TAKSIRAN PARAMETER BENTUK, LOKASI DAN SKALA DARI DISTRIBUSI WEIBULL

Siti Rukiyah[1*], Bustami[2], Sigit Sugiarto[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

[*]sitirukiyah734@gmail.com

ABSTRACT

This paper is a review of an article proposed by El-Mezouar [4], the methods of moment based method of Cran used to estimate the parameters of the Weibull distribution three parameters where the location parameters is with non-negative. Method of moments based Cran method using a simple procedure with regard location parameters is zeros.

Keywords: *Weibull Distribution, Cran method, moment dan method of moments.*

ABSTRAK

Tulisan ini merupakan review dari artikel yang ditulis oleh El-Mezouar [4], metode momen berdasarkan metode Cran digunakan untuk menaksir parameter dari distribusi Weibull tiga parameter dimana parameter lokasi bernilai non-negatif. Metode momen berdasarkan metode Cran menggunakan prosedur sederhana dengan menganggap parameter lokasi sama dengan nol.

Kata kunci: *Distribusi Weibull, metode Cran, Momen dan Metode Momen.*

1. PENDAHULUAN

Satu aspek yang penting dalam statistika inferensi adalah menaksir parameter dari suatu populasi yang berdistribusi tertentu melalui analisis data sampel yang telah dikumpulkan dari populasi tersebut. Taksiran yang menjadi perhatian penulis adalah taksiran titik dengan memakai metode momen berdasarkan metode Cran [3]. Parameter yang menjadi perhatian dapat berupa parameter bentuk, parameter lokasi, parameter skala dan parameter lainnya.

Secara umum, dalam tulisan ini, θ notasi untuk parameter dan $\hat{\theta}$ sebagai penaksir. Penaksir yang diharapkan adalah penaksir yang taksirannya cukup dekat dengan nilai parameter yang sebenarnya. Suatu penaksir $\hat{\theta}$ disebut penaksir tak bias dari θ bila $E(\hat{\theta}) = \theta$. Jika $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, maka $\hat{\theta}$ disebut sebagai penaksir bias dari θ. Untuk penaksir tak bias, penaksir terbaik adalah yang memiliki variansi minimum dan untuk penaksir bias, penaksir terbaik adalah yang memiliki Mean Square Error (*MSE*) minimum. Mean Square Error dari penaksir $\hat{\theta}$ terhadap parameter θ adalah

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$
$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$
$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) + \theta)^2 \tag{1}$$

Distribusi yang dibahas dalam tulisan ini adalah distribusi Weibull tiga parameter yang biasa digunakan dalam pembahasan data uji hidup dan reliabilitas, dengan fungsi densitasnya adalah

$$f(t;a,b,c) = \frac{c}{b}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{t-a}{b}\right)^{c}\right], \quad -\infty < t < \infty,\ t \geq a,\ b > ,\ c > 0, \tag{2}$$

dengan T adalah variabel random, a adalah parameter lokasi, b adalah parameter skala dan c adalah parameter bentuk. Parameter yang akan ditaksir adalah parameter a, b, dan c . T adalah variabel random dari distribusi Weibull tiga parameter dengan fungsi densitas pada persamaan (2) memiliki nilai rata-rata

$$E(T) = a + b\Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right). \tag{3}$$

dan variansi

$$Var(T) = b^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)\right]^2\right\}. \tag{4}$$

2. PENAKSIR METODE MOMEN BERDASARKAN METODE CRAN

Untuk mendapatkan penaksir distribusi Weibull dengan menggunakan metode momen, gunakan momen ke-k dari distribusi Weibull yang diajukan oleh Cran [3] sebagai berikut:

$$\mu_k' = a + \frac{b\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)}{k^{\frac{1}{c}}} \qquad \text{untuk } k = 1,2,3,\ldots,n \tag{5}$$

Kemudian dari persamaan (5) Cran [3] menyatakan parameter untuk urutan momen terendah adalah

$$a = \frac{\mu_1'\mu_4' - \mu_2'}{\mu_1' + \mu_4' - 2\mu_2'} \tag{6}$$

$$b = \frac{\mu_1' - a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)} \tag{7}$$

dan

$$c = \frac{\ln(2)}{\ln(\mu_1' - \mu_2') - \ln(\mu_2' - \mu_4')} \tag{8}$$

Untuk memperoleh taksiran parameter *a*, *b*, dan *c* pada persamaan (6), (7) dan (8) ganti μ_1', μ_2' dan μ_4' dengan m_1', m_2' dan m_4'.

dimana

$$m_k' = \int_0^\infty \{1 - S_n(t)\}^k \, dt$$

$$m_k' = \sum_{r=0}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^k \{t_{(r+1)} - t_{(r)}\}, \quad t_{(0)} = 0 \qquad k = 1,2 \; dan \; 4. \tag{9}$$

disini $S_n(t)$ adalah statistik urut, untuk $t_{(1)} \le t_{(2)} \le \ldots \le t_{(n)}$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_n(t) = 0, \; t < t_{(1)}$$

$$= \frac{r}{n}, \; t_{(r)} \le t \le t_{(r+1)}, \quad r = 1,2,\ldots,n-1$$

$$= 1, \; t_{(n)} \le t$$

Setelah diperoleh m_1', m_2' dan m_4', masukan nilai m_1', m_2' dan m_4' ke persamaan (6), (7) dan (8). Maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$a^* = \frac{m_1' m_4' - (m_2')^2}{m_1' + m_4' - 2m_2'} \tag{10}$$

persamaan (10) merupakan taksiran parameter *a*.

$$b^* = \frac{m_1' - a}{\Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right)} \tag{11}$$

persamaan (11) merupakan taksiran parameter *b*.

$$c^* = \frac{\ln(2)}{\ln(m_1' - m_2') - \ln(m_2' - m_4')} \tag{12}$$

Persamaan (12) merupakan taksiran parameter *c*.

Dari persamaan (11) dan (12) dapat ditunjukkan bahwa estimasi b^* dan c^* nonpositif dan karenanya tidak dapat diterima ketika $m_2' \geq \frac{1}{2}(m_1' + m_4')$. Oleh sebab itu, gunakan penaksir alternatif yang dapat menerima penaksir a^*. Penaksir a^* tidak boleh negatif atau melebihi t_1, yaitu:

$$a = t_1 - \frac{b^* \Gamma\left(\frac{1}{c^*} + 1\right)}{n^{\frac{1}{c^*}}} \tag{13}$$

Persamaan (13) merupakan penaksir untuk a.

Karena parameter lokasi (a) dianggap nol maka penaksir untuk *b* dan *c* adalah

$$\hat{b} = \frac{m_1'}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}} + 1\right)} \tag{14}$$

Persamaan (14) merupakan penaksir untuk *b*.

$$\hat{c} = \frac{\ln(2)}{(\ln m_1' - \ln m_2')} \tag{15}$$

Persamaan (15) merupakan penaksir untuk *c*.

3. MEAN SQUARE ERROR DARI METODE MOMEN BERDASARKAN METODE CRAN

Penaksir yang diajukan oleh Cran [3] untuk distribusi Weibull tiga parameter adalah sebagai berikut

$$a = t_1 - \frac{b^* \Gamma\left(\frac{1}{c^*} + 1\right)}{n^{\frac{1}{c^*}}}, \quad \hat{b} = \frac{m_1'}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}} + 1\right)} \quad \text{dan} \quad \hat{c} = \frac{\ln(2)}{(\ln m_1' - \ln m_2')}$$

Untuk menghindari simulasi numerik maka $\hat{a}$ dan $\hat{c}$ dianggap konstan. Nilai ekspektasi $\hat{b}$ dari metode momen berdasarkan metode Cran $E(\hat{b})$ adalah :

$$E(\hat{b}) = E\left(\frac{m_1'}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}} + 1\right)}\right)$$

karena m_1' sama dengan nilai rata-rata distribusi Weibull tiga parameter pada persamaan (3), maka

$$E\left(\hat{b}\right)=\frac{\hat{a}+b\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}$$

$$E\left(\hat{b}\right)=\frac{\hat{a}}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}+b \qquad (16)$$

Berdasarkan persamaan (16), karena $E\left(\hat{b}\right)\neq b$ maka dapat disimpulkan bahwa $\hat{b}$ merupakan penaksir bias untuk parameter b. Dengan demikian perlu ditentukan Mean Square Error dari $\hat{b}$ sesuai persamaan (1), yaitu

$$MSE\left(\hat{b}\right)=Var\left(\hat{b}\right)+\left(E\left(\hat{b}\right)+b\right)^2$$

$$MSE(\hat{b})=Var\left(\frac{\bar{t}}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}\right)+\left[\frac{\hat{a}}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}+b+b\right]^2$$

$$=\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}\right)Var\left(\bar{t}\right)+\left(\frac{\hat{a}}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}+2b\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2\left\{nb^2\Gamma\left(\frac{2}{\hat{c}}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)\right\}+\left(\frac{\hat{a}}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}+2b\right)^2$$

$$MSE\left(\hat{b}\right)=\frac{nb^2\Gamma\left(\frac{2}{\hat{c}}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)+n^2\hat{a}^2+n^2 4b\hat{a}\Gamma\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)+n^2 4b\Gamma^2\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}{n^2\Gamma^2\left(\frac{1}{\hat{c}}+1\right)}$$

4. CONTOH

Diketahui banyak data $n = 20$, dengan menggunakan $a = 2$, $b = 4$ dan $c = 2$ diperoleh generate data t sebagai berikut:

0.9512, 1.6814, 1.1649, 1.8821, 1.3320, 1.6694, 1.0683, 2.2956, 1.0164, 1.9431 2.5984, 1.3487, 2.3707, 2.2549, 2.1361, 2.8600, 2.8971, 1.8696, 1.2785, 2.2481 .

maka tentukan $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ pada persamaan (13), (14), (15) dan Mean Square Error dari metode momen berdasarkan metode Cran.

Solusi

Untuk menentukan solusi pada Contoh, digunakan program MATLAB. Hasil perhitungan Nilai $\hat{a}$, $\hat{b}$ dan $\hat{c}$ untuk metode momen berdasarkan Cran sebagai berikut :

$\hat{a} = 1.9174$ $\qquad MSE(\hat{a}) = 0.0068$

$\hat{b} = 0.0249$ $\qquad MSE(\hat{b}) = 15.8017$

$\hat{c} = -1.0131$ $\qquad MSE(\hat{c}) = 9.0790$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan pada artikel ini, dapat disimpulkan bahwa distribusi Weibull tiga parameter dengan parameter lokasi non-negatif dapat dicari dengan menggunakan metode momen berdasarkan Cran, yaitu menggunakan urutan momen terendah dan mengansumsikan parameter lokasi yang di anggap nol.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Fawzan, M.A. 2000. Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution, *Report*; King Abdulaziz City for Science and Technology, Riyadh, Saudi Arabia.

[2] Bain, L. J and Engelhard. M. 1991. *Introduction to Probability Mathematical Statistics, Second Edition*. Duxbury Press. Belmont, California.

[3] Cran G.W. 1988. Moment Estimators for the 3-parameter Weibull Distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **37** (4): 360-363

[4] El-Mezouar, Z. Chikr. 2010. Estimation the shape, location and scale parameter of the weibull, *Electronic Journal of International Group on Reliability*, **1** (4): 36-40

[5] Hines, W. W. and Montgomery, D.C. 1972. *Probability and Statistics in Engineering and Management Science, Second Edition.* John Willey & Son, Inc. New York.