KEKONVERGENAN DERET RECIPROCALS PRIMA YANG BERHUBUNGAN DENGAN BILANGAN FERMAT

Apriadi[1*], **Sri Gemawati**[2], **Musraini**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

*apriadi.matematika08@gmail.com

ABSTRACT

In article we study the densities of several sets connected with the Fermat numbers $F_m = 2^{2^m} + 1$. This article is a review of the article of Krizek et al. [*Journal of Number Theory*, 97(2001): 95-112]. In particular, the series of reciprocals of all primes divisors of Fermat numbers is proved to be convergent. The series of reciprocals of elite primes is also shown to be convergent.

Keywords: Fermat numbers, elite primes, sum of reciprocals, density

ABSTRAK

Artikel ini mempelajari densitas dari beberapa himpunan yang berhubungan dengan bilangan Fermat $F_m = 2^{2^m} + 1$. Artikel ini merupakan *review* dari artikel Krizek dkk. [*Journal of Number Theory*, 97(2001): 95-112]. Secara khusus, deret kebalikan dari semua pembagi prima dari bilangan Fermat dibuktikan konvergen . Deret kebalikan dari bilangan prima elit juga ditunjukkan konvergen.

Kata kunci: Bilangan Fermat, prima elit, penjumlahan dari reciprocals, densitas

1. PENDAHULUAN

Bilangan prima merupakan salah satu materi penting pada bidang teori bilangan sebagai elemen himpunan bagian dari himpunan bilangan bulat positif. Bilangan prima adalah bilangan bulat positif $n > 1$ yang hanya memiliki dua faktor yaitu satu dan bilangan itu sendiri sedangkan bilangan lainnya disebut bilangan komposit. Dalam bidang teori bilangan, bilangan prima sering menjadi topik pembelajaran utama diantaranya hubungan antara bilangan prima dan bilangan Fermat.

Bilangan Fermat adalah bilangan bulat dalam bentuk $F_m = 2^{2^m} + 1$, dimana $m \geq 0$. Diberi nama bilangan Fermat karena untuk menghormati Pierre de Fermat (1601-1665)yang sangat yakin bahwa bilangan tersebut selalu prima. Pada tahun

1732, Leonhard Euler menyangkal pernyatan Fermat dengan memfaktorkan F_5. Saat ini, dugaan yang berlaku tampaknya tidak ada bilangan prima Fermat di luar $m = 4$ yang ada. Sebuah syarat perlu dan cukup untuk primalitas dari setiap bilangan Fermat disediakan oleh uji Pepin.

Dalam Artikel ini menggunakan p dan q untuk notasi bilangan prima. Untuk subset A dari semua bilangan bulat positif dan setiap bilangan real x misalkan $A(x) := A \cap [0, x]$. Dinotasikan P himpunan semua bilangan prima yang terdapat m sehingga p membagi F_m. Dengan hasil diketahui dari Goldbach [3], dua bilangan Fermat berbeda adalah relatif prima. Dengan demikian, setiap anggota $p \in P$ membagi bilangan Fermat tunggal.

Persoalan utama yang akan dibahas dalam Artikel ini menyangkut kekonvergenan deret reciprocals dari P. Akan ditunjukkan bahwa P adalah densitas asimtotik relatif nol sebagai subset dari semua bilangan prima. Pada tahun 1955, Golomb [2] mengatakan jika deret

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

adalah konvergen. Akan diberikan bukti yang lebih rinci pada persoalan ini. Dimulai dengan menunjukkan batas atas ukuran dari himpunan $P(x)$.

2. KEKONVERGENAN DERET RECIPROCALS FAKTOR PRIMA BILANGAN FERMAT

Pada sub bab ini dibahas mengenai faktor prima dari bilangan Fermat. Berikut diberikan teorema-teorema yang berhubungan dengan faktor prima bilangan Fermat.

Teorema 1 [3, h. 59] Jika $m > 1$ dan p prima sehingga $p \mid F_m$, maka $p = k2^{m+2} + 1$ dengan k bilangan asli.

Bukti. Lihat [3, h. 59].

Teorema 2 [4] Kardinalitas dari himpunan faktor prima bilangan Fermat adalah terbatas, dapat dinotasikan sebagai

$$|P(x)| = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right), x \to \infty$$

Bukti. Berdasarkan Teorema (1), jika $p \mid F_m$ dan $m \geq 2$, maka diperoleh $p \equiv 1 (\mod 2^{m+2})$. Untuk setiap $n > 0$, misalkan

$$S_n = \{p \in P | p = 2^n k + 1, \text{untuk suatu } k \text{ ganjil}\} \qquad (1)$$

maka himpunan S_n merupakan partisi dari P. Karena $S_0 = \emptyset$,$S_1 = \{13\}$, $S_2 = \{5\}$, $S_3 = \emptyset$, $S_4 = \{17\}$, $S_5 = S_6 = \emptyset$, $S_7 = \{641, 6700417\}$ dan seterusnya. Untuk

$n \geq 3$, Jika $p \in S_n$ maka $p \mid F_m$ untuk suatu $m \geq 2$, kemudian dengan menggunakan Teorema Lucas [3], berlaku juga untuk $n \geq m+2$. Dapat ditulis

$$\prod_{p \in S_n} p \leq \prod_{m=0}^{n-2} F_m < F_{n-1} \tag{2}$$

dimana perkalian disisi kiri pada pertidaksamaan (2) adalah sama dengan 1 bila S_n himpunan kosong. Karena $p \geq 2^{n+1}$ untuk semua $p \in S_n$, ini menyatakan bahwa

$$(2^n + 1)^{|S_n|} < 2^{2^{n-1}} + 1,$$

sehingga

$$|S_n| < \frac{\log(2^{2^{n-1}} + 1)}{\log(2^{2^n}}$$

dengan menggunakan sifat bahwa

$$\frac{\log(y+1)}{\log(x+1)} < \frac{\log y}{\log x}, \text{ berlaku untuk semua } y > x > 1,$$

dengan $y = 2^{2^{n-1}}$ dan $x = 2^n$ maka diperoleh

$$|S_n| \leq \frac{2^{n-1}}{n}. \tag{3}$$

Pertidaksamaan (3) menyatakan

$$\sum_{j=1}^{n} |S_j| = 2 + \sum_{j=3}^{n} < 2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{2^{j-1}}{j} \leq c_1 \frac{2^n}{n}, \text{ untuk } n \geq 3,$$

maka

$$\sum_{j=1}^{n} |S_j| \leq c_1 \frac{2^n}{n}, \text{ untuk } n \geq 3, \tag{4}$$

dengan $c_1 = \frac{4}{3}$. Misalkan $x \geq 4$ dan pilih n sehingga

$$2^n < \sqrt{x} < 2^{n+1} \tag{5}$$

maka kedua pertidaksamaan (6) dan (7) berikut

$$2^n > \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{6}$$

$$n \leq c_2 \log x < n + 1 \tag{7}$$

terpenuhi dengan $c_2 = \frac{1}{log2}$. Dengan memilih n, dari pertidaksamaan (4)-(7), menyatakan bahwa bilangan prima $p \in P$ di dalam suatu S_j untuk suatu $j \leq n$ adalah

$$\sum_{j=1}^{n} |S_j| < c_1 \frac{2^n}{n} < c_3 \frac{\sqrt{x}}{\log x} = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right), x \to \infty$$

maka

$$\sum_{j=1}^{n} |S_j| = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right), x \to \infty \tag{8}$$

Selanjutnya untuk keterbatasan kardinalitas dari himpunan $p \in P(x)$ untuk $p \in S_j$ untuk suatu $j > n$. Tetapi dalam kasus ini, $p \equiv 1(\mod 2^{n+1})$. Menurut hasil dari [8], diketahui bahwa banyaknya bilangan prima tidak melebihi x yang kongruen dengan $1(\mod 2^{n+1})$ yang dinotasikan dengan $\pi(x; 1, 2^{n+1})$ adalah

$$\pi(x; 1, 2^{n+1}) < \frac{2x}{\phi(2^{n+1}) \log(x/2^{n+1})} = \frac{x}{2^{n-1} \log(x/2^{n+1})}$$

maka

$$\pi(x; 1, 2^{n+1}) < \frac{2x}{\phi(2^{n+1}) \log(x/2^{n+1})} = \frac{x}{2^{n-1} \log(x/2^{n+1})} \tag{9}$$

dengan ϕ adalah fungsi Euler Totient. Selanjutnya dengan menggunakan pertidaksamaan (5) dan (6) dapat disimpulkan bahwa bagian kanan (9) terbatas di atas oleh

$$\pi(x; 1, 2^{n+1}) < \frac{x}{2^{n-1} \log(x/2^{n+1})} < \frac{4\sqrt{x}}{\log(\sqrt{x}/2)} = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

maka

$$\pi(x; 1, 2^{n+1}) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right), x \to \infty \tag{10}$$

Akibat 3.1 Misalkan $\lambda > \frac{1}{2}$, maka kedua deret

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p^{\lambda}} \tag{11}$$

dan

$$\sum_{d \in D} \frac{1}{d^{\lambda}} \tag{12}$$

konvergen.

Bukti. Kekonvergenan deret (11) merupakan akibat langsung dari Teorema (2), sedangkan kekonvergenan deret (12) dari konvergenan deret (11). Secara umum pada Lema berikut:

Lema 3 [4] Misalkan A adalah sebarang himpunan bilangan bulat positif sehingga dua anggota yang berbeda dari A adalah relatif prima. Misalkan $D(A)$ adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang membagi suatu anggota dari A dan misalkan $P(A)$ adalah sub himpunan yang terdiri dari bilangan prima yang berada di $D(A)$. Misalkan $\lambda > 0$, maka deret

$$\sum_{p \in P(A)} \frac{1}{p^{\lambda}} \tag{13}$$

dan

$$\sum_{d\in D(A)} \frac{1}{d^\lambda} \tag{14}$$

keduanya konvergen atau keduanya divergen.

Bukti. Dapat dilihat bahwa jika (14) konvergen maka begitu juga (13), karena $P(A) \subseteq D(A)$. Asumsikan deret (14) adalah konvergen. Karena setiap dua anggota yang berbeda dari A adalah relatif prima, berikut bahwa deret (14) dapat ditulis

$$\sum_{d\in D(A)} \frac{1}{d^\lambda} = 1 + \sum_{\substack{a\in A\\ a>1}} \sum_{\substack{d|a\\ d>1}} \frac{1}{d^\lambda}$$

$$\sum_{d\in D(A)} \frac{1}{d^\lambda} = 1 + \sum_{\substack{a\in A\\ a>1}} \left(\frac{\sigma(a)}{a^\lambda} - 1\right) \tag{15}$$

untuk bilangan bulat positif n ditulis $\sigma_\lambda(n)$ untuk jumlah dari pangkat-λ dari semua pembagi n. Fungsi $\sigma_\lambda(n)/n^\lambda$ adalah *multiplicative*, dan jika p^t pangkat prima maka

$$\frac{\sigma_\lambda(p^t)}{p^t} = \sum_{k=0}^{t} \frac{1}{p^{k\lambda}} < \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(p^\lambda)^k} = 1 + \frac{1}{p^\lambda}$$

maka

$$\frac{\sigma_\lambda(p^t)}{p^t} < 1 + \frac{1}{p^\lambda} \tag{16}$$

dengan demikian, dengan menggunakan multiplicative fungsi $\sigma(n)/n^\lambda$ dan pertidaksamaan (16) dapat disimpulkan bahwa jika n adalah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{\sigma_\lambda(p^t)}{p^t} < \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p^\lambda + 1}\right) < e^{\sum_{p|n} \frac{1}{p^\lambda - 1}}. \tag{17}$$

Untuk pertidaksamaan (17), gunakan sifat bahwa $1 + x < e^x$ untuk semua $x > 0$, dari pertidaksamaan (15), diperoleh

$$\sum_{d\in D(A)} < 1 + \sum_{\substack{a\in A\\ a>1}} \left(e^{\sum_{p|n} \frac{1}{p^\lambda - 1}} - 1\right) \tag{18}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa deret

$$\sum_{p\in P(A)} \frac{1}{p^\lambda + 1} \tag{19}$$

adalah konvergen, karena rasio antara bentuk umum dari deret (19) dan (13), rasio $(p^\lambda - 1/p^\lambda)$ menuju ke 1 dan deret (13) adalah konvergen. Akibatnya, ada suatu konstanta C_1 sehingga

$$\sum_{p\in P(A)} \frac{1}{p^\lambda + 1} \tag{20}$$

Misalkan $f : [0, C_1] \to \{1, \infty)$ fungsi diberikan oleh

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , \text{ untuk } x \in (0, C_1), \\ 1 & , \text{ untuk } x = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Fungsi f pasti kontinu pada interval tertutup $[0, C_1]$ dan terbatas. Dengan dengan demikian terdapat konstanta C_2 sehinggga

$$e^x < C_2 x \text{ berlaku untuk semua } x \in [0, C_1]. \tag{22}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (20) dan (22), maka diperoleh

$$e^{\sum_{p|n} \frac{1}{p^\lambda - 1}} - 1 < C_2 \sum_{p|a} \frac{1}{p^\lambda - 1} \tag{23}$$

berlaku untuk semua $a \in A$. Dari pertidaksamaan (18), (20) dan (23) dan karena dua anggota dari A adalah relatif prima, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{d \in D(A)} \frac{1}{d^\lambda} &< 1 + \sum_{\substack{a \in A \\ a > 1}} \left(e^{\sum_{p|n} \frac{1}{p^\lambda - 1}} - 1 \right) \\ &< 1 + C_2 \sum_{\substack{a \in A \\ a > 1}} \sum_{p|a} \frac{1}{p^\lambda - 1} \\ &< 1 + C_2 \sum_{p \in P(A)} \frac{1}{p^\lambda - 1} \\ &< 1 + C_1 C_2 \end{aligned}$$

maka

$$\sum_{d \in D(A)} \frac{1}{d^\lambda} < 1 + C_1 C_2 \tag{24}$$

yang menyatakan bahwa (12) adalah konvergen.

3. KEKONVERGEN DERET RECIPROCALS BILANGAN PRIMA ELIT

Pada sub bab ini dibahas mengenai bilangan prima elit. Dalam [1], Aigner memperkenalkan konsep prima elit, sebagai bilangan prima p sehingga p adalah bukan residu kuadrat modulo F_m untuk semua tapi ada hingga banyaknya nilai dari m. Artinya, bilangan prima elit yang tepat bilangan prima p dapat menerapkan Uji Pepin dengan $a = p$ untuk menentukan primalitas dari F_m. Aigner menemukan hanya 14 bilangan prima elit di bawah $35 \times [10]^6$ beberapa yang pertama 3, 5, 7, 41, 15.361, ... dan yang terbesar di bawah $35 \times [10]^6$ menjadi 14.172.161 Oleh karena itu ada begitu sedikit bilangan prima elit dalam kisaran yang relatif besar. Misalkan E adalah himpunan semua bilangan prima elit.

Teorema 4 [4] Kardinalitas dari himpunan bilangan prima elit terbatas, dapat dinotasikan sebagai berikut

$$|E(x)| = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right), x \to \infty. \tag{25}$$

Bukti. Dimulai dengan bilangan bulat positif besar x dan hitung berapa banyak bilangan prima $p \leq x$ yang merupakan elit. Asumsikan bahwa $p \geq \sqrt{x}$ karena hanya ada $o(\sqrt{x}) = O(x/(\log x)^2)$ bilanga prima dibawah $\sqrt{x}$. Untuk bilangan prima $p \geq x$ tulis

$$p - 1 = 2^{e_p} k_p \tag{26}$$

dengan $e_p \geq 1$ dan $k_p c_1 = \frac{1}{\log 2}$ dan $c_2 > 0$merupakan konstanta mutlak. Perhatikan bahwa untuk $O\left(\frac{x}{\log x^2}\right)$ prima $p \leq x$ dalam pertidaksamaan

$$e_p < c_1 \log\log x - c_2 \tag{27}$$

berlaku. Misalkan $t = \lfloor c_1 \log\log x - c_2 \rfloor$ dan asumsikan p sehingga $e_p \geq t$. p adalah bilngan prima yang kongruen untuk $1 \mod 2^t$. Berdasarkan hasil dari [7], banyaknya bilangan prima yang tidak lebih dari x adalah

$$\pi(x; 1, 2^t) < \frac{2t}{2^{t-1}\log(x/2^t)}, \tag{28}$$

perhatikan bahwa

$$\sqrt{x} > 2^t \tag{29}$$

berlaku untuk $x > c_3$. Secara khusus, $x/2^t > \sqrt{x}$ untuk $x > c_3$ dan pertidaksamaan (28) menyatakan bahwa

$$\pi(x; 1, 2^t) < \frac{16x}{2^{t+1}\log x} \leq \frac{2^{c_2+4}x}{(\log x/2)} = O\left(\frac{x}{(\log x/2)}\right), x \to \infty$$

maka

$$\pi(x; 1, 2^t) = O\left(\frac{x}{(\log x/2)}\right), x \to \infty. \tag{30}$$

Misalkan suatu bilangan prima elit p dengan $p \leq x$ dan $e_p < t$. Perhatikan bahwa untuk p,

$$k_p = \frac{p-1}{2^{e_p}} > \frac{-1}{2^t} > \frac{c_4\sqrt{x}}{\log x} > x^{(1/3)}, \text{ untuk } x > c_5 \tag{31}$$

Pada pertidaksamaan (31) ambil $c_4 = 2^{c_2-1}$ dan $c_5 > c_3$. Dinotasikan f_p merupakan *multiplicative order* dari $2 \mod k_p$. Artinya, f_p merupakan bilangan bulat terkecil dengan $k_p \mid (2_p^f - 1)$. Secara khusus, dari pertidaksamaan (31), menyatakan bahwa

$$2^{f_p} > k_p > x^{1/3}$$

maka

$$f_p > c_6 \log x, \tag{32}$$

dengan $c_6 = \frac{1}{3\log 2}$. Perhatikan bahwa barisan $\{F_m\}_m \geq 0$ merupakan periodic modulo p untuk $m \geq e_p$ dengan periode f_p. Perhatikan bahwa

$$F_m \equiv F_{m+f_p}(\mod p), \text{ untuk } m \geq e_p \tag{33}$$

ekivalen dengan

$$2^{2^m(2^{f_p}-1)} \equiv 1(\mod p). \tag{34}$$

Karena $m \geq e_p$ dan $k_p \mid (2^{f_p} - 1)$, ini menunjukkan bahwa $(p-1) \mid 2^m(2^{f_p} - 1)$ sehingga (35) memenuhi Teorema Fermats Little. Selanjutnya, dari (33) diperoleh bahwa p merupakan prima elit jika F_m bukan residu kuadrat modulo p untuk $m \geq e_p$. Karena F_m kongruen dengan $1 \mod 4$ untuk semua $m \geq 1$, ini menunjukkan hukum dari kuadrat *reciprocality*, bahwa

$$\frac{F_m}{p} = \frac{p}{F_m}, \text{ berlaku untuk semua } m \geq 1.$$

Dimana untuk dua bilangan bulat a dan b dengan $b > 1$ ganjil gunakan (a/b) untuk menotasikan simbol Jacobi dari a terhadap b.

Sehingga p merupakan kuadrat non residu modulo F_m jika dan hanya jika F_m merupakan kuadrat non residu modulo p, maka dari (33) menunjukkan bahwa ada tak hingga banyaknya. Kerenanya p merupakan kuadrat non residu modulo tak hingga bilangan Fermat, kontradiksi dengan fakta bahwa p merupakan elit. Karena $e_p < t$, ini menunjukkan bahwa

$$F_t, F_{t+1}, \ldots, F_{2t} \tag{35}$$

merupakan semua kuadrat non residu modulo p. Perhatikan bahwa bilangan yang ada dalam (35) merupakan independen dari bilangan p (mereka hanya tegantung pada x). Perhatikan bahwa

$$\prod_{i=0}^{t} F_{t+i} < x^{1/3} \tag{36}$$

untuk $x < c_7$.

$$\prod_{i=0}^{t} F_{t+i} < \prod_{i=0}^{2t} F_i < 2^{2^{t+1}},$$

dan pertidaksamaan

$$2^{2^{t+1}} < x^{1/3}$$

ekivalen dengan

$$(t+1)\log 2 + \log\log 2 < \log\log x - \log 3,$$

yang berlaku jika

$$(c_1 \log\log x - c_2 + 1)\log 2 < \log\log x - \log 3 - \log\log 2,$$

yang ekivalen dengan

$$c_2 \log 2 > \log 2 + \log 3 + \log\log 2. \tag{37}$$

Dengan demikian, pilih c_2 sehingga(37) berlaku. Ini menyatakan bahwa (35) berlaku juga. Secara khusus, semua bilangan dari (35) lebih kecil dari p, sehingga dua darinya tidak kongruen modulo p. Untuk $i = 0, 1, \ldots, t$ diberikan

$$F_{t+1} = S_i U_i^2, \tag{38}$$

dimana S_i merupakan kuadrat bebas. Ini juga diketahui bahwa tidak ada bilangan Fermat yang merupakan kuadrat sempurna. Maka $S_i > 1$ untuk semua $i = 0, 1, , t$ dan karena dua bilangan Fermat adalah relatif prima, ini menunjukkan bahwa dua bilangan S_i juga relatif prima. Syarat bahwa semua bilangan pada (35) merupakan kuadrat non risudu modulo p adalah ekivalen dengan

$$\left(\frac{S_i}{p}\right) = -1, \text{untuk } i = 0, 1, \ldots, t. \tag{39}$$

Karena setiap prima pembagi F_m kongruen dengan $1 \mod 4$ untuk setiap $m \geq 1$, ini menunjukkan bahwa S_i kongruen dengan $1 \mod 4$. Maka(39) ekivalen dengan

$$\left(\frac{p}{S_i}\right) = -1, \text{untuk } i = 0, 1, \ldots, t. \tag{40}$$

Untuk i tetap, pertidaksamaan (40), karena S_i kuadrat bebas, dan setiap bilangan prima ganjil q ada $(q-1)/2$ kuadrat residu modulo q, menunjukkan bahwa dari semua $\phi(S_i)$ dalam bentuk $a(\mod S_i)$ dengan a bergerak melalui semua bilangan bulat positif yang lebih kecil dari S_i dan relatif prima dengan S_i, p termasuk $\phi(S_i)/2$ dari mereka. Artinya, ada subset A_i dari kardinalitas $\phi(S_i)/2$ dari himpunan semua bilangan bulat lebih kecil dari S_i, dan relatif prima dengan S_i, sehingga jika p memenuhi (40) untuk i, maka $p \equiv a(\mod S_i)$ untuk $a \in A_i$. Sekarang misalkan $T = \prod_{t-0}^{t} S_1$. Karena setiap dua dari S_i adalah relatif prima, ini menunjukkan bahwa

$$\prod_{i=0}^{t} \frac{\phi(S_i)}{2} = \frac{\phi(T)}{2^{t+1}}$$

kelas residu modulo T yang relatif prima ke T dan yang terdapat bilangan prima p. Namun, dengan hasil [7], untuk Kelas kongruensi tertentu modulo T yang relatif prima ke T, banyaknya bilangan prima hingga x dalam kelas kongruensi ini paling banyak

$$\frac{2x}{\phi(T)\log(x/T)}.$$

karena dari (36)

$$T = \prod_{t=0}^{t} S_i \leq \prod_{i=0}^{t} F_{k+1} < x^{1/3},$$

diperoleh bahwa $x/T > x^{2/3}$. Maka banyaknya bilangan prima hingga x dalam kelas residu T tidak lebih dari

$$\frac{3x}{\phi(T)\log x}$$

karena diketahui $\phi(T)/2^{t+1}$ kelas kongruen modulo T yang memuat p, ini menunjukkan bahwa keseluruhan dari p tidak lebih dari

$$\frac{\phi(T)}{2^{t+1}}\frac{3x}{\phi(T)\log x} = \frac{3x}{2^{t+1}\log x} = O\left(\frac{x}{(\log x)2}\right), x \to \infty$$

akibatnya

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p}$$

konvergen.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Aigner, A. 1986. Uber Primzahlen Nachdenen (Fast) Alle Fermatschen Zahlen Quadratische Nichtreste Sind. *Monatsh. Math*, **101**: 85-93.

[2] Golomb, S.W. 1955. Sets of Primes with Intermediate Density. *Math, Scand*, **3**: 264-274.

[3] Krizek, M., F. Luca, & L. Somer. 2001. 17 *Lectures on Fermat Numbers*. Springer-Verlag, New York.

[4] Krizek, M., F. Luca, & L. Somer. 2001. On the Convergence of Series of Reciprocals of Primes Related to the Fermat Numbers. *J. Number Theory*, **97**: 95-112

[5] Montgomery, H. L. & R. C. Vaughan. 1973. The Large Sieve. *Mathematika*, **20**: 119-134.