MENENTUKAN TURUNAN DAN SIFAT-SIFAT TURUNAN DARI FUNGSI $1/f(x)$ DAN $h(x)/f(x)$

Yuliana Safitri[1*], Sri Gemawati[2], Musraini[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*yuliana.safitri9469@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses n-th derivative function of the term $1/f(x)$ and $h(x)/f(x)$ where $f(x) \neq 0$ by applying the partition numbers of n and n-th derivative of composite function called Faa di Bruno formula. Then we present some properties of n-th derivative function of $1/f(x)$ and $h(x)/f(x)$.

Keywords: *Derivative function, Faa di Bruno formula, Leibniz theorem, partition number*

ABSTRAK

Artikel ini membahas turunan ke-n dari fungsi yang berbentuk $1/f(x)$ and $h(x)/f(x)$ dengan $f(x) \neq 0$ dengan mengaplikasikan partisi bilangan dari n dan turunan ke-n dari fungsi komposisi yang disebut dengan formula Faa di Bruno. Selanjutnya akan ditentukan sifat-sifat dari turunan fungsi $1/f(x)$ and $h(x)/f(x)$.

Kata kunci: *Turunan fungsi, formula Faa di Bruno, Teorema Leibniz, partisi bilangan*

1. PENDAHULUAN

Pada kalkulus, untuk menentukan turunan ke-n dari fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$ dengan menggunakan aturan hasil bagi harus mencari satu per satu turunan pertama, kedua, sampai dengan turunan ke-n dari fungsi tersebut.

Artikel ini membahas tentang turunan ke-n dari fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$ tanpa harus mencari turunan sebelumnya dengan mengaplikasikan partisi bilangan dari n. Selanjutnya dengan memandang pembilang dari turunan ke-n fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$ akan diperoleh sifat-sifatnya. Artikel ini merupakan tinjauan sebagian dari artikel yang ditulis oleh Jakimczuk [3].

2. TEOREMA LEIBNIZ, PARTISI BILANGAN, TEOREMA BINOMIAL, DAN FORMULA FAA DI BRUNO

Teori pendukung yang berkaitan dengan pembahasan mengenai turunan ke-n dari fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$ serta sifat-sifatnya dibahas pada bagian ini.

Teorema 1 [2](**Teorema Leibniz**) Jika f dan g dua fungsi pada x yang memiliki turunan ke-n, maka

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x), \quad (n > 0), \tag{1}$$

dengan $f^{(0)} = f$ dan $g^{(0)} = g$.

Bukti. Lihat [2].

Definisi 2 [1, h. 1] Sebuah partisi dari bilangan bulat positif n adalah barisan hingga dari bilangan bulat positif $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$ dengan p_i adalah bagian dari partisi.

Definisi 3 [1, h. 1] Fungsi partisi $p(n)$ adalah jumlah partisi dari n.

Definisi 4 [1, h. 2] Ω_n dinotasikan sebagai himpunan semua partisi dari n.

Partisi $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ dinotasikan dengan π dan ditulis $\pi \vdash n$ untuk menotasikan "π adalah partisi dari n". Sebuah partisi π dapat juga ditulis dengan $\pi = [1^{\pi_1}, 2^{\pi_2}, \ldots, n^{\pi_n}]$ untuk setiap $i(1 \le i \le n)$ [1]. Banyaknya i yang muncul pada partisi π dari n dinotasikan dengan π_i. Banyaknya bagian-bagian partisi π dinotasikan dengan $\ell(\pi)$ atau $\ell(\pi) = m$ dan $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ merupakan partisi dari $\ell(\pi)$ dan dinotasikan dengan $\delta(\pi)$ [3].

Teorema 5 [4, h. 416](**Teorema Binomial**) Misalkan x dan y adalah bilangan riil dan n adalah bilangan bulat tak negatif, maka

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Bukti. Lihat [4, h. 416].

Definisi 6 [7] Misalkan $\alpha = p_1, p_2, \ldots, p_m$ partisi dari n. simbol $\alpha!$ mewakili perkalian faktorial dari bagian α, $\alpha! = \prod_{i=1}^{m} (p_i)!$. Dengan cara yang sama, notasi $\binom{n}{\alpha}$ digunakan untuk mewakili koefisien multinomial :

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!} = \binom{n}{p_1, p_2, \ldots, p_m}.$$

Teorema 7 [5, h. 807] Misalkan $y = g(u)$ dan $u = f(x)$ memiliki turunan ke-n, maka komposisi fungsi $y = (g \circ f)(x)$ juga memiliki turunan ke-n dan

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in \Omega_n} \frac{n!}{\pi_1! \cdots \pi_n!} (g^{(\ell(\pi))} \circ f)(x) \left(\frac{f'(x)}{1!} \right)^{\pi_1} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right)^{\pi_n},$$

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in \Omega_n} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!} (g^{(\ell(\pi))} \circ f)(x) \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x) \right]^{\pi_i}, \tag{2}$$

dengan Ω_n merupakan himpunan partisi dari n, $\ell(\pi) = \pi_1 + \cdots + \pi_n$, dan $\pi_1 + 2\pi_2 + \cdots + n\pi_n = n$.

Bukti. Lihat [5, h. 807-809].

3. MENENTUKAN TURUNAN DAN SIFAT-SIFAT TURUNAN DARI FUNGSI $1/f(x)$ DAN $h(x)/f(x)$

Teorema 8 Jika $f(x)$ terdiferensialkan pada x dan $f(x) \neq 0$, maka

$$\left(\frac{1}{f} \right)^{(n)}(x) = \frac{P_n}{f^{n+1}(x)}, \quad (n \geq 0), \tag{3}$$

dengan P_n merupakan polinomial dengan koefisien bilangan bulat pada variabel $f(x), f^{(1)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Jika $n = 0$, maka

$$P_0 = 1, \tag{4}$$

dan jika $n \geq 1$, maka

$$P_n = \sum_{\pi \in \Omega_n} (-1)^{\ell(\pi)} \binom{n}{\pi} \binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)} f^{n-\ell(\pi)}(x) \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x) \right]^{\pi_i}. \tag{5}$$

Bukti. Misalkan $g(u) = \frac{1}{u}$, turunan ke-n dari $g(u)$ adalah

$$g^{(n)}(u) = \frac{(-1)^n n!}{u^{n+1}}. \tag{6}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (6) ke persamaan (2), diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f} \right)^{(n)}(x) &= (g \circ f)^{(n)}(x), \\ &= \sum_{\pi \in \Omega_n} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!} (g^{(\ell(\pi))} \circ f)(x) \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x) \right]^{\pi_i}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(x) &= \sum_{\pi\in\Omega_n} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!} \frac{(-1)^{\ell(\pi)}\ell(\pi)!}{f^{\ell(\pi)+1}(x)} \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i}, \\
&= \sum_{\pi\in\Omega_n} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!} \frac{(-1)^{\ell(\pi)}\ell(\pi)!}{f^{n+1}(x)} f^{n-\ell(\pi)}(x) \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i}, \\
\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(x) &= \frac{\sum_{\pi\in\Omega_n} (-1)^{\ell(\pi)} \binom{n}{\pi}\binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)} f^{n-\ell(\pi)}(x) \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i}}{f^{n+1}(x)}, \qquad (7)\\
\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(x) &= \frac{P_n}{f^{n+1}(x)}.
\end{aligned}
$$

Turunan ke-n dari fungsi $1/f(x)$ pada persamaan (3) terbukti. □

Selanjutnya, Misalkan fungsi $f = f(x)$ dan $f = f^{(0)}$. Berdasarkan penguraian polinomial P_n, diperoleh polinomial pertama P_n yaitu

$$
\begin{aligned}
P_1 &= -f^{(1)}(x) = -f^{(1)}, && (8)\\
P_2 &= -f(x)f^{(2)}(x) + 2f^{(1)}(x)f^{(1)}(x) = -ff^{(2)} + 2f^{(1)}f^{(1)}, && (9)\\
P_3 &= -fff^{(3)} + 6ff^{(1)}f^{(2)} - 6f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}, && (10)\\
P_4 &= -ffff^{(4)} + 8fff^{(1)}f^{(3)} + 6fff^{(2)}f^{(2)} - 36ff^{(1)}f^{(1)}f^{(2)} \\
&\quad + 24f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}, && (11)\\
P_5 &= -fffff^{(5)} + 10ffff^{(1)}f^{(4)} - 60fff^{(1)}f^{(1)}f^{(3)} + 20ffff^{(2)}f^{(3)} \\
&\quad - 90fff^{(1)}f^{(2)}f^{(2)} + 240ff^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(2)} \\
&\quad + 120f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}. && (12)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (8), (9), (10), (11), dan (12) dapat diperoleh beberapa sifat-sifat dari polinomial P_n yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 9 Polinomial P_n $(n \geq 1)$ mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. Setiap bentuk monomial pada polinomial P_n, yaitu monomial yang berbentuk $f^{(i_1)}f^{(i_2)}\cdots f^{(i_n)}$ memiliki n faktor dan $i_1+i_2+\cdots+i_n = n$. Jumlah monomial pada polinomial P_n adalah $p(n)$, dengan $p(n)$ adalah jumlah partisi dari n.

2. Jika n genap, maka jumlah koefisien dari polinomial P_n adalah 1 dan jika n ganjil, maka jumlah koefisien dari polinomial P_n adalah -1. Sehingga secara umum jumlah koefisien dari polinomial P_n adalah $(-1)^n$.

3. Jika n genap, koefisien monomial dengan f berjumlah genap adalah positif dan koefisien monomial dengan f berjumlah ganjil adalah negatif. Jika n ganjil, koefisien monomial dengan f berjumlah genap adalah negatif dan koefisien monomial dengan f berjumlah ganjil adalah positif.

4. Jika A_n merupakan jumlah nilai mutlak dari koefisien pada polinomial P_n, yaitu
$$A_n = \sum_{\pi\in\Omega_n} \binom{n}{\pi}\binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)}, \quad (n \geq 1). \qquad (13)$$

Maka rumus berikut terpenuhi ($A_0 = 1$):

$$q(x) = \frac{1}{2 - e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} x^k, \tag{14}$$

dengan A_k ($k \geq 0$) merupakan turunan ke-k dari fungsi $q(x)$ pada $x = 0$ ($A_k = q^{(k)}(0)$). Jari-jari konvergensi pada persamaan (14) adalah $R = \log 2$.

5. Koefisien dari monomial yang berbentuk $f \cdots f f^{(n)}$ adalah -1 dan koefisien dari monomial yang berbetuk $f^{(1)} \cdots f^{(1)}$ adalah $(-1)^n n!$, sehingga $A_n \geq n!$.

Bukti.

1. Berdasarkan persamaan (5), diperoleh banyak faktor dari setiap monomial dari P_n adalah n. Selanjutnya, $f = f^{(0)}$ dan $1^{\pi_1} + \cdots + n^{\pi_n} = n$, maka $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = n$. $p(n)$ adalah jumlah partisi dari n. Sehingga jumlah monomial dari P_n adalah $p(n)$.

2. Misalkan $f(x) = e^x$, sehingga $f^{(i)}(x) = e^x$ dan $f^{(i)}(0) = 1$ untuk semua bilangan bulat $i \geq 0$. Selain itu, ruas kiri persamaan (7) untuk $x = 0$ menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(0) &= \left(\frac{1}{e^x}\right)^{(n)}(0), \\ &= (e^{-x})|_{x=0}, \\ \left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(0) &= (-1)^n. \end{aligned} \tag{15}$$

Selanjutnya, ruas kanan dari persamaan (7) untuk $x = 0$ menjadi

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{\pi \in \Omega_n} (-1)^{\ell(\pi)} \binom{n}{\pi} \binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)} f(0)^{n-\ell(\pi)} \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(0)\right]^{\pi_i}}{(f(0))^{n+1}} \\ &= \sum_{\pi \in \Omega_n} (-1)^{\ell(\pi)} \binom{n}{\pi} \binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Persamaan (16) merupakan jumlah koefisien dari polinomial P_n.

3. Pandang persamaan (5), Terdapat dua kasus untuk nilai n, yaitu
kasus 1 Untuk n genap,

- Jika $\ell(\pi)$ genap, maka $n - \ell(\pi)$ genap. Sehingga banyak faktor f dari monomial berjumlah genap dan koefisien monomial P_n bernilai positif.
- Jika $\ell(\pi)$ ganjil, maka $n - \ell(\pi)$ ganjil. Sehingga banyak faktor f dari monomial berjumlah ganjil dan koefisien polinomial P_n bernilai negatif.

Kasus 2 Untuk n ganjil berlaku sebaliknya.

4. Misalkan $f(x) = 2 - e^x$, maka $f(0) = 1$ dan $f^{(i)}(x) = -e^x$ untuk semua $i > 0$, sehingga untuk $x = 0$ diperoleh $f^{(i)}(0) = -1$. Sehingga ruas kanan pada persamaan (7) untuk $x = 0$ menjadi

$$\frac{\sum_{\pi\in\Omega_n} (-1)^{\ell(\pi)} \binom{n}{\pi} \binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)} f(0)^{n-\ell(\pi)} \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(0)\right]^{\pi_i}}{f(0)^{n+1}} = \sum_{\pi\in\Omega_n} \binom{n}{\pi} \binom{\ell(\pi)}{\delta(\pi)}. \quad (17)$$

Persamaan (17) merupakan A_n. Selanjutnya, ruas kiri dari persamaan (7) untuk $x = 0$ menjadi

$$(g \circ f)^{(n)}(0) = q^{(n)}(0), \quad (18)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (17) dan (18) ke persamaan (7), diperoleh

$$q^{(n)}(0) = A_n. \quad (19)$$

Persamaan (19) mengakibatkan

$$q(x) = (g \circ f)(x) = \frac{1}{2 - e^x},$$
$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} x^k.$$

Selanjutnya, fungsi kompleks $q(z) = 1/(2 - e^z)$ analitik di cakram $|z| < \log 2$ dan jari-jari konvergensi dari persamaan (14) adalah $R = \log 2$ [8, h. 48].

5. Berdasarkan akibat persamaan (5), bagian (5) terbukti.
Sehingga Teorema 9 terbukti. □

Teorema 10 Jika $h(x)$ dan $f(x)$ terdiferensialkan pada x dengan $f(x) \neq 0$, maka turunan ke-n dari fungsi $h(x)/f(x)$, yaitu

$$\left(\frac{h}{f}\right)^{(n)}(x) = \frac{Q_n}{f^{n+1}(x)}, \quad (20)$$

dengan

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) f^{n-k}(x) P_k. \quad (21)$$

Bukti Pandang fungsi $h(x)/f(x)$ sebagai perkalian dari dua fungsi $h(x)$ dan $1/f(x)$, dengan menggunakan Teorema Leibniz dan persamaan (3), maka

$$\begin{aligned}\left(\frac{h}{f}\right)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) \left(\frac{1}{f}\right)^{(k)}(x),\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) \frac{P_k}{f^{k+1}(x)},\\ \left(\frac{h}{f}\right)^{(n)}(x) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) f^{n-k}(x) P_k}{f^{n+1}(x)}.\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (20) terbukti. □

Gunakan persamaan (21), (4), (8), (9), dan (10), maka diperoleh polinomial pertama Q_n yaitu

$$Q_0 = h. \tag{22}$$
$$Q_1 = h^{(1)}f - hf^{(1)}. \tag{23}$$
$$Q_2 = h^{(2)}ff - 2h^{(1)}ff^{(1)} - hff^{(2)} + 2hf^{(1)}f^{(1)}. \tag{24}$$
$$\begin{aligned} Q_3 = {} & h^{(3)}fff - 3h^{(2)}fff^{(1)} - 3h^{(1)}fff^{(2)} + 6h^{(1)}f^{(1)}f^{(1)} - hfff^{(3)} \\ & + 6hff^{(1)}f^{(2)} - 6hf^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Berdasarkan penguraian polinomial Q_n pada persamaan (22), (23), (24), dan (25) diperoleh beberapa sifat-sifat dari polinomial Q_n yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 11 Misalkan diberikan polinomial $Q_n(n \geq 0)$.

1. Jumlah dari koefisien polinomial $Q_n(n \geq 1)$ adalah nol.

2. Jika C_n merupakan jumlah nilai mutlak dari koefisien pada polinomial Q_n, maka

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k, \; (n \geq 0). \tag{26}$$

3. Jika n genap, koefisien monomial dengan f berjumlah genap adalah positif dan koefisien monomial dengan f berjumlah ganjil adalah negatif. Jika n ganjil, koefisien monomial dengan f berjumlah genap adalah negatif dan koefisien monomial dengan f berjumlah ganjil adalah positif.

4. Jika C_n merupakan jumlah dari nilai mutlak dari koefisien pada polinomial Q_n, maka

$$p(x) = \frac{e^x}{2 - e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} x^k, \tag{27}$$

dengan C_k $(k \geq 0)$ merupakan turunan ke-k dari fungsi $p(x) = e^x/(2 - e^x)$ untuk $x = 0$ $(C_k = p^{(k)}(0))$. Jari-jari konvergensi dari persamaan (27) adalah $R = \log 2$.

5. Jika C_n merupakan jumlah nilai mutlak dari koefisien pada polinomial Q_n dan A_n merupakan jumlah nilai mutlak dari koefisien polinomial P_n, maka

$$C_0 = A_0 = 1,$$
$$C_n = 2A_n, \quad (n \geq 1).$$

6. Jika A_n merupakan jumlah nilai mutlak dari koefisien polinomial P_n, maka

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k, \quad (n \geq 1).$$

7. Setiap bentuk monomial pada polinomial Q_n, yaitu monomial dengan bentuk $h^{(i_1)} f^{(i_2)} \cdots f^{(i_{(n+1)})}$ memiliki $(n+1)$ faktor dan $i_1 + i_2 + \cdots + i_{(n+1)} = n$ dengan $h = h^{(0)}$ dan $f = f^{(0)}$. Jumlah monomial pada polinomial Q_n adalah $\sum_{k=0}^{n} p(k)$ dengan $p(k)$ merupakan jumlah dari partisi k $(p(0) = 1)$.

Bukti.

1. Berdasarkan Teorema 9 bagian (2), jumlah koefisien polinomial P_k adalah $(-1)^k$, sehingga jumlah koefisien dari polinomial Q_n berdasarkan persamaan (21) yaitu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \tag{28}$$

berdasarkan Teorema Binomial, persamaan (28) menjadi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k = 0.$$

Sehingga jumlah koefisien dari polinomial Q_n sama dengan nol.

2. Berdasarkan Teorema 9 bagian (4), Jumlah nilai mutlak dari koefisien polinomial P_k adalah A_k, karena C_n adalah jumlah nilai mutlak dari koefisien polinomial Q_n maka

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k.$$

3. Berdasarkan persamaan (21) dan berdasarkan Teorema 9 bagian (3), maka bagian (3) terbukti.

4. Misalkan $f(x) = e^x - 2$, maka $f(0) = -1$, $f^{(n)}(x) = e^x$ $(n \geq 1)$, dan $f^{(n)}(0) = 1$. Selanjutnya , misalkan $h(x) = e^x$, maka $h(0) = 1$, $h^{(n)}(x) = e^x$ $(n \geq 1)$, dan $h^{(n)}(0) = 1$. Oleh karena itu,

$$p(x) = -\frac{h(x)}{f(x)},$$
$$p(x) = -\frac{e^x}{e^x - 2}. \tag{29}$$

Persamaan (21) secara tidak langsung memberikan bahwa persamaan (29) memenuhi $p^{(n)}(0) = C_n$ $(n \geq 0)$. Selanjutnya , fungsi variabel kompleks $p(z) = -e^z/(e^z - 2)$ analitik di cakram $|z| < \log 2$ dan akibatnya jari-jari konvergensi dari persamaan (27) adalah $R = \log 2$ [8].

5. fungsi $q(x)$ pada Teorema 9 bagian (4), yaitu $q(x) = 1/(2-e^x)$ untuk $x = 0$, maka $q(0) = 1$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{e^x}{2-e^x}, \\ &= -1 + 2\left(\frac{1}{2-e^x}\right), \\ p(x) &= -1 + 2q(x), \end{aligned} \tag{30}$$

akibatnya,

$$C_0 = p(0) = q(0) = A_0 = 1.$$

Selanjutnya, turunan ke-n dari persamaan (30), yaitu

$$p^{(n)}(x) = 2q^{(n)}(x) \quad (n \geq 1).$$

Sehingga berdasarkan persamaan (30), Teorema 9 bagian (4), dan Teorema 11 bagian (4), diperoleh

$$C_n = p^{(n)}(0) = 2q^{(n)}(0) = 2A_n \quad (n \geq 1).$$

6. Berdasarkan bagian (2) dan bagian (5), maka diperoleh

$$2A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k, \tag{31}$$

dengan melakukan modifikasi aljabar pada persamaan (31), diperoleh

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k.$$

7. Berdasarkan persamaan (21) dan Teorema 9 bagian (1), sehingga banyaknya faktor dari setiap bentuk monomial dari polinomial Q_n, adalah $n+1$ dan $i_1 + i_2 + \cdots + i_{(n+1)} = n$ dengan $h = h^{(0)}$ dan $f = f^{(0)}$. Jumlah monomial pada polinomial Q_n adalah $\sum_{k=0}^{n} p(k)$ dengan $p(k)$ merupakan jumlah dari partisi k $(p(0) = 1)$.
Teorema 11 terbukti. □

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dikemukakan, maka dapat disimpulkan bahwa dapat ditentukan turunan ke-n dari fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$. Secara umum, dapat diperoleh sifat-sifat dari turunan fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$ dengan menguraikan pembilang dari hasil turunan fungsi tersebut.

Partisi bilangan bulat n sangat berpengaruh untuk menentukan turunan ke-n dari fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$, sehingga perlu ketelitian dalam menetukan partisi dari n. Untuk n yang besar, partisi n akan semakin banyak. Sehingga perlu aplikasi untuk menetukan partisi n sehingga mempermudah menentukan turunan dari fungsi $1/f(x)$ dan $h(x)/f(x)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Andrews, G. E. 1976. *The Theory of Partitions*. Wesley Publishing Company, Pennsylvania.

[2] http://mathematician0.weebly.com/uploads/4/9/1/1/49118391/070_1_successive_differentiation_1.pdf, 01 November 2014. Pk. 11.41,

[3] Jakimczuk, R. 2011. Successives Derivatives and Integer Sequences. *Journal of Integer Sequences*, **14** :1-17.

[4] Rosen, H. K. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, New York.

[5] Roman, S. 1980. The Formula of Faa di Bruno. *The American Mathematical Monthly*, **85** : 805-809.

[6] Stewart, J. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat: Buku 1*. Terj. dari *Calculus, fourth edition*, oleh I Nyoman, S. Erlangga, Jakarta.

[7] Vella. C. D. 2008. Explisit Formulas for Bernoulli and Euler Number. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, **8** : 1-7.

[8] Wilf, H. S. 1994. *Generating functionology*. Academic Press, Philadelphia.