# TEKNIK ITERASI VARIASIONAL DAN BERBAGAI METODE UNTUK PENDEKATAN SOLUSI PERSAMAAN NONLINEAR

**Yeni Cahyati[1*], Agusni[2]**

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya Pekanbaru 28293, Indonesia

*cahyatiy@yahoo.co.id

## ABSTRACT

This article discusses a new iterative method based on the variational iteration technique, which is free from second derivative. This method has two-step in which the first-step is Newton's method. In the discussion three specific cases by choosing certain free functions in a general form of the variational iteration technique are mentioned. Analytically it is shown that the general form of the method is of order three. To see the performance of the method, the comparison with two known methods is also given.

Keywords: *Variational iteration technique, iterative method, order of convergence, Newton's method*

## ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang metode iterasi baru berdasarkan teknik iterasi variasional dan bebas dari turunan kedua. Metode ini merupakan metode dua langkah, dengan langkah pertama metode Newton. Dalam pembahasan diberikan tiga metode iterasi khusus yang diperoleh dengan memilih fungsi bebas yang ada di bentuk umum metode iterasi berdasarkan teknik variasional. Secara analitik ditunjukkan bahwa bentuk umum metode ini mempunyai orde konvergensi tiga. Untuk melihat keunggulan metode yang diusulkan dilakukan perbandingan dengan dua metode iterasi standar yang sudah dikenal.

Kata kunci: *Teknik iterasi variasional, metode iterasi, orde konvergensi, metode Newton*

## 1. PENDAHULUAN

Dalam matematika persoalan solusi dari suatu persamaan sangat perlu diperhatikan. Salah satu persoalannya yang paling sering dijumpai dalam matematika adalah manentukan akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Beberapa metode numerik yang

sering digunakan dalam menentukan suatu persamaan nonlinear adalah metode Newton [2, h. 67]. Dalam perkembangannya metode Newton sering dimodifikasi yang bertujuan untuk mempercepat kekonvergenan dan memperkecil tingkat kesalahannya.

Pada tulisan ini didiskusikan pengembangan yang telah dikemukakan oleh Shah dan Noor [3], yaitu dengan menggunakan teknik iterasi variasional. Prosesnya dimulai dengan memperkenalkan bentuk *fixed point* kemudian memperkenalkan pengali Lagrange. Sajian ini dimulai dengan merumuskan metode iterasi, kemudian penurunan metode baru berdasarkan teknik iterasi variasional dan kekonvergenannya di bagian kedua dan dilanjutkan dibagian ketiga dengan uji perbandingan dengan metode sekelas.

## 2. METODE BARU BERDASARKAN TEKNIK ITERASI VARIASIONAL

Perhatikan bahwa persamaan nonlinear $f(x) = 0$ dapat ditulis dalam bentuk *fixed point*, yaitu

$$\begin{aligned} f(x) &= x - H(x) = 0, \\ x &= H(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Sekarang misalkan $\phi(x)$ adalah fungsi iterasi dengan orde $p \geq 1$, dan $g(x)$ adalah fungsi tambahan, dan definisikan $H(x)$ dengan

$$H(x) = \phi(x) + \lambda(f(x))^p g(x), \tag{2}$$

dalam hal ini $\lambda$ adalah pengali Lagrange.

Untuk menentukan niai $\lambda$, digunaan kritetia optimal dari fungsi $H(x)$, yaitu dengan menurunkan persamaan (2) terhadap $x$, kemudian menyamakan dengan nol, lalu diperoleh

$$\phi'(x) + \lambda \left(p(f(x))^{p-1} f'(x)g(x) + (f(x))^p g'(x)\right) = 0. \tag{3}$$

Dengan menyelesaikan $\lambda$ pada persamaan (3), diperoleh

$$\lambda = -\frac{\phi'(x)}{pf(x)^{p-1} f'(x)g(x) + (f(x))^p g'(x)}. \tag{4}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (2), setelah disederhanaan didapatkan

$$H(x) = \phi(x) - \frac{\phi'(x)f(x)g(x)}{pf'(x)g(x) + f(x)g'(x)}. \tag{5}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5) ke persamaan (1) dihasilkan

$$x = \phi(x) - \frac{\phi'(x)f(x)g(x)}{pf'(x)g(x) + f(x)g'(x)}. \tag{6}$$

Persamaan (6) digunakan untuk membentuk metode iterasi seperti berikut

$$x_{n+1} = \phi(x_n) - \frac{\phi'(x_n)f(x_n)g(x_n)}{pf'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n)}. \tag{7}$$

Persamaan (7) merupakan relasi utama pada teknik iterasi variasional.

Dengan memilih $\phi(x)$ sebuah fungsi iterasi berorde dua, seperti fungsi iterasi Newton [2, h. 67], yaitu

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{8}$$

diperoleh turunannya

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f(x))^2}. \tag{9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (8) dan (9) ke persamaan (7), didapatkan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(f(x_n))^2 g(x_n)f''(x_n)}{(f(x_n))^2\big(2f'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n)\big)}. \tag{10}$$

Selanjutnya persamaan(10) disebut dengan skema iterasi utama dan akan ditinjau dalam tiga kasus fungsi $g(x_n)$ yang berbeda yaitu

1. $g(x_n) = \exp(-\alpha x_n)$,
2. $g(x_n) = \exp\big(-\dfrac{\alpha}{f'(x_n)}\big)$, dan
3. $g(x_n) = \exp\big(-\dfrac{\alpha f(x_n)}{f'(x_n)}\big)$.

Selanjutnya, akan diturunkan metode iterasi variasional untuk ketiga kasus ini berdasarkan skema yang telah didapatkan pada persamaan (10). Untuk

$$g(x_n) = \exp(-\alpha x_n), \tag{11}$$

turunannya terhadap $x_n$ adalah

$$g'(x_n) = -\alpha \exp(-\alpha x_n). \tag{12}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11) dan (12) ke persamaan (10) didapatkan Teknik Iterasi Variasional tipe 1 **(TIV1)** yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{(f'(x_n))^2\big(2f'(x_n) - \alpha f(x_n)\big)}. \tag{13}$$

Untuk kasus yang kedua, yaitu

$$g(x_n) = \exp\big(-\frac{\alpha}{f'(x_n)}\big), \tag{14}$$

turunannya terhadap $x_n$ adalah

$$g'(x_n) = \Big(-\exp\big(-\frac{\alpha}{f'(x_n)}\big)\Big)\frac{\alpha f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}. \tag{15}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (14) dan (15) ke persamaan (10) maka didapatkan Teknik Iterasi Variasional tipe 2 **(TIV2)**, yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(f'(x_n))^2 f''(x_n)}{f'(x_n)\big(2(f'(x_n))^2 - \alpha f''(x_n)f(x_n)\big)} \tag{16}$$

Untuk kasus yang ke tiga,

$$g(x_n) = \exp\big(-\frac{\alpha f(x_n)}{f'(x_n)}\big). \tag{17}$$

Apabila persamaan (17) diturunkan terhadap $x_n$ maka diperoleh

$$g'(x_n) = \frac{\alpha(f''(x_n)f(x_n) - (f'(x_n))^2)}{(f'(x_n))^2}\Big(-\exp\big(\frac{\alpha f(x_n)}{f'(x_n)}\big)\Big). \tag{18}$$

Kemudian dengan mensubstitusaikan persamaan (18) ke persamaan (10), diperoleh Teknik Iterasi Variasional tipe 3 **(TIV3)**, yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{\Big(2(f'(x_n))^3 - \alpha f(x_n)\big((f'(x_n))^2 - f''(x_n)f(x_n)\big)\Big)}. \tag{19}$$

Selanjutnya, turunan kedua pada persamaan (13), (16) dan (19) yang telah diturunkan bedasarkan skema iterasi (10), ditaksir dengan persamaan yang hanya mengandung turunan pertama saja. Hal ini diperoleh dengan melakukan ekspansi Taylor pada $f(y)$ di sekitar $y = x$, sampai orde kedua sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(y) &\approx f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}f''(x) \\ f(y) &= \frac{(f(x))^2 f''(x)}{2(f'(x))^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

dengan

$$y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dengan menyelesaikan persamaan (20) untuk memperoleh nilai $f''(x)$, maka diperoleh

$$f''(x) = \frac{2(f'(x))^2 f(y)}{(f(x))^2}. \tag{21}$$

Dengan mesubstitusikan (21) ke persamaan (13), (16) dan (19), dan menuliskan persamaan-persamaan tersebut dalam dua langkah didapat berturut turut Teknik Iterasi Variasional Baru 1 **(TIVB1)**

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{22}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)}{2f'(x_n) - \alpha f(x_n)}, \tag{23}$$

Teknik Iterasi Variasional Baru 2 **(TIVB2)**

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{24}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)f(y_n)}{f'(x_n)f(x_n) - \alpha f(y_n)}, \tag{25}$$

dan Teknik Iterasi Variasional Baru 3 **(TIVB3)**

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{26}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)}{2f'(x_n) - \alpha\big(f(x_n) - 2f(y_n)\big)}. \tag{27}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan orde konvergensi dari metode metode baru tersebut melalui orde konvergensi persamaan (10), sebagaimana diberikan pada Teorema 1.

**Teorema 1** [Orde Konvergensi] [5] Misalkan $r$ adalah akar sederhana dari fungsi yang terdiferensial secukupnya $f(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pada suatu interval terbuka $I$. Jika $x_0$ cukup dekat ke $r$, maka orde konvergensi dari persamaan (10) adalah tiga dan memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \big(2c_2^2 + \frac{1}{2}c_2\frac{g'(r)}{g(r)} - c_3\big)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{28}$$

**Bukti:** Misalkan $r$ adalah akar sederhana dari $f(x) = 0$ maka $f(r) = 0$, dan $f'(r) \neq 0$. Kemudian dengan melakukan ekspansi Taylor [1], untuk $f(x_n)$ disekitar $x = r$ sampai orde ketiga diperoleh

$$f(x_n) = f(r) + f'(r)\frac{(x_n - r)}{1!} + f''(r)\frac{(x_n - r)^2}{2!} + f^3(r)\frac{(x_n - r)^3}{3!} + O(e_n^4). \tag{29}$$

Karena $f(r) = 0$ dan $e_n = x_n - r$, maka persamaan (29) dapat ditulis menjadi

$$f(x_n) = f'(r)\left(e_n + \frac{f''(r)}{2!f'(r)}e_n^2 + \frac{f'''(r)}{3!f'(r)}e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{30}$$

Misalkan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(r)}{k!f'(r)}$, $k = 2, 3, ...$, maka persamaan (30) menjadi

$$f(x_n) = f'(r)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{31}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama seperti sebelumnya, yaitu menggunakan ekspansi Taylor untuk $f'(x_n)$ disekitar $x = r$, setelah dilakukan penyederhanaan diperoleh

$$f'(x_n) = f'(r)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_+^2O(e_n^3)\right), \tag{32}$$

dan

$$f''(x_n) = f'(r)\left(2c_2 + 6c_3e_n + 12c_4e_n^2 + 20c_5e_n^3) + O(e_n^4)\right). \tag{33}$$

Kemudian dengan membagi persamaan (31) dan (32) menggunakan deret geometri [6, h.689] dan setelah disederhanakan didapatkan

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{34}$$

Selanjutnya, $g(x_n)$ akan diekspansikan di sekitar $x = r$ sehingga didapatkan

$$g(x_n) = g(r) + g'(r)\frac{(x_n - r)}{1!} + g''(r)\frac{(x_n - r)^2}{2!} + g'''(r)\frac{(x_n - r)^3}{3!}O(e_n^4). \tag{35}$$

Karena $e_n = x_n - r$, maka persamaan (35) dapat ditulis menjadi

$$g(x_n) = g(r) + g'(r)e_n + g''(r)\frac{e_n^2}{2!} + g'''(r)\frac{e_n^3}{3!} + O(e_n^4), \tag{36}$$

Selanjutnya dihitung nilai $(f(x_n))^2g(x_n)f''(x_n)$ yang merupakan nilai pembilang dari persamaan (10), dan setelah disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}(f(x_n))^2g(x_n)f''(x_n) =& ((2c_2g'(r) + 4c_2^2g(r) + 6c_3g(r))e_n^3 + 2e_n^2c_2g(r) \\ &+ O(e_n^4))f'''(r).\end{aligned} \tag{37}$$

Selanjutnya, didapatkan nilai penyebut dari persamaan (10) sebagai berikut

$$\begin{aligned}(f'(x_n))^2\big(2f'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n)\big) &= (f'(r))^3\big(2g(r) + (3g'(r) + 12c_2g(r))e_n \\ &+ (2g''(r) + 18c_3g(r) + 2g''(r) + 17c_2g'(r) + 18c_3g(r))e_n^2 + (\frac{5}{6}g'''(r) \\ &+ 24c_4g(r) + 16c_2^3g(r) + 72c_2c_3g(r) + 32c_2^2g'(r) + 11c_2g''(r))e_n^3 + O(e_n^4)\big).\end{aligned} \tag{38}$$

Setelah didapatkan nilai pembilang dan penyebut dari persamaan (10), maka persamaan (10) dapat dihitung menggunakan formula deret geometri dan setelah disederhanakan menjadi

$$\frac{(f(x_n))^2g(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2(2f'(x_n)g(x_n) + f(x_n)g'(x_n))} = c_2e_n^2 + \big(3c_3 - \frac{1}{2}c_2\frac{g'(r)}{g(r)} - 4c_2^2\big)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{39}$$

Karena nilai dari $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ telah diketahui sebelumnya pada persamaan (34), dan nilai $e_n = x_n - r$ maka persamaan error dari skema iterasi (10) menjadi

$$e_{n+1} = \big(2c_2^2 + \frac{1}{2}c_2\frac{g'(r)}{g(r)} - c_3\big)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad \square$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (28), terbukti bahwa persamaan (10) memiliki orde konvergensi tiga. Metode yang diturunkan dari skema iterasi ini yaitu TIVB1, TIVB2, dan TIVB3 memiliki orde konvergensi yang sama yaitu tiga.

## 3. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar persamaan antara metode Newton (CN), metode Noor (KN)[4], Teknik Iterasi Variasional Baru 1 (TIVB1), Teknik Iterasi Variasional Baru 2 (TIVB2), dan Teknik Iterasi Variasional Baru 3 (TIVB3), dengan menggunakan fungsi uji sebagai berikut

1. $f_1(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$,
2. $f_2(x) = x^3 - 10$,
3. $f_3(x) = (x-1)^2 - 1$.

Untuk menentukan solusi numerik dari contoh-contoh fungsi nonlinear di atas digunakan program Maple 13. Dalam menemukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk semua metode, yaitu jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan, atau jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan, atau jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi. Dalam hal ini dipilih nilai $\alpha = 1$ pada metode TIVB1, TIVB2, dan TIVB3.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

| Metode | $n$ | $x_n$ | $\lvert f(x_n)\rvert$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$, $x_0 = 1.0$ | | | | |
| MN | 5 | 1.4050383953715131 | $0.0000e+00$ | $5.8246e-31$ |
| KN | 6 | 1.4044916482153412 | $0.0000e+00$ | $2.1919e-31$ |
| TIVB1 | 3 | 1.4044916482153412 | $0.0000e+00$ | $2.1236e-30$ |
| TIVB2 | 3 | 1.4044916482153412 | $5.5095e-27$ | $1.1458e-09$ |
| TIVB3 | 3 | 1.4044916482153412 | $8.9476e-30$ | $1.6274e-10$ |

| Metode | $n$ | $x_n$ | $\lvert f(x_n)\rvert$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_2(x)$, $x_0 = 1.5$ | | | | |
| MN | 7 | 2.1544346900318837 | $1.6931e-46$ | $5.1181e-24$ |
| KN | 8 | 2.1544346900318837 | $4.8463e-41$ | $2.9884e-21$ |
| TIVB1 | 5 | 2.1544346900318837 | $1.0000e-58$ | $1.4643e-27$ |
| TIVB2 | 4 | 2.1544346900318837 | $3.8074e-42$ | $8.6987e-15$ |
| TIVB3 | 4 | 2.1544346900318837 | $2.8037e-18$ | $1.0042e-06$ |
| $f_3(x)$, $x_0 = 3.5$ | | | | |
| MN | 7 | 2.0000000000000000 | $3.1698e-47$ | $5.6301e-24$ |
| KN | 7 | 2.0000000000000000 | $4.0000e-59$ | $5.2595e-30$ |
| TIVB1 | 4 | 2.0000000000000000 | $5.4000e-58$ | $1.0275e-19$ |
| TIVB2 | 4 | 2.0000000000000000 | $4.6706e-25$ | $8.5396e-09$ |
| TIVB3 | 4 | 2.0000000000000000 | $1.1466e-45$ | $1.3187e-15$ |

Dalam Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai tebakan awal berpengaruh cukup besar pada semua metode. Namun pada TIVB1, TIVB2, dan TIVB3 nilai tebakan awal tidak terlalu mengakibatkan bertambah atau berkurangnya jumlah iterasi. Namun secara keseluruhan berdasarkan Tabel 1 metode TIVB1, TIVB2, dan TIVB3 memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dan lebih efisien dibandingkan dengan metode lain. Oleh karena itu metode metode baru ini dapat dijadikan metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan nonlinear.

**Ucapan Terimakasih** Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. & R. S. Donald. 1999. *Introduction to Real Analysis*, Third Edition. John Willey & Sons, Inc. New York.

[2] Burden, R. & J. D. Faires. 2011. *Numerical Analysis, $9^{th}$ Ed.* Brooks Cole, New York.

[3] Shah, F. A. & M. A. Noor. 2014. Variational Iteration Technique and some Methods for Solving Nonlinear Equation. *Applied Mathematics and Information Letters*. **3**(2014): 85-93.

[4] Noor, M. A. 2007. New Family of Iterative Methods for Nonlinear Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **190**: 553-558.

[5] Sharma, J. R. & R.K. Guha. 2011. Some Modified Newton Methods With fourth-Order Convergence. *Advance in Science Research*, **2**: 240-247.

[6] Stewart, J. 2010. *Calculus Early Transcedentals*. $6^{th}$ Ed. Diterjemahkan oleh Sungkuno. C. Salemba Teknika. Jakarta.