt{197}-\sqrt{2}$	$-\sqrt{197}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-\sqrt{197}$	$-\sqrt{2}-\sqrt{17}$

Maka, dengan menggunakan persamaan (9) diperoleh empat *exclusion disk*, yaitu

1. $\triangle^R_{14}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{44}| \geq 2|a_{41}| - R'_4(A_1)\}$
   $\triangle^R_{14}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \geq \sqrt{197} - \sqrt{2}\}$ yaitu *exclusion disk* yang berpusat di (10,0) dan berjari-jari $r = \sqrt{197} - \sqrt{2}$.

2. $\triangle^R_{23}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{33}| \geq 2|a_{32}| - R'_3(A_1)\}$
   $\triangle^R_{23}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 11| \geq \sqrt{17} - \sqrt{2}\}$ yaitu *exclusion disk* yang berpusat di (11,0) dan berjari-jari $r = \sqrt{17} - \sqrt{2}$.

3. $\triangle^R_{32}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{22}| \geq 2|a_{23}| - R'_2(A_1)\}$
   $\triangle^R_{32}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 16| \geq \sqrt{17}\}$ yaitu *exclusion disk* yang berpusat di (16,0) dan berjari-jari $r = \sqrt{17}$.

4. $\triangle^R_{41}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{11}| \geq 2|a_{14}| - R'_1(A_1)\}$
   $\triangle^R_{41}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 14| \geq \sqrt{328} - 1\}$ yaitu *exclusion disk* yang berpusat di (14,0) dan berjari-jari $r = \sqrt{328} - 1$.

Maka, *exclusion disk* dan *Gershgorin disk fragment* matriks A_1 disajikan pada Gambar 3-5.

Pada Teorema *Gershgorin disk* [4, 347-348], Teorema 3 memberikan sebuah kriteria invertibilitas untuk sebuah matriks dimana nol tidak terletak di dalam himpunan inklusi nilai eigen. Untuk Teorema *Gershgorin disk*, hal ini berlaku jika matriks tersebut merupakan matriks yang diagonal dominan sempurna (Teorema Levy-Desplanques [5, h. 302]). Teorema berikut ini memberikan kriteria invertibilitas terkait dengan *Gershgorin disk fragment* dan matriksnya.

Teorema 4 [8] Sebuah matriks $A \in M_n$ adalah nonsingular jika untuk setiap $p = 1, 2, \ldots, n$ berlaku $|a_{pp}| > R'_p(A)$ atau $|a_{qq}| < 2|a_{qp}| - R'_q(A)$ untuk beberapa $q \neq p$.

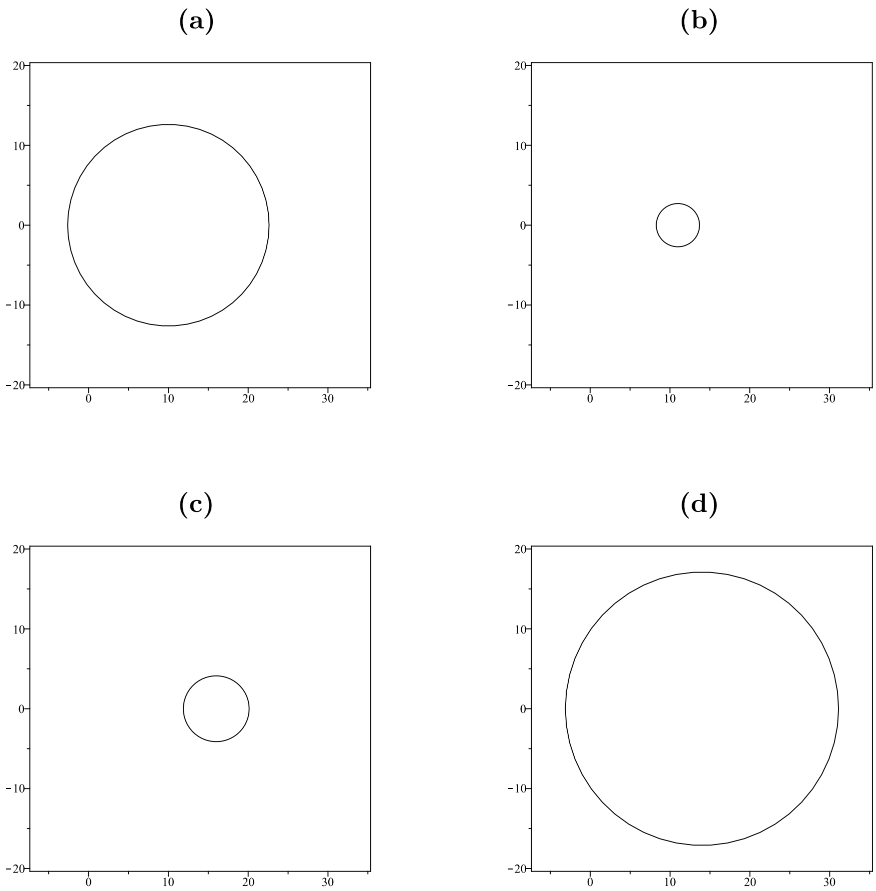
Bukti: Lihat [7, h. 38] $\square$

4. DAERAH LETAK AKAR POLINOMIAL

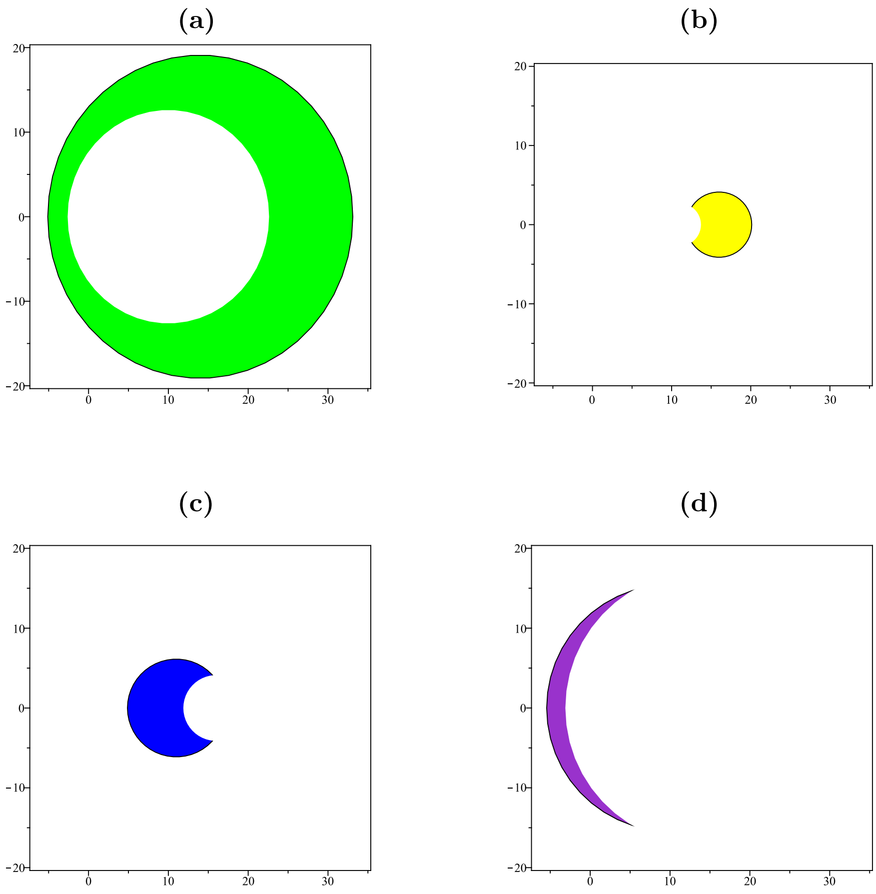
Himpunan inklusi nilai eigen dapat digunakan untuk menentukan lokasi akar suatu polinomial dengan menggunakan matriks sekawan dari suatu persamaan karakteristik [5, h. 146]. Matriks kompanion dari polinomial monik $p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ adalah

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

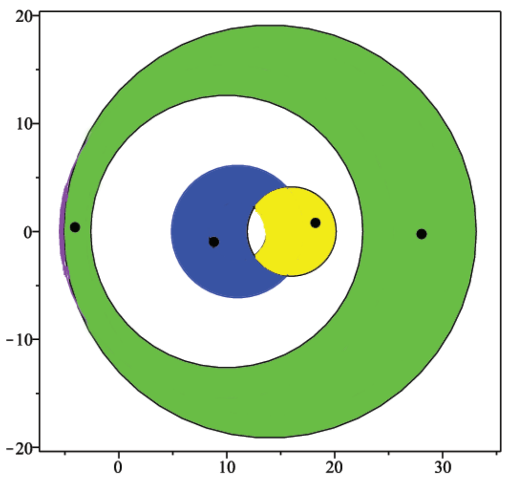
sehingga akar $p(z)$ adalah nilai eigen matriks $C(p)$. Oleh karena itu, *Gershgorin disk fragment* dapat digunakan untuk menentukan lokasi akar suatu polinomial.



Gambar 3: Empat *exclusion disk* matriks A_1(a) *Exclusion Disk* 1, (b) *Exclusion Disk* 2, (c) *Exclusion Disk* 3, dan (d) *Exclusion Disk* 4



Gambar 4: Empat *Gershgorin disk fragment* matriks A_1 (a) *Disk* 1, (b) *Disk* 2, (c) *Disk* 3, dan (d) *Disk* 4



Gambar 5: Gabungan (*union*) dari empat *Gershgorin disk fragment* matriks A_1

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer, Edisi Kelima*. Terj. dari *Elementary Linear Algebra, Fifth Edition*, oleh Silaban, P. and Susila, I.N. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Apostol, T.M. 1967. *Calculus Vol. 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra, Second Edition*. John Wiley and Sons, Inc., United States of America.

[3] Budhi, W.S. 1995. *Aljabar Linear*. Penerbit Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[4] Cheney, W. and Kincaid, D. 2008. *Numerical Mathematics and Computing, Sixth Edition*. Brooks/Cole Publishing, California.

[5] Horn, R.A. and Johnson, C.R. 1988. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Lipschutz, S. and Lipson, M. 2009. *Schaum's Outlines Linear Algebra, Fourth Edition*. McGraw-Hill Companies, United States of America.

[7] Mandasary, A.S. 2015. *Gershgorin Disk Fragment untuk Menentukan Daerah Letak Nilai Eigen pada Suatu Matriks*, Skripsi S1. FMIPA. Universitas Riau, Pekanbaru.

[8] Melman, A. 2010. Gershgorin Disk Fragments. *Math.Mag,* 83: 123–129.

[9] Krantz, S.G. 1999. *Handbook of Complex Variables*. Birkhauser Boston, New York.