VARIAN METODE HALLEY BEBAS TURUNAN KEDUA DENGAN ORDE KEKONVERGENAN ENAM

Siti Mariana[1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*sitimariana2011@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the variant of Halley's method free from second derivative, modified from a combination of Newton's method and Halley's method. This new method has six order of convergence. Furthermore, from computational test it shows that the discussed method is better than the Newton's method, Halley's method and Noor's method when seen from the number of iterations to obtain an approximated root of test fuctions.

Keywords: *Newton method, variant Halley method, order of convergence, nonlinear equation, error equation.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas varian metode Halley bebas turunan kedua, yang dimodifikasi dari kombinasi metode Newton dan metode Halley Metode baru ini memiliki orde kekonvergenan enam. Selanjutnya dari uji komputasi terlihat bahwa metode yang didiskusikan lebih baik dari pada metode Newton, metode Halley dan metode Noor jika dilihat dari jumlah iterasi yang diperoleh untuk mendapatkan akar hampiran.

Kata kunci: *metode Newton, varian metode Halley, orde kekonvergenan, persamaan nonlinear, persamaan tingkat kesalahan.*

1. PENDAHULUAN

Masalah yang sering ditemui dalam bidang matematika salah satunya adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Persamaan nonlinear tersebut dapat diselesaikan secara analitik dan metode numerik. Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear diantaranya yaitu metode Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \cdots , \tag{1}$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$. Metode Newton memiliki orde kekonvergenan kuadratik [1, h. 67]. Pada setiap iterasi, metode Newton memerlukan dua buah fungsi yang dievaluasi (NFE) yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$.

Dalam perkembangannya, metode Newton banyak mengalami modifikasi. Salah satu metode hasil modifikasi metode Newton adalah metode Halley dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{2 - L_f(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0, 1, 2, \cdots , \tag{2}$$

dengan $L_f(x_n) = \dfrac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}$. Metode Halley [7, h. 86] memiliki orde kekonvergenan kubik. Metode Halley memerlukan tiga buah evaluasi fungsi pada setiap iterasinya yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$.

Apabila metode Newton dan metode Halley dikombinasikan penggunaannya, maka diperoleh bentuk iterasi

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{2f'(y_n)f(y_n)}{2f'(y_n)^2 - f''(y_n)f(y_n)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Seperti halnya dengan metode Halley, kombinasi metode Newton dan metode Halley ini masih mengandung bentuk turunan kedua yaitu $f''(y_n)$ dan ini dianggap sebagai sesuatu kelemahan.

Untuk menghindari penggunaan turunan kedua $f''(y_n)$ ini, maka Noor [8] melakukan pendekatan lain pada turunan kedua dengan bentuk

$$f''(y_n) = \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{y_n - x_n}. \tag{4}$$

Menggunakan pendekatan ini maka diperoleh iterasi dengan bentuk

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \\ x_{n+1} &= y_n - \left(\frac{2f(x_n)f(y_n)f'(y_n)}{2f(x_n)f'(y_n)^2 - f(y_n)f'(x_n)^2 + f(y_n)f'(x_n)f'(y_n)}\right). \end{aligned}\right\}$$

Metode Noor memiliki orde kekonvergenan lima [8]. Metode Noor memerlukan empat buah evaluasi fungsi pada setiap iterasinya yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$, dan $f'(y_n)$.

Pada tulisan ini direview artikel yang ditulis oleh Jiaqi Han, Huiqian HE, Aimin XU and Zhongdi Can [4], pembahasan dimulai dibagian dua dengan mengusulkan varian metode Halley bebas turunan kedua dengan orde kekonvergenan enam. Dibagian tiga disajikan analisa kekonvergenan. Kemudian dilanjutkan di bagian empat dengan mendiskusi beberapa contoh uji komputasi.

2. VARIAN METODE HALLEY BEBAS TURUNAN KEDUA

Berbeda dengan apa yang dilakukan Noor [8], Jiaqi Han, Huiqian HE, Aimin XU and Zhongdi Can [4] menggunakan pendekatan untuk turunan kedua $f''(y_n)$ yaitu

$$f''(y_n) = \frac{2}{y_n - x_n}\left(2f'(y_n) + f'(x_n) - 3\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right) = P_f(x_n, y_n), \tag{5}$$

sehingga diperoleh iterasi dengan bentuk

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{H_f(x_n, y_n)}{1 - \frac{1}{2}H_f(x_n, y_n)}\right)\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dengan $H_f(x_n, y_n) = \dfrac{P_f(x_n, y_n)f(y_n)}{f'(y_n)^2}$.

Persamaan (6) merupakan bentuk iterasi varian metode Halley bebas turunan kedua. Apabila diperhatikan bentuk iterasi varian metode Halley maka terlihat bahwa pada setiap iterasinya varian metode Halley memerlukan 4 buah fungsi yang dievaluasi (NFE) yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$, dan $f'(y_n)$. Selanjutnya akan dilakukan analisa kekonvergenan untuk menunjukkan bahwa varian metode Halley memiliki orde kekonvergenan enam.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 1
Misalkan fungsi f dan $f^{(i)}$ dengan $i = 1, 2, \cdots, 6$, kontinu untuk semua x disekitar α dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada persamaan (6) memiliki orde kekonvergenan enam.

Bukti: Misalkan α adalah akar sederhana persamaan nonlinear $f(x) = 0$, asumsikan bahwa $f'(\alpha) \neq 0$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Kemudian dengan menggunakan ekspansi Taylor $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ sampai orde enam [2, h. 189] dan mengabaikan orde yang lebih tinggi diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)}{1!} + f^{(2)}(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!} + f^{(3)}(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^3}{3!} \\ + f^{(4)}(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^4}{4!} + f^{(5)}(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^5}{5!} \\ + f^{(6)}(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^6}{6!} + O(x_n-\alpha)^7. \end{aligned} \tag{7}$$

Misalkan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \cdots$, dan karena $f(\alpha) = 0$ dan $e_n = x_n - \alpha$, maka persamaan (7) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7)). \tag{8}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, dan setelah dilakukan penyederhanaan maka diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^6)). \tag{9}$$

Kemudian dari persamaan (8) dan (9) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7))}{(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^6))}. \tag{10}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri $\dfrac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots$, untuk $r = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^7)$, setelah disederhanakan diperoleh hasil dari persamaan (10) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = {}& e_n + c_2e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (-4c_2^3 - 3c_4 + 7c_2c_3)e_n^4 - (10c_2c_4 - 4c_5 + 8c_2^4 \\ & + 6c_3^2 - 20c_2^2c_3)e_n^5 + (-5c_6 - 16c_2^5 + 52c_2^3c_3 + 13c_2c_5 - 33c_2c_3^2 + 17c_3c_4 \\ & - 28c_2^2c_4)e_n^6 + O(e_n^7).\end{aligned} \tag{11}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan persamaan (11) ke persamaan (6) maka diperoleh

$$\begin{aligned}y_n = \alpha &+ c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (-8c_2^4 \\ &+ 20c_2^2c_3 - 10c_2c_4 - 6c_3^2 + 4c_5)e_n^5 + (16c_2^5 - 52c_2^3c_3 + 5c_6 \\ &+ 33c_2c_3^2 + 28c_2^2c_4 - 13c_2c_5 - 17c_3c_4 + 5c_6)e_n^6 + O(e_n^7).\end{aligned} \tag{12}$$

Kemudian dilakukan ekspansi Taylor dari $f(y_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ sampai orde enam dan mengabaikan orde yang lebih tinggi, dan dengan menggunakan (12) diperoleh

$$\begin{aligned}f(y_n) = f'(\alpha)(&c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 \\ &+ (-12c_2^4 + 24c_2^2c_3 - 10c_2c_4 - 6c_3^2 + 4c_5)e_n^5 \\ &+ (28c_2^5 - 73c_2^3c_3 + 37c_2c_3^2 + 34c_2^2c_4 - 13c_2c_5 \\ &- 17c_3c_4 + 5c_6)e_n^6 + O(e_n^7)).\end{aligned} \tag{13}$$

Selanjutnya dilakukan ekspansi Taylor dari $f'(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$, dan dengan menggunakan (13) diperoleh

$$\begin{aligned}f'(y_n) = f'(\alpha)(1 &+ 2c_2^2e_n^2 + (-4c_2^3 + 4c_2c_3)e_n^3 + (8c_2^4 - 11c_2^2c_3 + 6c_2c_4)e_n^4 \\ &+ (-16c_2^5 + 28c_2^3c_3 - 20c_2^2c_4 + 8c_2c_5)e_n^5 \\ &+ (32c_2^6 - 68c_2^4c_3 + 56c_2^3c_4 - 26c_2^2c_5 + 10c_2c_6 - 16c_2c_3c_4 \\ &+ 12c_3^3)e_n^6 + O(e_n^7)).\end{aligned} \tag{14}$$

Selanjutnya persamaan (14) dikuadratkan diperoleh

$$\begin{aligned} f'(y_n)^2 = f'(\alpha)^2(1 &+ 4c_2^2e_n^2 + (-8c_2^3 + 8c_2c_3)e_n^3 + (20c_2^4 - 22c_2^2c_3 + 12c_2c_4)e_n^4 \\ &+ (-48c_2^5 + 72c_2^3c_3 + 16c_2c_5 - 40c_2^2c_4)e_n^5 \\ &+ (16c_2^2c_3^2 + 136c_2^3c_4 + 112c_2^6 - 32c_2c_3c_4 + 20c_2c_6 - 52c_2^2c_5 \\ &+ 24c_3^3 - 212c_2^4c_3)e_n^6 + (O(e_n^7)). \end{aligned} \tag{15}$$

Selanjutnya persamaan (13) dibagi dengan persamaan (14), dan disederhanakan maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = (c_2e_n^2 &+ (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (3c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 \\ &+ (-4c_2^4 + 16c_2^2c_3 - 6c_3^2 - 10c_2c_4 + 4c_5)e_n^5 \\ &+ (6c_2^5 - 32c_2^3c_3 + 29c_2c_3^2 + 22c_2^2c_4 - 17c_3c_4 \\ &- 13c_2c_5 + 5c_6)e_n^6 + O(e_n^7)). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned} P_f(x_n, y_n) = 2c_2 &+ (-2c_4 + 6c_2c_3)e_n^2 + (-4c_5 + 4c_2c_4 + 12c_3^2 - 12c_2^2c_3)e_n^3 \\ &+ (-6c_6 + 24c_2^3c_3 - 42c_2c_3^2 + 26c_3c_4 + 2c_2^2c_4 + 2c_2c_5)e_n^4 \\ &+ (28c_3c_5 + 24c_2c_3c_4 + 52c_2^2c_5 - 36c_3^3 - 200c_2^3c_4 + 420c_2^4c_3 \\ &- 14c_7 - 84c_2^2c_3^2 - 192c_2^6 + 12c_4^2)e_n^5 + (-192c_2^7 - 188c_2^2c_3c_4 \\ &- 20c_4c_5 - 240c_2c_3^3 + 12c_2^2c_6 + 300c_2^3c_3^2 - 12c_3c_6 - 14c_7c_2 \\ &+ 32c_2^3c_5 + 276c_2^5c_3 + 44c_2c_4^2 + 100c_3^2c_4 + 84c_2c_3c_5 \\ &- 172c_2^4c_4)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{16}$$

Selanjutnya hitung $H_f(x_n, y_n) = \dfrac{P_f(x_n, y_n)f(y_n)}{f'(y_n)^2}$ dengan menggunakan persamaan, (13), (14) dan (16) maka diperoleh

$$\begin{aligned} H_f(x_n, y_n) = 2c_2^2e_n^2 &+ (-4c_2^3 + 4c_2c_3)e_n^3 + (2c_2^4 - 8c_2^2c_3 + 4c_2c_4)e_n^4 + (8c_2^5 - 8c_2^3c_3 \\ &+ 12c_2c_3^2 - 12c_2^2c_4 - 4c_3c_4 + 4c_2c_5)e_n^5 + (-24c_2^6 - 90c_2^2c_3^2 \\ &+ 24c_3^3 + 12c_2^3c_4 + 32c_2c_3c_4 - 6c_4^2 - 16c_2^2c_5 - 8c_3c_5 \\ &+ 4c_2c_6)e_n^6 + O(e_n^7), \end{aligned} \tag{17}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}H_f(x_n, y_n) = 1 - c_2^2e_n^2 &+ (-2c_2c_3 + 2c_2^3)e_n^3 + (-2c_2c_4 - c_2^4 + 4c_2^2c_3)e_n^4 \\ &+ (2c_3c_4 - 2c_2c_5 - 6c_2c_3^2 + 6c_2^2c_4 - 4c_2^5 + 4c_2^3c_3)e_n^5 \\ &+ (-2c_2c_6 + 12c_2^6 + 73c_2^3c_3 - 109c_2^4c_3 + 45c_2^2c_3^2 - 12c_3^3 \\ &- 6c_2^3c_4 - 16c_2c_3c_4 + 3c_4^2 + 8c_2^2c_5 + 4c_3c_5)e_n^6 + O(e_n^7), \end{aligned} \tag{18}$$

dengan menggunakan identitas geometri [5, h. 500], maka diperoleh

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}\frac{H_f(x_n,y_n)}{1-\frac{1}{2}H_f(x_n,y_n)} &= c_2e_n^2+(-2c_2^2+2c_3)e_n^3+(3c_4-7c_2c_3+4c_2^3)e_n^4\\ &\quad+(-8c_2^4-6c_3^2+20c_2^2c_3+4c_5-10c_2c_4)e_n^5\\ &\quad+(5c_6-51c_2^3c_3+15c_2^5-17c_3c_4+27c_2^2c_4\\ &\quad-13c_2c_5+33c_2c_3^2)e_n^6+O(e_n^7). \end{aligned}\tag{19}$$

Jika persamaan (19) disubstitusikan ke persamaan (6) maka diperoleh

$$x_{n+1}=\alpha+(c_2^2c_4-c_2^3c_3+c_2^5)e_n^6+O(e_n^7). \tag{20}$$

Karena $e_{n+1}=x_{n+1}-\alpha$ maka

$$e_{n+1}=(c_2^2c_4-c_2^3c_3+c_2^5)e_n^6+O(e_n^7). \tag{21}$$

Persamaan (21) menunjukkan bahwa varian metode Halley memiliki orde kekonvergenan enam [3]. □

4. UJI KOMPUTASI

Selanjutnya akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan kecepatan dalam menemukan akar hampiran dari persamaan nonlinear antara metode Newton (MN), metode Halley (MH), metode Noor (MNR) dan varian metode Halley (VMH).

Berikut ini adalah beberapa contoh fungsi [4] dan nilai tebakan awal yang digunakan untuk membandingkan metode-metode tersebut.

$f_1(x)=x^3+4x^2-10$ $\quad x_0=1.0$
$f_2(x)=e^{-x}+\cos(x)$ $\quad x_0=1.0$
$f_3(x)=\dfrac{5x-1}{4x}$ $\quad x_0=0.25$
$f_4(x)=e^x\sin(x)+\log(x^2+1)$ $\quad x_0=1.2$
$f_5(x)=x_2-e^x-3x+2$ $\quad x_0=2.2$
$f_6(x)=\sin^2(x)-x^2+1$ $\quad x_0=1.2$
$f_7(x)=\cos(x)-x$ $\quad x_0=0.1$

Untuk melakukan uji komputasi dari ketujuh contoh fungsi nonlinear di atas, digunakan software aplikasi Maple13.

Tabel 1 merupakan tabel perbandingan hasil komputasi dari empat metode yang berbeda. Keterangan untuk Tabel 1 adalah, fungsi f_i menyatakan fungsi persamaan nonlinear, x_0 merupakan tebakan awal iterasi, n merupakan banyaknya iterasi, x_n merupakan akar hampiran yang diperoleh dari setiap metode, $|f(x_n)|$ merupakan nilai mutlak dari fungsi untuk akar hampiran ke-n dan $|x_n-x_{n-1}|$ merupakan selisih nilai mutlak antara dua akar hampiran yang berdekatan. Sedangkan Tabel 2 merupakan tabel perbandingan NFE atau banyaknya perhitungan fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

Metode	n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
$f_1(x)$,$x_0 = 1.0$				
MN	5	1.365230013414097	$3.662513e-21$	$2.126976e-11$
MH	3	1.365230013414097	$1.502197e-19$	$3.698650e-07$
MNR	2	1.365230013414097	$4.603558e-18$	$4.181575e-04$
VMV	2	1.365230013414097	$9.214707e-25$	$1.175233e-04$
$f_2(x)$,$x_0 = 1.0$				
MN	5	1.7461395304080124	$1.106865e-23$	$7.965566e-12$
MH	4	1.7461395304080124	$1.459285e-35$	$4.489281e-12$
MNR	3	1.7461395304080124	$2.126089e-62$	$1.358919e-12$
VMH	2	1.7461395304080124	$6.910824e-45$	$1.524821e-07$
$f_3(x)$,$x_0 = 0.25$				
MN	5	0.2000000000000000	$6.776264e-20$	$4.656613e-11$
MH	4	0.2000000000000000	$0.000000e+00$	$5.000000e-02$
MNR	3	0.2000000000000000	$6.445481e-71$	$1.615403e-15$
VMH	2	0.2000000000000000	$3.802663e-22$	$5.186722e-05$
$f_4(x)$,$x_0 = 1.2$				
MN	7	0.0000000000000000	$9.860395e-22$	$2.220405e-11$
MH	5	0.0000000000000000	$2.876899e-35$	$1.987091e-12$
MNR	3	0.0000000000000000	$2.930639e-31$	$6.810641e-07$
VMH	3	0.0000000000000000	$2.448421e-36$	$6.689076e-07$
$f_5(x)$,$x_0 = 2.2$				
MN	5	0.2575302854398610	$3.634193e-21$	$1.014458e-10$
MH	4	0.2575302854398610	$5.297274e-29$	$6.619648e-10$
MNR	3	0.2575302854398610	$1.872043e-28$	$9.210162e-06$
VMH	3	0.2575302854398610	$1.089289e-100$	$7.484145e-17$
$f_6(x)$,$x_0 = 1.2$				
MN	5	1.4044916482153410	$8.130251e-24$	$2.044422e-12$
MH	3	1.4044916482153410	$1.220525e-21$	$8.775593e-08$
MNR	2	1.4044916482153410	$3.944218e-21$	$1.145160e-04$
VMH	2	1.4044916482153410	$2.681243e-28$	$2.917175e-05$
$f_7(x)$,$x_0 = 0.1$				
MN	6	0.73908513321516064	$1.000000e-16$	$1.030850e-11$
MH	4	0.73908513321516064	$3.968365e-49$	$1.269707e-16$
MNR	2	0.73908513321516064	$6.036409e-17$	$1.489574e-03$
VMH	2	0.73908513321516064	$1.796714e-26$	$4.753816e-16$

Tabel 2: Perbandingan nilai NFE dari beberapa metode iterasi

$f(x)$	x_0	MN	MH	MNR	VMH
f_1	1.0	10	9	8	8
f_2	1.0	10	9	12	8
f_3	0.25	10	15	12	8
f_4	-0.8	14	15	12	12
f_5	2.2	10	12	12	12
f_6	1.2	10	9	8	8
f_7	0.1	12	12	8	8

Berdasarkan Tabel 1 semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar yang diharapkan dari semua contoh fungsi yang diberikan. Secara umum dapat dikatakan semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar hampiran yang diharapkan dari semua fungsi yang diberikan. Jika dilihat dari jumlah iterasi yang diperlukan maka VMH lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya.

Berdasarkan Tabel 2 dapat disimpulkan bahwa banyak evaluasi fungsi yang dilakukan oleh VMH lebih sedikit dibandingkan dengan metode-metode lain. Untuk menemukan akar hampiran yang diharapkan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si. dan Bapak Zulkarnain, M.Si. yang telah meluangkan waktu, pikiran dan tenaga dalam memberikan bimbingan, petunjuk dan pengarahan kepada penulis dalam menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burden, R. & J. D. Faires. 2011. *Numerical Methods, 3^{th} Ed.* Brooks Cole, Belmont.

[2] Bartle, R. G. & Shebert. R. D. 1999. *Introduction to Real Analysis, 4^{th} Ed.* Jhon Wiley & Sons, New York.

[3] Sharma, J. R. & Guha. R. K. 2011. Some Modified Newton Methods with Fourth-Order Convergence. *Advance in Science Research*, **2**: 240-247.

[4] Han, J. Huiqian, He. Aimin, Xu. & Zhongdi. Can. 2011. A Second Derivative Free Variant of Halley's Method with Sixth Orde Convergence. *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*, **3(2)**: 195–203.

[5] Stewart, J. 2010. *Kalkulus Edisi 5 Buku 2. Terjemahan dari Calculus, 5^{th} Ed*, Oleh Sungkuno. C. Salemba Teknika, Jakarta.

[6] Traub, J. F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[7] Wait, R. 1979. *The Numerical Solution of Algebraic Equation.* John Wiley & Sons, Chicester.

[8] Noor, K. I. & M. A. Noor. 2007. Predictor Corrector Halley Method for Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **188**: 1587–1591.