SKEMA NUMERIK UNTUK MEMPEROLEH SOLUSI TAKSIRAN DARI KELAS PERSAMAAN INTEGRAL FREDHOLM NONLINEAR JENIS KEDUA

Vanny Restu Aji[1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*vannyrestuaji@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses a numerical scheme to obtain an estimated solution for a class of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. The process includes discretization, followed by checking the convergence of estimated solutions. If the convergence conditions are met, then the calculation of the discrete estimated solution for a class nonlinear Fredholm integral equation of the second kind is performed. To see the implementation of the method, some numerical examples are given at the end.

Keywords: *Nonlinear Fredholm integral equations, discretization with convergence condition.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas suatu skema numerik untuk memperoleh solusi taksiran dari kelas persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua. Prosesnya meliputi pendiskritisasian, kemudian dilanjutkan dengan memeriksa kekonvergenan solusi taksiran. Apabila syarat kekonvergenan terpenuhi, maka dilakukan perhitungan solusi taksiran bentuk diskrit persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua. Untuk melihat implementasi metode yang didiskusikan dibagian akhir diberikan beberapa contoh komputasi.

Kata kunci: *Persamaan integral Fredholm nonlinear, diskritisasi dengan syarat konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan mencari solusi persamaan integral sering ditemukan dalam ilmu matematika. Banyak persamaan integral yang mudah ditentukan solusinya, tetapi tidak sedikit juga yang rumit untuk mencari solusinya, Seperti mancari solusi untuk persamaan integral Fredholm. Persamaan integral Fredholm sendiri terbagi menjadi dua bentuk yaitu linear dan nonlinear, yang masing-masing terdiri dari jenis pertama dan jenis kedua. Adapun metode-metode yang digunakan untuk mencari solusi persamaan integral Fredholm linear adalah metode Dekomposisi Adomian, metode *Successive Approximation*, metode *Direct Computation*, dan lainnya yang dapat ditemukan di [1, h. 121]. Sedangkan untuk mencari solusi dari persamaan integral Fredholm nonlinear baik jenis pertama maupun jenis kedua memerlukan perhitungan yang rumit sehingga penulis lebih tertarik membahas tentang persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua. Artikel ini merupakan review dari artikel yang berjudul *"A numerical scheme for a class of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind"* oleh Akbar H. Borzabadi , Omid S. Fard.

Selanjutnya akan dibahas skema numerik untuk memperoleh solusi taksiran dari kelas persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua, kemudian dilanjutkan dengan memberikan contoh numerik.

2. SKEMA NUMERIK UNTUK MEMPEROLEH SOLUSI TAKSIRAN DARI KELAS PERSAMAAN INTEGRAL FREDHOLM NONLINEAR JENIS KEDUA

Pada langkah pertama pandang bentuk persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua berikut

$$x(s) = y(s) + \int_a^b k(s,t,x(t))dt, \quad \text{pada } [a,b]. \tag{1}$$

dan misalkan s adalah sebuah partisi berjarak sama pada $[a,b]$ yaitu $\{a{=}s_0,\ s_1,\cdots,\ s_{n-1},\ s_n{=}b\}$ dimana $\Delta s = s_{i+1} - s_i, i = 0, 1, \cdots, n$ merupakan lebar partisi. Jika $x^*(t)$ adalah solusi analitik dari (1), dengan menggunakan partisi s di $[a,b]$ maka persamaan (1) menjadi

$$x^*(s_i) = y(s_i) + \int_a^b k(s_i,t,x^*(t))dt, \quad i = 0,1,\cdots,n. \tag{2}$$

Interval $[a,b]$ dipartisi menjadi $\{a = t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ dengan $\Delta t = t_{j+1} - t_j$. Taksir persamaan (2) dengan penjumlahan Riemann [4, h. 367] sehingga diperoleh bentuk diskrit dari persamaan (1) yaitu

$$x_i^* = y_i + \sum_{j=0}^{n} k(s_i,t_j,x_j^*(t))\Delta t + O(\Delta t), \quad i = 0,1,\cdots,n, \tag{3}$$

dimana $x_i^* = x^*(s_i)$, $y_i = y(s_i)$ dan suatu error $O(\Delta t)$. Suatu persamaan nonlinear yang diperoleh dengan mengabaikkan error pada persamaan (2) yaitu

$$\xi_i = y_i + \sum_{j=0}^{n} k(s_i,t_j,\xi_j)\Delta t, \quad i = 0,1,\cdots,n, \tag{4}$$

memiliki solusi n-tupel $(\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_n^*)$ dan mensubtitusikannya ke persamaan (4) dipeoleh

$$\xi_i^* = y_i + \sum_{j=0}^{n} k(s_i,t_j,\xi_j^*)\Delta t, \quad i = 0,1,\cdots,n. \tag{5}$$

Langkah kedua akan dicari syarat kekonvergenan berupa $\left\|\vec{x^*} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty$ dengan $\vec{x^*}$ dan $\vec{\xi^*}$ adalah vektor-vektor berikut:

$$\vec{x^*} = (x_0^*, x_1^*, \cdots, x_n^*)^T,\ \vec{\xi^*} = (\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_n^*)^T.$$

Proposisi 1 Misalkan,

(i) $k(s,t,x(s)) \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b] \times \mathbf{R})$

(ii) $k_x(s,t,x(s))$ berada di $([a,b] \times [a,b] \times \mathbf{R})$ dan $\gamma < \dfrac{1}{b-a}$, dimana

$$\gamma = \sup_{s,t\in[a,b]} |k_x(s,t,x(s))|,$$

maka

$$\left\|\vec{x^*} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty \leq \frac{|O(\Delta t)|}{1-\gamma(b-a)}. \tag{6}$$

Bukti.

Misalkan

$$\left\|\vec{x^*} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty = \max_{0\leq i\leq n} |x_i^* - \xi_i^*| = \left|x_p^* - \xi_p^*\right|,$$

dimana $0 \leq p \leq n$. Eliminasi (3) dan (5) untuk $i = p$ diperoleh

$$x_p^* - \xi_p^* = \sum_{j=0}^{n} (k(s_p,t_j,x_j^*) - k(s_p,t_j,\xi_j^*))\Delta t + O(\Delta t). \tag{7}$$

Dengan menerapkan teorema nilai rata-rata [4, h. 262] maka bentuk $k(s_p,t_j,x_j^*) - k(s_p,t_j,\xi_j^*)$ dapat diubah menjadi

$$k(s_p,t_j,x_j^*) - k(s_p,t_j,\xi_j^*) = \frac{\partial k}{\partial x}(s_p,t_j,\eta_j)(x_j^* - \xi_j^*), \quad j = 0,1,\cdots,n, \tag{8}$$

dimana η_j merupakan suatu bilangan real antara x_j^* dan ξ_j^*. Dengan mensubtitusikan (8) dan menerapkan aturan nilai mutlak ke persamaan (7) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left|x_p^* - \xi_p^*\right| &\leq \sum_{j=0}^{n} \left|\frac{\partial k}{\partial x}(s_p,t_j,\eta_j)\right| \left|x_j^* - \xi_j^*\right| |\Delta t| + |O(\Delta t)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \left|\frac{\partial k}{\partial x}(s_p,t_p,\eta_p)\right| \left|x_j^* - \xi_j^*\right| |\Delta t| + |O(\Delta t)|, \end{aligned} \tag{9}$$

berdasarkan hipotesis (ii) pada Proposisi 1 yaitu

$$\gamma = \sup_{s,t\in[a,b]} |k_x(s,t,x(s))| = \left|\frac{\partial k}{\partial x}(s_p,t_p,\eta_p)\right|,$$

sehingga persamaan (9) menjadi

$$\left|x_p^* - \xi_p^*\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \gamma \left|x_j^* - \xi_j^*\right| |\Delta t| + |O(\Delta t)| \,. \tag{10}$$

Dengan bentuk $\left|x_j^* - \xi_j^*\right| \leq \left|x_p^* - \xi_p^*\right|$ untuk $j = 0, 1, \cdots, n$, maka persamaan (10) menjadi

$$\left|x_p^* - \xi_p^*\right| \leq \frac{|O(\Delta t)|}{1 - \gamma \sum_{j=0}^{n} \Delta t}, \tag{11}$$

menggunakan $\sum_{j=0}^{n} \Delta t = b - a$ untuk persamaan (11) didapatkan

$$\left|x_p^* - \xi_p^*\right| \leq \frac{|O(\Delta t)|}{1 - \gamma(b-a)}, \tag{12}$$

serta mengubah bentuk $\left|x_p^* - \xi_p^*\right| = \left\|\vec{x^*} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty$ untuk persamaan (12) sehingga

$$\left|x_p^* - \xi_p^*\right| = \left\|\vec{x^*} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty \leq \frac{|O(\Delta t)|}{1 - \gamma(b-a)}. \quad \blacksquare \tag{13}$$

Persamaan (13) mengarah ke akibat

Akibat 2 $\left\|\vec{x^*} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty \to 0$ ketika $O(\Delta t) \to 0$.

Langkah ketiga dilakukan perhitungan taksiran solusi dari bentuk diskrit persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua. Persamaan (4) akan ditaksir solusinya dengan sebuah metode *Successive-Subtitution*. Metode *Successive-Subtitution* adalah proses iterasi untuk memperoleh solusi hampiran iterasi selanjutnya yaitu iterasi ke (k+1) digunakan iterasi sebelumnya yaitu iterasi ke (k) untuk $k = 0, 1, \cdots, N$. Proses iterasi pada metode *Successive-Subtitution* mirip dengan proses iterasi pada metode Gauss-Seidel [3, h. 454]. Sehingga persamaan (4) menjadi

$$\xi_i^{(k+1)} = y_i + \sum_{j=0}^{n} k(s_i, t_j, \xi_j^{(k)})\Delta t, \quad i = 0, 1, \cdots, n, \quad k = 0, 1, \cdots . \tag{14}$$

Dengan mengambil tebakan awal berupa $\vec{\xi}^{(0)}$. Syarat kekonvergensian barisan $\vec{\xi}^{(k)}$ akan dibuktikan pada Teorema 3.

Teorema 3 Dengan memperhatikan asumsi pada Proposisi 1, barisan hasil $\vec{\xi}^{(k)}$ dari proses iterasi (14) akan menuju ke solusi eksak dari (4) yakni $\vec{\xi^*}$, untuk sembarang vektor awal $\vec{\xi}^{(0)}$.

Bukti.

Misalkan

$$\left\|\vec{\xi}^{(k)} - \vec{\xi}^{*}\right\|_{\infty} = \max_{0\le i\le n}\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{*}\right| = \left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^{*}\right|.$$

Dengan mengeliminasi (14) dan (5) diperoleh

$$\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{*} = \sum_{j=0}^{n}(k(s_i, t_j, \xi_j^{(k)}) - k(s_i, t_j, \xi_j^{*}))\Delta t. \tag{15}$$

Menggunakan teorema nilai rata-rata maka bentuk $k(s_i, t_j, \xi_j^{(k)}) - k(s_i, t_j, \xi_j^{*})$ dapat diubah menjadi

$$k(s_i, t_j, \xi_j^{(k)}) - k(s_i, t_j, \xi_j^{*}) = \frac{\partial k}{\partial x}(s_i, t_j, \eta_j^{(k)})(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{*}), \tag{16}$$

subtitusikan (16) ke persamaan (15) diperoleh

$$\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{*} = \sum_{j=0}^{n}(\frac{\partial k}{\partial x}(s_i, t_j, \eta_j^{(k)})(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{*}))\Delta t, \tag{17}$$

dimana $\eta_j^{(k)}$ merupakan sebuah bilangan real diantara $\xi_j^{(k)}$ dan ξ_j^{*}. Dengan menerapkan aturan nilai mutlak maka persamaan (17) menjadi

$$\begin{aligned} \left|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{*}\right| &\le \sum_{j=0}^{n}\left|\frac{\partial k}{\partial x}(s_i, t_j, \eta_j^{(k)})\right|\left|\xi_j^{(k)} - \xi_j^{*}\right||\Delta t| \\ &\le \sum_{j=0}^{n}\left|\frac{\partial k}{\partial x}(s_i, t_j, \eta_j^{(k)})\right|\left|\xi_j^{(k)} - \xi_j^{*}\right||\Delta t|. \end{aligned} \tag{18}$$

Dengan memisalkan bahwa hipotesis (ii) pada Proposisi 1 telah terpenuhi sehingga

$$\gamma = \sup_{s,t\in[a,b]}|k_x(s, t, x(s))| = \left|\frac{\partial k}{\partial x}(s_p, t_p, \eta_p^{(k)})\right|,$$

maka persamaan (18) menjadi

$$\left|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{*}\right| \le \sum_{j=0}^{n}\gamma\left|\xi_j^{(k)} - \xi_j^{*}\right||\Delta t|. \tag{19}$$

Misalkan $\left|\xi_j^{(k)} - \xi_j^{*}\right| \le \left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^{*}\right|$ maka persamaan (19) menjadi

$$\left|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{*}\right| \le \gamma\left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^{*}\right|\sum_{j=0}^{n}\Delta t. \tag{20}$$

Karena pada setiap formula penjumlahan Riemann $\sum_{j=0}^{n}\Delta t = b - a$, maka persamaan (20) menjadi

$$\left|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{*}\right| \le \gamma\left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^{*}\right|(b - a). \tag{21}$$

Menggunakan bentuk

$$\left|\xi_j^{(k)} - \xi_j^*\right| \leq \left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^*\right| = \left\|\vec{\xi}^{(k)} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty$$

dan

$$\left\|\vec{\xi}^{(k+1)} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty \in \left|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^*\right|,$$

serta menetapkan $\lambda = \gamma(b-a)$ dimana $0 < \lambda < 1$, maka persamaan (21) menjadi

$$\begin{aligned} \left|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^*\right| &\leq \gamma \left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^*\right| (b-a) \\ &\leq \lambda \left|\xi_p^{(k)} - \xi_p^*\right| \\ \left\|\vec{\xi}^{(k+1)} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty &\leq \lambda \left\|\vec{\xi}^{(k)} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty . \end{aligned} \tag{22}$$

Untuk $k = 0, 1, \cdots, N$, diperoleh

$$\left\|\vec{\xi}^{(k+1)} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty \leq \lambda^{(k+1)} \left\|\vec{\xi}^{(0)} - \vec{\xi^*}\right\|_\infty . \tag{23}$$

Karena $0 < \lambda < 1$, $k \to +\infty$ mengimplikasikan bahwa $\left\|\xi^{(k+1)} - \xi^*\right\|_\infty \to 0$. Proses iterasi persamaan akan diperoleh dengan syarat

$$\left\|\vec{\xi}^{(k+1)} - \vec{\xi}^{(k)}\right\|_\infty < \epsilon,$$

untuk $\epsilon > 0$. ■

3. SIMULASI NUMERIK

Misalkan $x^*(s)$ adalah solusi eksak dari persamaan integral Fredholm nonlinear (1) dan $\hat{\xi}_i$ adalah solusi yang diperoleh dengan menggunakan algoritma yang diberikan dengan $\epsilon > 0$ dan partisi $[a, b]$. Untuk membandingkan solusinya definisikan fungsi error diskrit

$$e_\Delta(s_i) = x^*(s_i) - \hat{\xi}_i(s_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

Contoh 1 Tentukanlah solusi taksiran dari persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua berikut

$$x(s) = \sin(s) - \frac{s}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} tsx(t)dt, \tag{24}$$

dengan solusi analitik $x(t) = \sin(t)$ dan tetapkan $\epsilon = 10^{-6}$ serta $\Delta s = \Delta t = \frac{1}{100}$.
Solusi
Partisi batas $[0, \frac{\pi}{2}]$ menjadi $[s_0{=}t_0{=}0, s_1{=}t_1{=}\frac{1}{100}, s_2{=}t_2{=}\frac{2}{100}, \cdots, \frac{\pi}{2}{=}s_{100}{=}t_{100}]$. Subtitusikan nilai partisi s_i ke solusi eksak persamaan (24) dan taksir bagian integralnya menggunakan penjumlahan Riemann diperoleh

$$x_i^* = \sin(s_i) - \frac{s_i}{4} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{100} t_j s_i x_j^*(t)\Delta t + O(\Delta t). \tag{25}$$

Apabila error pada persamaan (24) diabaikkan maka akan menjadi

$$\xi_i = \sin(s_i) - \frac{s_i}{4} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{100} t_j s_i \xi_j \Delta t. \tag{26}$$

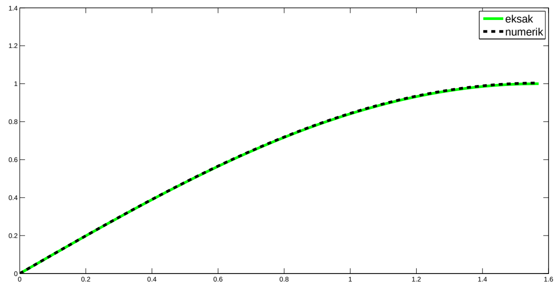
Selanjutnya dilihat terlebih syarat yang menjamin kekonvergensian solusi bentuk diskrit integral Fredholm nonlinear jenis kedua ke solusi eksaknya dengan menggunakan Proposisi 1 sehingga

$$\begin{aligned} \sup_{s,t\in[a,b]} |k_x(s,t,x(t))| &< \frac{1}{b-a} \\ \sup_{s,t\in[a,b]} |ts| &< \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \tag{27}$$

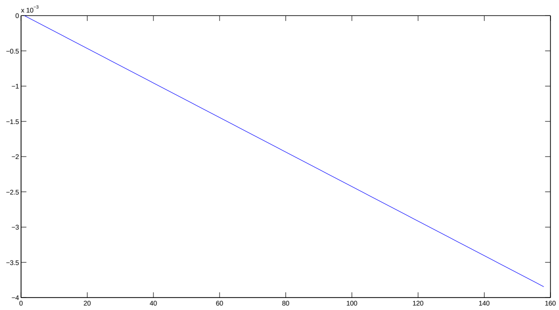
Karena hasil (27) tidak tergantung pada $x(t)$, maka syarat pada Proposisi 1 akan terpenuhi untuk semua nilai pada interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Selanjutnya akan dilakukan proses itersi dengan metode *Successive-Subtitution* dengan mengambil tebakan awal awal $\vec{\xi}^{(0)} = \mathbf{0}$ menggunakan

$$\xi_i^{(k+1)} = \sin(s_i) - \frac{s_i}{4} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{100} t_j s_i \xi_j^{(k)} \Delta t, \tag{28}$$

sehingga dapat dibandingkan solusi eksak dan taksiran dari persamaan integral Fredholm nonlinear Contoh 1 pada Gambar 1 dan errornya pada Gambar 2.



Gambar 1: Kurva titik memperlihatkan solusi taksiran dan kurva kontinu memperlihatkan solusi eksak Contoh 1.



Gambar 2: Kurva error Contoh 1.

Contoh 2 Akan dihitung solusi taksiran dari persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua berikut

$$x(s) = e^{(s)} - \frac{e^{s+2}}{s+2} + \frac{1}{s+2} + \int_0^1 e^{ts}x^2(t)dt, \tag{29}$$

dengan solusi analitik $x(t)$=exp(t) dan tetapkan $\epsilon = 10^{-6}$ serta $\Delta s = \Delta t = \frac{1}{1000}$.

Solusi

Partisi batas [0,1] menjadi [s_0=t_0=0,s_1=t_1=$\frac{1}{1000}$,s_2=t_2=$\frac{2}{1000}$, $\cdots$,1=s_{1000}=t_{1000}]. Subtitusikan nilai partisi s_i ke solusi eksak persamaan (29) dan taksir bagian integralnya menggunakan penjumlahan Riemann diperoleh

$$x_i^* = e^{(s_i)} - \frac{e^{s_i+2}}{s_i+2} + \frac{1}{s_i+2} + \sum_{j=0}^{1000} e^{t_j s_i}(x_j^*(t))^2\Delta t + O(\Delta t). \tag{30}$$

Akan dilihat terlebih dahulu syarat yang menjamin kekonvergensian solusi bentuk diskrit integral Fredholm nonlinear jenis kedua (29) ke solusi eksaknya dengan menggunakan Proposisi 1 sehingga

$$\begin{aligned} \sup_{s,t\in[a,b]} \left| \frac{\partial}{\partial x} e^{ts}x^2(t) \right| <& \frac{1}{1-0} \\ |x(t)| <& \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Subtitusikan $s = 1$ dan $x(t)$=exp(t) ke persamaan (29) sehingga diperoleh

$$x(1) = e^{(1)} - \frac{e^{1+2}}{1+2} + \frac{1}{1+2} + \int_0^1 e^{t(1)}e^{2t}dt \approx 54,25. \tag{32}$$

Dari hasil (32) maka tidak terpenuhi syarat (31), sehingga batas yang diambil tidak menimbulkan barisan konvergensi. Coba perkecil batasnya menjadi $[0, \frac{1}{100}]$ sehingga persamaan (29) menjadi

$$x(s) = e^{(s)} - \frac{e^{0,01s+0,02}}{s+2} + \frac{1}{s+2} + \int_0^{0,01} e^{ts}x^2(t)dt. \tag{33}$$

Berdasarkan syarat pada Proposisi 1 maka

$$\begin{aligned} \sup_{s,t\in[a,b]} \left| \frac{\partial}{\partial x} e^{ts}x^2(t) \right| <& \frac{1}{(\frac{1}{100}-0)} \\ |x(t)| <& 50. \end{aligned} \tag{34}$$

Subtitusikan $s = \frac{1}{100} = 0,01$ ke persamaan (29) sehingga

$$x(0,01) = e^{(0,01)} - \frac{e^{0,0001+0,02}}{0,01+2} + \frac{1}{0,01+2} + \int_0^{0,01} e^{t(0,01)}x^2(t)dt \approx 0,04. \tag{35}$$

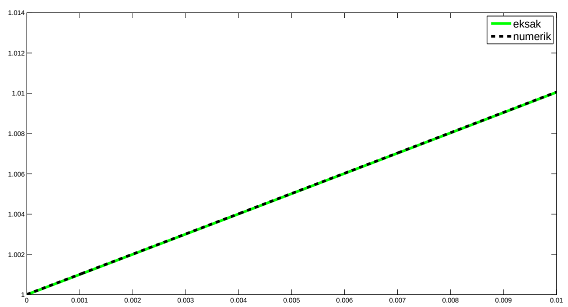
Dari hasil (35) maka terpenuhi syarat (34), sehingga batas yang diambil menimbulkan barisan konvergensi. Sebuah persamaan nonlinear yang diperoleh dengan mengabaikan error pemotongan di (29) yaitu

$$\xi_i = e^{(s_i)} - \frac{e^{0{,}01 s_i + 0{,}02}}{s_i + 2} + \frac{1}{s_i + 2} + \sum_{j=0}^{1000} e^{t_j s_i} (\xi_j)^2 \Delta t, \tag{36}$$

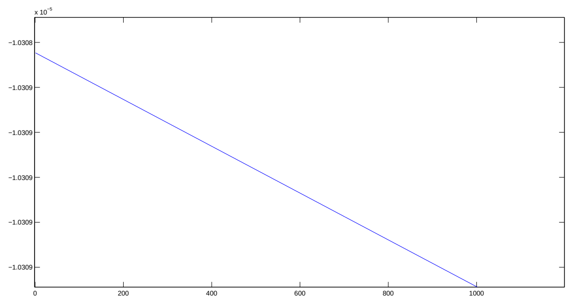
akan dilakukan proses iterasi menggunakan metode *Successive-Subtitution* dengan $\Delta t = \frac{1}{100000}$ sehingga menjadi

$$\xi_i^{(k+1)} = e^{(s_i)} - \frac{e^{0{,}01 s_i + 0{,}02}}{s_i + 2} + \frac{1}{s_i + 2} + \sum_{j=0}^{1000} e^{t_j s_i} (\xi_j^{(k)})^2 \Delta t. \tag{37}$$

Dengan pendekatan awal $\vec{\xi}^{(0)} = \mathbf{0}$ maka dapat dibandingkan solusi eksak dan taksiran dari persamaan integral Fredholm nonlinear Contoh 2 pada Gambar 3 dan erronya pada Gambar 4.



Gambar 3: Kurva titik memperlihatkan solusi taksiran dan kurva kontinu memperlihatkan solusi eksak Contoh 2.



Gambar 4: Kurva error Contoh 2.

Contoh 3 Akan dihitung solusi taksiran dari persamaan integral Fredholm nonlinear jenis kedua berikut

$$x(s) = \frac{7}{8}s + \frac{1}{2}\int_0^1 stx^3(t)dt, \tag{38}$$

dengan solusi analitik $x(t) = t$ dan tetapkan $\epsilon = 10^{-6}$ serta $\Delta s = \Delta t = \frac{1}{10} = 0,1$.

Solusi

Partisi batas [0,1] menjadi $[s_0{=}t_0{=}0, s_1{=}t_1{=}\frac{1}{10}, s_2{=}t_2{=}\frac{2}{10}, \cdots, 1{=}s_{10}{=}t_{10}]$. Dengan mensubtitusikan nilai partisi s_i ke solusi eksak persamaan (38) dan menaksirnya menggunakan penjumlahan Riemann diperoleh

$$x_i^* = \frac{7}{8}s_i + \frac{1}{2}\sum_{0}^{10} s_i t_j (x_j^*(t))^3 \Delta t + O(\Delta t). \tag{39}$$

Akan dilihat syarat yang menjamin kekonvergensian solusi bentuk diskrit integral Fredholm nonlinear jenis kedua (39) ke solusi eksaknya dengan menggunakan Proposisi 1 sehingga

$$\begin{aligned} \sup_{s,t\in[a,b]} \left| \frac{\partial}{\partial x} stx^3(t) \right| &< \frac{1}{1-0} \\ \left| x^2(t) \right| &> \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{40}$$

Subtitusikan nilai $s = 1$ ke persamaan (38) untuk melihat terpenuhi atau tidaknya persamaan (40) sehingga diperoleh

$$x(1) = \frac{7}{8}(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1)tx^3(t)dt \geq \frac{7}{8}. \tag{41}$$

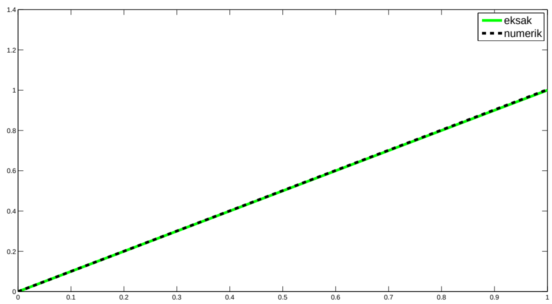
Dari hasil (41) maka syarat (40) terpenuhi karena $(\frac{7}{8})^2 > \frac{1}{3}$. Sebuah persamaan nonlinear yang diperoleh dengan mengabaikkan error pemotongan di (38) yaitu

$$\xi_i = \frac{7}{8}s_i + \frac{1}{2}\sum_{0}^{10} s_i t_j (\xi_j)^3 \Delta t, \tag{42}$$

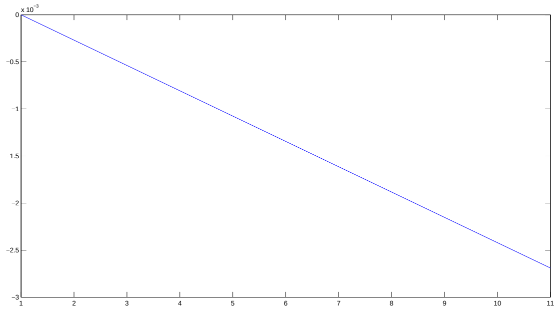
Akan dilakukan proses iterasi menggunakan metode *Successive-Subtitution* sehingga menjadi

$$\xi_i^{(k+1)} = \frac{7}{8}s_i + \frac{1}{2}\sum_{0}^{10} s_i t_j (\xi_j^{(k)})^3 \Delta t. \tag{43}$$

Dengan pendekatan awal $\vec{\xi}^{(0)} = \mathbf{0}$ maka dapat dibandingkan solusi eksak dan taksiran dari persamaan integral Fredholm nonlinear Contoh 3 pada Gambar 5 dan errornya pada Gambar 6.



Gambar 5: Kurva titik memperlihatkan solusi taksiran dan kurva kontinu memperlihatkan solusi eksak Contoh 3.



Gambar 6: Kurva error Contoh 3.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Leli Deswita, M.Si. dan Khozin Mu'tamar, M.Si. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Wazwaz, A. M. 2011. *Linear and Nonlinear Integral Equation*. Springer, Chicago.

[2] Borzabadi, A. H. & S. F. Omid. 2009. A Numerical Scheme For A Class of Nonlinear Fredholm Integral Equations of The Second Kind. *Computational And Applied Mathematics*. **232**: 449-454.

[3] Burden, R. L. & J. D Faires. 2010. *Numerical Analysis, 6^{th} Ed.* Brooks/Cole, CENGANGE Learning^{TM}, USA.

[4] Stewart, J. 1999. *Calculus, 4^{th} Ed.* Brooks/Cole Publishing Company, USA.