BULLETIN
of the
MALAYSIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) **22** (1999) 11-22

Teorem Titik Tetap Pada Ruang 2-Metrik

[1]MASHADI DAN [2]ABU OSMAN BIN MD TAP
[1]Jurusan Matematika, Universitas Riau, Kampus Bina Widya Panam, Pekanbaru, Riau, Indonesia
[2]Jabatan Matematik, Fakulti Sains Matematik, Universiti Kebangsaan Malaysia,
43600 UKM Bangi, Selangor Darul Ehsan, Malaysia

Abstrak. Dalam makalah ini kami perluaskan beberapa teorem titik tetap dengan mentransformasikan ketiga-tiga titik *x, y, z* di dalam ruang 2-metrik. Perluasannya adalah tertakluk kepada syarat ketaksamaan tertentu yang dinyatakan. Bentuk ketaksamaan yang dibina adalah selari dengan idea Pachpatte dan juga Singh dan Ram.

Abstract. *In this paper we extend some fixed point theorems by transforming the three points x,y,z in the 2-metric space. The extensions are subjected to the given particular inequality condition. The inequalities constructed are parallel to the ideas of Pachpatte and also that of Singh and Ram.*

1. Pendahuluan

Misalkan X suatu set yang mengandungi sekurang-kurangnya 3 unsur. Pemetaan $\rho : X \times X \times X \to R^+$ yang memenuhi sifat:

M1. Untuk setiap pasangan $a, b \in X$ dengan $a \neq b$, wujud $c \in X$ sehingga $\rho(a, b, c) \neq 0$;

M2. $\rho(a, b, c) = 0$ jika sekiranya sekurang-kurangnya dua unsur daripada *a, b, c* adalah sama;

M3. $\rho(a, b, c) = \rho(b, c, a) = \rho(c, a, b)$ untuk semua $a, b, c \in X$;

M4. $\rho(a, b, c) \leq \rho(a, b, d) + \rho(a, d, c) + \rho(d, b, c)$ untuk semua $a, b, c, d \in X$,

disebut *2-metrik* pada *X* dan pasangan $(X; \rho)$ disebut *ruang 2-metrik* pada *X*.

Beberapa bentuk teorem titik tetap pada ruang 2-metrik telah dikaji oleh di antaranya Gahler [3], Lal dan Singh [5], Pachpatte [8], Iseki [4], Pathak dan Dubey [9], Cho [1], Cho dan Park [2]. Kalau diperhatikan bentuk teorem titik tetap pada ruang 2-metrik yang dibuat oleh pengkaji di atas, kita lihat di dalam syarat ketaksamaan tersebut, hanya dua titik sahaja ditransformasikan dan titik ketiganya selalu kekal (tidak ikut ditranformasikan). Contohnya dalam syarat ketaksamaan *pemetaan mengecut* pada ruang 2-metrik, bagi setiap $x, y, z \in X$, $\rho(Tx, Ty, z) \leq \alpha\rho(x, y, z)$ untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$. Selanjutnya Mashadi dan Abu Osman [6, 7] telah mengkaji titik tetap yang melibatkan syarat ketiga titik x, y dan z ditransformasikan. Contohnya, Mashadi dan Abu Osman [6] telah memberikan syarat ketaksamaan *pemetaan 2-mengecut* pada ruang 2-metrik sebagai bagi setiap $x, y, z \in X$, $\rho(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha\rho(x, y, z)$ untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$.

Dalam makalah ini, kami akan melanjutkan kajian tersebut dengan melihat titik tetap sepunya bitara bagi beberapa pemetaan pada ruang 2-metrik yang tertakluk kepada syarat ketaksamaan tertentu selari dengan idea yang diutarakan oleh Pachpatte [8] dan juga Singh dan Ram [10].

Bagi memudahkan perbincangan selanjutnya, kami berikan beberapa takrif yang akan digunakan selanjutnya.

Takrif 1.1. *Jujukan* $\{x_n\}$ *pada ruang 2-metrik* $(X; \rho)$ *disebut jujukan* ***2-Cauchy*** *jika* $had_{n,m,p\to\infty}\rho(x_n, x_m, x_p) = 0$.

Takrif 1.2. *Ruang 2-metrik* $(X; \rho)$ *disebut* ***2-lengkap*** *bila setiap jujukan 2-Cauchy di dalam X adalah menumpu.*

Takrif 1.3. *Ruang 2-metrik* $(X; \rho)$ *disebut* ***terbatas*** *jika wujud nombor nyata* $K > 0$ *sehingga* $\rho(x, y, z) \leq K$ *untuk semua* x, y, z *di X.*

2. Hasil

Dalam bahagian ini, kami andaikan yang $(X\,; \rho)$ merupakan ruang 2-metrik terbatas 2-lengkap. Kami akan perhatikan masalah titik tetap sepunya bitara bagi beberapa pemetaan pada $(X\,; \rho)$ kepada dirinya sendiri tertakluk kepada syarat ketaksamaan tertentu.

Teorem 2.1. *Misalkan* T_1, T_2 *dan* T_3 *tiga pemetaan pada ruang 2-metrik terbatas 2-lengkap* $(X\,; \rho)$ *kepada dirinya sendiri dan memenuhi syarat:*

$$\rho(T_1x, T_2y, T_3z) \leq k \text{ maks } \Big\{\rho(x, y, z), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x, T_1x, T_2y) + \rho(y, T_2y, T_3z)\right], \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(y, T_1x, T_2y) + \rho(y, T_1x, T_3z\right]\Big\}$$

untuk semua $x, y, z \in X$ *yang* $k \in (0, 1)$. *Maka* T_1, T_2 *dan* T_3 *mempunyai titik tetap sepunya yang bitara*.

Bukti. Pilih sebarang titik $x_0 \in X$ dan takrifkan

$$x_{3n+1} = T_1 x_{3n},\ x_{3n+2} = T_2 x_{3n+1} \text{ dan } x_{3n+3} = T_3 x_{3n+2}.$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}\rho(x_1, x_2, x_p) &= \rho(T_1 x_0, T_2 x_1, T_3 x_{p-1});\ \text{dengan } x_p = T_3 x_{p-1}\\ &\le k \text{ maks}\Big\{\rho(x_0, x_1, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, T_1 x_0, T_2 x_1) + \rho(x_1, T_2 x_1, T_3 x_{p-1})\right],\\ &\qquad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, T_1 x_0, T_2 x_1) + \rho(x_1, T_1 x_0, T_3 x_{p-1})\right]\Big\}\\ &= k \text{ maks}\left\{\rho(x_0, x_1, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right], 0\right\}\end{aligned}$$

Jika

$$\text{maks}\left\{\rho(x_0, x_1, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right], 0\right\} = \rho(x_0, x_1, x_p),$$

maka

$$\rho(x_1, x_2, x_p) \le k\rho(x_0, x_1, x_p).$$

Jika sebaliknya,

$$\begin{aligned}&\text{maks}\left\{\rho(x_0, x_1, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right], 0\right\}\\ &\qquad = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right],\end{aligned}$$

maka

$$\rho(x_1, x_2, x_p) \le \left(\tfrac{k}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right]$$

sehingga

$$\rho(x_1, x_2, x_p) \le \tfrac{k}{(2-k)}\, \rho(x_0, x_1, x_2) \le k\rho(x_0, x_1, x_2).$$

Juga

$$\begin{aligned}\rho(x_2, x_3, x_p) &= \rho(T_2 x_1, T_3 x_2, T_1 x_{p-1});\ \text{dengan } x_p = T_1 x_{p-1}\\ &= k \text{ maks}\Big\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, T_2 x_1, T_3 x_2) + \rho(x_2, T_3 x_2, T_1 x_{p-1})\right],\\ &\qquad \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_2, T_2 x_1, T_3 x_2) + \rho(x_2, T_2 x_1, T_1 x_{p-1})\right]\Big\}\\ &= k \text{ maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_3) + \rho(x_2, x_3, x_p), 0\right]\right\}.\end{aligned}$$

Jika

$$\text{maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right], 0\right\} = \rho(x_1, x_2, x_p),$$

maka

$$\rho(x_2, x_3, x_p) \le k\rho(x_1, x_2, x_p) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_p)$$

atau

$$\rho(x_2, x_3, x_p) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_2).$$

Sebaliknya jika

$$\begin{aligned}\text{maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right], 0\right\}\\ = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right],\end{aligned}$$

maka $\rho(x_2, x_3, x_p) \le k\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right]$

sehingga

$$\begin{aligned}\rho(x_2, x_3, x_p) &\le \tfrac{k}{(2-k)}\rho(x_1, x_2, x_3)\\ &\le k\rho(x_1, x_2, x_3) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_p),\end{aligned}$$

atau $\rho(x_2, x_3, x_p) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_2)$.

Jika proses ini kita ulangi sebanyak *n* kali, maka akan diperoleh

$$\rho(x_n, x_{n+1}, x_p) \le k^n\rho(x_0, x_1, x_2) \text{ atau } \rho(x_n, x_{n+1}, x_p) \le k^n\rho(x_0, x_1, x_p).$$

Maka untuk sebarang *n*, *m* dan *p*, dengan $p > m > n$, diperoleh

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m, x_p) \le \rho(x_n, x_{n+1}, x_m) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) + \cdots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m)\\ + \rho(x_n, x_{n+1}, x_p) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_p) + \cdots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_p).\end{aligned}$$

Oleh itu,

$$\rho(x_n, x_m, x_p) \le \sum_{i=0}^{m-2}\left(k^{n+i}\rho(x_0, x_1, x_2) + k^{n+i}\rho(x_0, x_1, x_2)\right)$$

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m, x_p) &\le 2.M\sum_{i=0}^{m-2} k^{n+i}\\ &= \frac{(2.M\ k^n)}{(1-k)}\end{aligned}$$

atau

$$\rho(x_n, x_m, x_p) \le \sum_{i=0}^{m-2} \left(k^{n+i} \rho(x_0, x_1, x_m) + k^{n+i} \rho(x_0, x_1, x_p) \right)$$

$$\rho(x_n, x_m, x_p) \le 2.M \sum_{i=0}^{m-2} k^{n+i}$$

$$= \frac{(2.M\, k^n)}{(1-k)}$$

Oleh kerana $M > 0$ adalah suatu pemalar dan kerana had $k^n = 0$, maka $\{x_n\}$ merupakan jujukan 2-Cauchy. Oleh kerana $(X\,;\rho)$ merupakan ruang 2-metrik yang 2-lengkap, maka wujud $u \in X$ sehinggakan jujukan $\{x_n\}$ menumpu ke *u*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahawa *u* merupakan titik tetap sepunya bagi T_1, T_2 dan T_3. Pilih sebarang $z \in X$. Maka

$$\rho(T_1u, u, z) \le \rho(T_1u, u, x_{3n+2}) + \rho(T_1u, x_{3n+2}, z) + \rho(x_{3n+2}, u, z). \qquad (2.1)$$

Jadi

$$\rho(T_1u, x_{3n+2}, z) = \rho(T_1u, T_2x_{3n+1}, T_3c)\,; \text{ dengan } T_3c = z$$

$$\le k \text{ maks}\Big\{ \rho(u, x_{3n+1}, c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u, T_1u, T_2x_{3n+1}) + \rho(x_{3n+1}, T_2x_{3n+1}, T_3c\right],$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_{3n+1}, T_1u, T_2x_{3n+1}) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, T_3c)\right]\Big\}$$

$$= k \text{ maks } \Big\{ \rho(u, x_{3n+1}, c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u, T_1u, x_{3n+2}) + \rho(x_{3n+1}, x_{3n+2}, z)\right],$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_{3n+1}, T_1u, x_{3n+1}) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, z)\right]\Big\}. \qquad (2.2)$$

Jika diambil had pada ketaksamaan (2.2) dan digantikan ke dalam ketaksamaan (2.1), akan diperoleh $\rho(T_1u, u, z) \le \left(\tfrac{1}{2}\right) k\rho(T_1u, u, z)$. Oleh kerana $k \in (0, 1)$, maka $\rho(T_1u, u, z) = 0$. Maknanya $T_1u = u$. Dengan cara yang sama boleh ditunjukkan bahawa $T_2u = u$ dan juga $T_3u = u$.

Berikut ini akan ditunjukkan bahawa u bitara. Misalkan wujud $v \in X$ yang juga titik tetap bagi T_1, T_2 dan T_2 . Pilih sebarang $z \in X$. Maka

$$\begin{aligned}\rho(u,v,z) &= \rho(T_1u, T_2v, T_3c);\ T_3c = z\\ &\le k \text{ maks } \left\{ \rho(u,v,c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u, T_1u, T_2v) + \rho(v, T_2v, T_3c)\right],\right.\\ &\qquad \left.\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(v, T_1u, T_2v) + \rho(v, T_2u, T_3c)\right]\right\}\\ &= k \text{ maks}\left\{ \rho(u,v,c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u,u,v) + \rho(v,v,z)\right],\right.\\ &\qquad \left.\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(v,u,v) + \rho(v,u,z)\right]\right\}\\ &= k \text{ maks } \left\{ \rho(u,v,c), 0, \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(v,u,z) \right\}.\end{aligned}$$

Jika maks $\left\{ \rho(u,v,c), 0, \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(v,u,z) \right\} = \rho(u,v,c)$, maka $\rho(u,v,z) \le k\rho(u,v,c)$. Apabila proses ini dilakukan sebanyak n kali, maka akan diperoleh

$$\rho(u,v,z) \le k^n \rho(u,v,x) \text{ untuk suatu } x \in X.$$

Oleh kerana $k \in (0,1)$, maka $\rho(u,v,z) = 0$. Maknanya $u = v$.

Catatan:

1. Jika semua T_1, T_2, T_3 merupakan pemetaan 2-mengecut, maka syarat ketaksamaan di dalam Teorem 2.1. akan dipenuhi. Oleh yang demikian Teorem 2.1. di atas merupakan perluasan kepada teorem yang dibuktikan oleh Mashadi dan Abu Osman [6].
3. Jika dalam teorem di atas $T_1 = T_2 = T_3$, maka teorem tersebut juga benar, yang mana bentuknya menjadi seperti berikut:

Teorem 2.2. *Misalkan T suatu pemetaan pada ruang 2-metrik terbatas 2-lengkap $(X;\rho)$ kepada dirinya sendiri dan memenuhi ketaksamaan*

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty,Tz) \le k \text{ maks}&\left\{ \rho(x,y,z), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x,Tx,Ty) + \rho(y,Ty,Tz)\right],\right.\\ &\left.\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(y,Tx,Ty) + \rho(y,Tx,Tz)\right]\right\}\end{aligned}$$

untuk semua $x, y, z \in X$ dan $k \in (0,1)$. Maka T mempunyai titik tetap bitara.

Teorem 2.3. *Misalkan* T_1, T_2 *dan* T_3 *tiga pemetaan pada ruang 2-metrik terbatas 2-lengkap* $(X\ ;\rho)$ *kepada dirinya sendiri dan memenuhi ketaksamaan*

$$\rho\left(T_1x, T_2y, T_3z\right) \le k \ maks \Big\{ \rho(x,y,z)\,, \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x, T_1x, T_2y) + \rho(y, T_2y, T_3z)\right],$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(y, T_1x, T_2y) + \rho(y, T_1x, T_3z)\right],$$
$$\frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)\rho\,(y,T_1x,T_2y)\,[1+\rho(x,T_1x,T_2y)+\rho(y,T_1x,T_3z)]}{1+\rho(x,y,z)},$$
$$\frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(\,y,T_1x,T_3z)\,[1+\rho(\,y,T_2y,T_3z)+\rho(y,T_1x,T_2y)]}{1+\rho(x,y,z)}\Big\}$$

untuk semua $x, y, z \in X$ *dan* $k \in (0,1)$. *Maka* T_1, T_2 *dan* T_3 *mempunyai titik tetap bitara sepunya.*

Bukti. Pilih sebarang titik $x_0 \in X$ dan takrifkan $x_{3n+1} = T_1x_{3n+2} = T_2x_{3n+1}$ dan $x_{3n+3} = T_3x_{3n+2}$. Maka diperoleh

$$\rho(x_1, x_2, x_p) = \rho(T_1x_0, T_2x_1, T_3x_{p-1})\,;\ \text{dengan}\ x_p = T_3x_{p-1}$$
$$\le k \ \text{maks} \Big\{ \rho(x_0, x_1, x_p)\,, \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, T_1x_0, T_2x_1) + \rho(x_1, T_1x_1, T_3x_{p-1})\right],$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\rho(x_1, T_1x_0, T_2x_1) + \rho(x_1, T_1x_0, T_3x_{p-1})\right],$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}\rho(x_1,T_1x_0,T_2x_1)\,[1+\rho(x_0,T_1x_0,T_2x_1)+\rho(x_1,T_1x_0,T_3x_{p-1})]}{1+\rho(x_0,x_1,x_p)},$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}\rho(x_1,T_1x_0,T_3x_{p-1})\,[1+\rho(x_1,T_2x_1,T_3x_{p-1})+\rho(x_1,T_1x_0,T_2x_1)]}{1+\rho(x_0,x_1,x_p)}\Big\}$$
$$= k \ \text{maks} \Big\{ \rho(x_0, x_1, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right], 0, 0, 0 \Big\}.$$

Jika

$$\text{maks}\Big\{\rho(x_0, x_1, x_p)\,, \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right], 0 \Big\} = \rho(x_0, x_1, x_p),$$

maka $\rho(x_1, x_2x_3) \le k\rho(x_0, x_1, x_p)$.

Sebaliknya jika

$$\text{maks}\left\{\rho(x_0, x_1, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right], 0\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)\right],$$

maka $\rho(x_1, x_2, x_p) \le k\left(\tfrac{1}{2}\right)[\rho(x_0, x_1, x_2) + \rho(x_1, x_2, x_p)]$

sehingga $\rho(x_1, x_2, x_p) \le \frac{k}{(2-k)}\rho(x_0, x_1, x_2) \le k\rho(x_0, x_1, x_2)$.

Begitu juga

$$\rho(x_2, x_3, x_p) = \rho(T_2x_1, T_3x_2, T_1x_{p-1});\ x_p = T_1x_{p-1}$$
$$\le k \text{ maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, T_2x_1, T_3x_2) + \rho(x_2, T_3x_2, T_1x_{p-1})\right],\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{2}\left[\rho(x_2, T_2x_1, T_3x_2) + \rho(x_2, T_2x_1, T_1x_{p-1})\right]\right\}$$
$$= k \text{ maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_3) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right], 0\right\}.$$

Jika

$$\text{maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right], 0\right\} = \rho(x_1, x_2, x_p),$$

maka

$$\rho(x_2, x_3, x_p) \le k\rho(x_1, x_2, x_p) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_p)$$

atau

$$\rho(x_2, x_3, x_p) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_2).$$

Sebaliknya jika

$$\text{maks}\left\{\rho(x_1, x_2, x_p), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)\right], 0\right\}$$
$$= (1/2)\left[\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p\right],$$

maka $\rho(x_2, x_3, x_p) \le k\left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(x_1, x_2, x_p) + \rho(x_2, x_3, x_p)]$

sehingga $\rho(x_2, x_3, x_p) \le \frac{k}{(2-k)}\rho(x_1, x_2, x_3) \le k\rho(x_1, x_2, x_3) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_p)$

atau $\rho(x_2, x_3, x_p) \le k^2\rho(x_0, x_1, x_2)$.

Jika proses ini diulangi sebanyak n kali, maka akan diperoleh

$$\rho(x_n, x_{n+1}, x_p) \le k^n\rho(x_0, x_1, x_2) \text{ atau } \rho(x_n, x_{n+1}, x_p) \le k^n\rho(x_0, x_1, x_p).$$

Maka untuk sebarang *n*, *m* dan *p* yang $p > m > n$, diperoleh

$$\rho(x_n, x_m, x_p) \leq \rho(x_n, x_{n+1}, x_m) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) + \cdots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) +$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}, x_p) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_p) + \cdots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_p)$$

maka $\rho(x_n, x_m, x_p) \leq \sum_{i=0}^{m-2} (k^{n+i}\rho(x_0, x_1, x_2) + k^{n+i}\rho(x_0, x_1, x_2))$,

sehingga $\rho(x_n, x_m, x_p) \leq 2.M \sum_{i=0}^{m-2} k^{n+i} = \dfrac{(2.M\ k^n)}{(1-k)}$

atau $\rho(x_n, x_m, x_p) \leq \sum_{i=0}^{m-2} (k^{n+i}\rho(x_0, x_1, x_m) + k^{n+i}\rho(x_0, x_1, x_p))$

sehingga $\rho(x_n, x_m, x_p) \leq 2.M \sum_{i=0}^{m-2} k^{n+i} = \dfrac{(2.M\ k^n)}{(1-k)}$.

Oleh kerana $M > 0$ adalah suatu pemalar dan kerana had $k^n = 0$, maka $\{x_n\}$ merupakan jujukan 2-Cauchy. Oleh kerana $(X ; \rho)$ merupakan ruang 2-metrik yang 2-lengkap, maka wujud $u \in X$ sehinggakan jujukan $\{x_n\}$ menumpu ke *u*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahawa u merupakan titik tetap sepunya dari T_1, T_2 dan T_3. Pilih sebarang $z \in X$. Maka

$$\rho(T_1u, u, z) \leq \rho(T_1u, u, x_{3n+2}) + \rho(T_1u, x_{3n+2}, z) + \rho(x_{3n+2}, u, z) \qquad (2.3)$$

Jadi $\rho(T_1u, x_{3n+2}, z) = \rho(T_1u, T_2x_{3n+1}, T_3c)$; dengan $T_3c = z$

$$\leq k \text{ maks } \Big\{ \rho(u, x_{3n+1}, c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u, T_1u, T_2x_{3n+1}) + \rho(x_{3n+1}, T_2x_{3n+1}, T_3c) \right],$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_{3n+1}, T_1u, T_2x_{3n+1}) + \rho(x_{3n+1}, T_2u, T_3c) \right],$$
$$\frac{\frac{1}{2}\rho(x_{3n+1}, T_1u, T_2x_{3n+1})[1+\rho(u, T_1u, T_2x_{3n+1}) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, T_3c)]}{1+\rho(u, x_{3n+1}, c)},$$
$$\frac{\frac{1}{2}\rho(x_{3n+1}, T_1u, T_3c)[1+(x_{3n+1}, T_2x_{3n+1}, T_3c) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, T_3x_{3n+1})]}{1+\rho(u, x_{3n+1}, c)} \Big\}$$

$$= k \text{ maks } \Big\{ \rho(u, x_{3n+2}, c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u, T_1u, x_{3n+2}) + \rho(x_{3n+1}, x_{3n+2}, z) \right],$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(x_{3n+1}, T_1u, x_{3n+2}) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, z)\right],$$

$$\frac{\frac{1}{2}\rho(x_{3n+1}, T_1u, x_{3n+2})[1+\rho(u, T_1u, x_{3n+2}) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, z)]}{1+\rho(u, x_{3n+1}, c)},$$

$$\left.\frac{\frac{1}{2}\rho(x_{3n+1}, T_1u, z)[1+\rho(x_{3n+1}, T_2x_{3n+1}, z) + \rho(x_{3n+1}, T_1u, x_{3n+2})]}{1+\rho(u, x_{3n+1}, c)}\right\} \tag{2.4}$$

Jika diambil had pada ketaksamaan (2.4) dan digantikan ke dalam ketaksamaan (2.3), maka akan diperoleh $\rho(T_1u, u, z) \le \left(\frac{k}{2}\right)\rho(T_1u, u, z)$.
Oleh kerana $k \in (0,1)$, maka $\rho(T_1u, u, z) = 0$. Maknanya $T_1u = u$. Dengan cara yang sama boleh ditunjukkan bahawa $T_2u = u$ dan juga $T_3u = u$.

Berikut ini akan ditunjukkan bahawa u bitara. Misalkan wujud $v \in X$ yang juga titik tetap sepunya bagi T_1, T_2 dan T_3. Pilih sebarang $z \in X$. Maka

$$\rho(u, v, z) = \rho(T_1u, T_2v, T_3c);\ \text{dengan } T_3c = z$$

$$\le k \text{ maks}\Big\{ \rho(u, v, c), \left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(u, T_1u, T_2v) + \rho(v, T_2v, T_3c)\right],$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\rho(v, T_1u, T_2v) + \rho(v, T_1u, T_3c) \right],$$

$$\frac{\frac{1}{2}\rho(v, T_1u, T_2v)\left[1+\rho(u, T_1u, T_2v) + \rho(v, T_1u, T_3c)\right]}{1+\rho(u, v, c)},$$

$$\left.\frac{\frac{1}{2}\rho(v, T_1u, T_3c)\left[1+\rho(v, T_2v, T_3c) + \rho(v, T_1u, T_2v)\right]}{1+\rho(u, v, c)}\right\}$$

$$= k \text{ maks}\left\{\rho(u, v, c), 0, \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(v, u, z), 0, \frac{\frac{1}{2}\rho(u, v, c)}{1+\rho(u, v, c)}\right\}.$$

Jika $\text{maks}\left\{ \rho(u, v, c), 0, \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(v, u, z), 0, \frac{\frac{1}{2}\rho(u, v, c)}{1+\rho(u, v, c)}\right\} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(u, v, z)$,

maka $\rho(u, v, z) \le \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(u, v, z)$ dan hal ini mustahil. Sebaliknya jika

$$\text{maks}\left\{\rho(u,v,c), 0, \left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(v, u, z), 0, \frac{\frac{1}{2}\rho(u, v, c)}{1+\rho(u, v, c)}\right\} = \frac{\frac{1}{2}\rho(u, v, c)}{1+\rho(u, v, c)},$$

maka $\rho(u,v,z) \le \dfrac{\frac{1}{2}\rho(u,v,c)}{1+\rho(u,v,c)}$. Ini bererti $1+\rho(u,v,c) \le \left(\frac{1}{2}\right)$ dan hal ini mustahil. Jadi haruslah

$$\text{maks}\left\{ \rho(u,v,c)\,,0\,,\left(\tfrac{1}{2}\right)\rho(v,u,z)\,,0\,,\ \frac{\frac{1}{2}\rho(u,v,c)}{1+\rho(u,v,c)}\right\} = \rho(u,v,c)\,,$$

sehingga $\rho(u,v,z) \le k\,\rho(u,v,c)$.
Apabila proses ini dilakukan sebanyak n kali, maka akan diperoleh $\rho(u,v,z) \le k^n \rho(u,v,x)$ untuk suatu $x \in X$. Oleh kerana $k \in (0,1)$, maka haruslah $\rho(u,v,z) = 0$. Maknanya $u = v$.

Catatan. Untuk sebarang $x_0 \in X$, takrifkan $x_{2n-1} = T_0 x_{2n-2}$ dan $x_{2n} = T_n x_{2n-1}$. Maka Teorem 2.3 di atas boleh dikembangkan menjadi teorem berikut yang buktinya kami tinggalkan kerana serupa dengan pembuktian Teorem 2.3.

Teorem 2.4. *Misalkan $T_0, T_n, n = 1,2,3,\cdots$ masing-masingnya pemetaan pada ruang 2-metrik terbatas 2-lengkap $(X:\rho)$ kepada dirinya sendiri dan memenuhi syarat ketaksamaan*

$$\begin{aligned}\rho\big(T_0x, T_ny, T_mz\big) \le k\ \text{maks}\Big\{&\rho(x,y,z)\,,\left(\tfrac{1}{2}\right)\big[\rho(x,T_0x,T_ny)+\rho(y,T_ny,T_mz)\big],\\ &\left(\tfrac{1}{2}\right)\big[\rho(y,T_0x,T_ny)+\rho(y,T_0x,T_mz\big]\,,\\ &\frac{\frac{1}{2}\rho(y,T_0x,T_ny)\,[1+\rho(x,T_0x,T_ny)+\rho(y,T_0x,T_mz)]}{1+\rho(x,y,z)}\,,\\ &\frac{\frac{1}{2}\rho(y,T_0x,T_mz)\,[1+\rho(y,T_ny,T_mz)+\rho(y,T_0x,T_ny)]}{1+\rho(x,y,z)}\Big\}\end{aligned}$$

untuk semua $x,y,z \in X$ dan $k \in (0,1)$. Maka wujud $u \in X$ sehinggakan $T_n u = u$ untuk semua $n = 1,2,\cdots$.

Rujukan

1. Y.J. Cho, Fixed point for compatible mapping of type (A), *Math. Japon* **38** (1993), 497-508.
2. Y.J. Cho dan S.C. Park, Coincidence theorem in 2-metric space, *SEAMS Bull. Math.* **20** (1995), 127-133.
3. S. Gahler, 2-metrische raume und ihr topologische struktur, *Math. Nachr.* **26** (1963-64), 115-148.
4. K. Iseki, Fixed point theorem in 2-metric space, *Math. Sem. Note* **3** (1985), 133-136.
5. S.N. Lal and A.K. Singh,. An analogue of Banach's contraction principle for 2-metric spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* **18** (1978), 137-143.
6. Mashadi dan Abu Osman bin Md Tap, Teorem titik tetap pemetaan 2-mengecut pada ruang 2-metrik. Akan terbit dalam *J. Matematika UTM*.
7. Mashadi dan Abu Osman bin Md Tap, Teorem titik tetap pemetaan selanjar 2-orbital pada ruang 2-metrik. Pracetak, diserah untuk penerbitan *J. Sains Malaysiana*.
8. B.G. Pachpatte, Fixed point theorems for contraction type mapping on 2-metric space, *Proc. Nat. Acad. Sci. India* **14** II (1978), 94-102
9. H.K. Pathak. dan R.P. Dubey, Some fixed point theorem in 2-metric space, *The Math. Edu.* **115** (1991), 1-16.
10. S.L. Singh dan B. Ram, A note on the convergence of sequences of mapping and their common fixed point in 2-metric space, *Math. Sem. Note* **9** (1981), 181-185.