BAB II

RUANG BANACH

Kreyszig (1978) mengungkapkan bahwa jika ada sebuah ruang metrik sebarang dan sebuah ruang vektor dan mendefinisikan sebuah metrik sebagai norma, maka ruang yang dihasilkan disebut ruang bernorma. Jika ruang bernorma ini lengkap maka ruang tersebut dinamakan ruang Banach.

2.1. Ruang Metrik dan Ruang Bernorma

Konsep dan sifat dari ruang metrik banyak dibicarakan diberbagai buku analisis antara lain Royden (1968), Rudin (1987), dan Kreyszig (1978).

Definisi 2.1.1. Misalkan X suatu himpunan tak kosong dan d suatu fungsi bernilai real dengan domain $X \times X$ yang memenuhi syarat berikut

(a). $d(x,y) \geq 0$, untuk semua $x,y \in X$

(b). $d(x,y) = 0$, jika dan hanya jika $x = y$

(c). $d(x,y) = d(y,x)$, untuk semua $x,y \in X$

(d). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, untuk semua $x,y,z \in X$ (ketaksamaan segitiga)

Fungsi d dikatakan metrik untuk X dan pasangan terurut $(X;d)$ dikatakan ruang metrik.

Contoh 2.1.2. Misal X adalah himpunan bilangan real positif. Definisikan d pada X dengan $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in X$. Maka d merupakan metrik pada X.

Lema 2.1.3. (Ketaksamaan Minkowski untuk penjumlahan). Jika $x=(\zeta_j)\in \ell_p$ dan $y=(\eta_j)\in \ell_p$, $p\geq 1$, maka ketaksamaan berikut adalah berlaku.

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bukti: Dalam membuktikan ketaksamaan ini digunakan ketaksamaan Holder yang dikutip dari Kreyszig (1978). Untuk p=1 ketaksamaan menjadi ketaksamaan segitiga. Untuk $p>1$, misal $\zeta_j+\eta_j=\omega_j$.

$|\omega_j|^p=|\zeta_j+\eta_j||\omega_j|^{p-1}\leq(|\zeta_j|+|\eta_j|)|\omega_j|^{p-1}$ sehingga $\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j||\omega_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j||\omega_j|^{p-1}$

dari ketaksamaan Holder $\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j||\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(|\omega_j|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$ dan

$\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j||\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ dengan $(p-1)q=p$ dan $pq=p+q$ diperoleh

$\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j|^p \leq \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$. Dengan membagi kedua ruas dengan

$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ dan $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ maka diperoleh $\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Selanjutnya konsep dan sifat ruang bernorma juga banyak dibahas dalam berbagai buku analsis antara lain Royden (1968), Rudin (1987), Kreyszig (1978) dan Anton 1997).

Definisi 2.1.4. Ruang vektor adalah himpunan V, dengan elemen-elemennya disebut vektor yang dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar akan terdefinsi, dengan sifat-sifat aljabar sebagai berikut:

Jika $x, y \in V$ maka $x + y \in V$

$x + y = y + x$, untuk semua $x, y \in V$

$x + (y + z) = (x + y) + z$, untuk semua $x, y, z \in V$

Terdapat vektor nol pada V sehingga $x + 0 = x$, untuk setiap $x \in V$

Setiap $x \in V$ terdapat $-x$ sehingga $x + (-x) = 0$

Jika $x \in V$ dan α skalar (α bilangan kompleks) maka $\alpha x \in V$

$1.x = x$

$\alpha(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

$\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

$(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

Definisi 2.1.5. Misalkan X ruang vektor. Misalkan $\|\cdot\|$ fungsi bernilai real yang memenuhi syarat berikut:

(a). $\|x\| \geq 0$, untuk semua $x \in X$

(b). $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0, x \in X$

(c). $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, dengan α skalar dan $x \in X$

(d). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk semua $x,y \in X$

Maka $\|\cdot\|$ dikatakan norma untuk X dan pasangan terurut $(X,\|\cdot\|)$ dikatakan ruang bernorma.

Misal X ruang bernorma. Definisikan metrik d dengan $d = d(x,y) = \|x-y\|$. Maka d merupakan metrik pada X. Dengan demikian setiap ruang linear bernorma dapat dipandang sebagai ruang metrik dengan $d(x, y) = \|x-y\|$.

2.2. Kekonvergenan dan Kelengkapan

Berikut ini akan dibicarakan berbagai sifat dari konvergensi dan kelengkapan suatu barisan seperti yang termuat dalam Royden (1968), Kreyzig (1978), dan Bartle (1994).

Definisi 2.2.1. Barisan (x_n) dari ruang metrik (X,d) konvergen ke suatu titik x di X jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $d(x,x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$, sering juga ditulis $\lim x_n = x$ atau $x_n \to x$ yang berarti x adalah limit dari barisan (x_n).

Definisi 2.2.2. Barisan (x_n) dari ruang metrik (X,d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga untuk semua $n, m \geq N$ berlaku $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Definisi 2.2.3. Ruang metrik (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen (ke suatu titik di X).

Teorema 2.2.4. Setiap barisan yang konvergen di ruang metrik (X,d) adalah barisan Cauchy.

Bukti: Misalkan (x_n) konvergen ke x, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga

$d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $n \geq N$, sehingga

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x_m,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Jadi (x_n) adalah Cauchy.

Di atas telah dikatakan bahwa ruang linear bernorma dapat dipandang sebagai ruang metrik dengan mendefinisikan metrik pada ruang tersebut. Dari pernyataan ini dapat dilihat hubungan antara ruang metrik dan ruang linear bernorma. Selanjutnya dari ruang linear bernorma ini dapat didefinisikan ruang Banach sebagai berikut.

Definisi 2.2.5. Misal $(X,\|\cdot\|)$ ruang linear bernorma. $(X,\|\cdot\|)$ dikatakan ruang Banach bila $(X,\|\cdot\|)$ lengkap.

Berikut ini diberikan beberapa contoh ruang Banach yang akan dibicarakan bilangan Rendezvous serta sifat jarak rata-ratanya.

Contoh 2.2.6. ℓ_p adalah kumpulan semua barisan $x = (\zeta_j)$, $j \in \mathrm{N}$ dengan $|\zeta_1|^p + |\zeta_2|^p + \ldots$ berhingga, maka akan dibuktikan bahwa ℓ_p adalah ruang Banach.

Bukti : Secara matematis ditulis $\ell_p = \left\{ x = (\zeta_j), j \in N, \sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p < \infty \right\}$. Definisikan

norma dari ℓ_p adalah $\|\zeta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\zeta_j \in \ell_p$, $j = 1,2,\ldots$

Pertama akan dibuktikan ℓ_p merupakan ruang bernorma.

i). $\|\zeta\|_p \geq 0$, setiap $\zeta \in \ell_p$

Ambil $\zeta \in \ell_p$ sebarang, misalkan $\|\zeta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\zeta_j \in \ell_p$, $j = 1,2,...$

Karena $|\zeta_j| \geq 0$, untuk setiap j maka $\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^2 \geq 0$ dan $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Jadi $\|\zeta\|_p \geq 0$.

ii). $\|\zeta\|_p = 0$, jika dan hanya jika $\zeta = 0$, $\zeta \in \ell_p$

$(\Rightarrow)$ $\|\zeta\|_p = 0$, akan dibuktikan $\zeta = 0$, $\zeta \in \ell_p$

$\|\zeta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, maka $\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p = 0$, berlaku untuk $|\zeta_j|^p = 0$, j=1,2,... sehingga $\zeta_j = 0$.

$(\Leftarrow)$ $\zeta_j = 0$ akan dibuktikan $\|\zeta\|_p = 0$

$$\|\zeta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\zeta_1|^p + |\zeta_2|^p + ...\right)^{\frac{1}{p}} = (0 + 0 + ...)^{\frac{1}{p}} = 0$$

iii). $\|\alpha\zeta\|_p = |\alpha| \|\zeta\|_p$

$$\|\alpha\zeta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p |\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|\zeta\|_p$$

iv). $\|\zeta + \eta\|_p \leq \|\zeta\|_p + \|\eta\|_p$ untuk semua $\zeta, \eta \in \ell_p$

Ambil $\zeta, \eta \in \ell_p$ sebarang. Misal $\zeta = (\zeta_j)$, $j = 1,2,...$ dan $\eta = (\eta_j)$, $j = 1,2,...$ maka

$\|\zeta+\eta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\|\zeta+\eta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\zeta\|_p + \|\eta\|_p$$

karena $\|\zeta\|_p$ memenuhi sifat (*i*), (*ii*), (*iii*), dan (*iv*) maka

$\|\zeta\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \zeta_j \in \ell_p, j = 1,2,\ldots$ adalah norma untuk ℓ_p.

Selanjutnya akan ditunjukkan ℓ_p lengkap. Misal barisan (x_m) Cauchy pada ℓ_p dengan $x_m = (\zeta_1^{(m)}, \zeta_2^{(m)}, \ldots)$, maka setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga

$$\|x_m - x_n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,\ n,m > N \qquad \ldots(2.2.1).$$

Selanjutnya untuk j=1,2,... $\left|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right| < \varepsilon$ setiap $n,m > N$. Ambil nilai j tetap. Dari (2.2.1) $(\zeta_j^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \ldots)$ Cauchy. Sehingga $x_m = \zeta_j^{(m)}$ konvergen . Sebut $\zeta_j^{(m)} \to \zeta_j$ dengan $m \to \infty$. $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$, akan ditunjukkan $x \in \ell_p$ dan $x_m \to x$.

Dari (2.2.1) maka untuk $m,n > N$, berlaku $\sum_{j=1}^{k}\left|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p, k = 1,2,\ldots$.

Misalkan $n \to \infty$ untuk $m > N$, maka $\sum_{j=1}^{k}\left|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\right|^p \le \varepsilon^p$, $k = 1,2,\ldots$. Misal $k \to \infty$ maka

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\right|^p \le \varepsilon^p,\ m > N \qquad \ldots(2.2.2).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $x_m - x = \left(\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\right) \in \ell_p$. Telah diperoleh $x_m \in \ell_p$, maka $x = x_m + (x - x_n) \in \ell_p$. Dari ketaksamaan (2.2.2) menunjukkan bahwa $x_m \to x$, (x_m) Cauchy di ℓ_p maka ℓ_p lengkap . Karena ℓ_p merupakan ruang linear bernorma yang lengkap maka ℓ_p ruang Banach.

Contoh 2.2.7. ℓ_1^n adalah pasangan terurut antara hasil kali cartesian dan norma pada ℓ_1^n, maka akan dibuktikan ℓ_1^n adalah ruang Banach (di beberapa artikel seperti Wolf (1994) ditulis $\ell^1(n)$).

Bukti: Secara matematis ditulis $\ell_1^n(E_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} E_i, \|\cdot\|_{\ell_1}\right)$, dengan

$\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n = \left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)\cdot \ldots \cdot \left(x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}\right) = \left(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(n)}\right) + \ldots + \left(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(n)}\right)$ untuk suatu $x_i^{(i)} \in E_i$, i=1,2,.... Definisikan norma pada ℓ_1^n adalah

$$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \text{ dengan } x = (x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i .$$

Pertama akan dibuktikan ℓ_1^n ruang bernorma

i). $\|x\|_{\ell_1} \geq 0$, setiap $x \in \prod_{i=1}^{n} E_i$

Ambil $x \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ sebarang, misalkan $\|x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$ dengan $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, karena $\|x_i\|_i \geq 0$, untuk setiap i maka $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \geq 0$. Jadi $\|x\|_{\ell_1} \geq 0$.

ii). $\|x\|_{\ell_1} = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

$(\Rightarrow)$ $\|x\|_{\ell_1} = 0$ akan dibuktikan $x = 0$

$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = 0$, berlaku untuk $\|x_i\|_i = 0$, untuk setiap i sehingga $x_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ atau $x = 0$.

$(\Leftarrow)$ $x = 0$ akan dibuktikan $\|x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = 0$

dari definisi 2.1.3. jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$ sehingga

$$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 + \ldots + \|x_n\|_n = (0 + 0 + \ldots + 0) = 0$$

iii). $\|\alpha x\|_{\ell_1} \quad |\alpha| \|x\|_{\ell_1}$ α suatu skalar

$$\|\alpha x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha x_i\|_i = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| \, \|x_i\|_i = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = |\alpha| \|x\|_{\ell_1}$$

iv). $\|x + y\|_{\ell_1} \le \|x\|_{\ell_1} + \|y\|_{\ell_1}$ untuk semua $x, y \in \prod_{i=1}^{n} E_i$

Ambil $x, y \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ maka $\|x + y\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i + y_i\|_i$. Sehingga diperoleh

$$\|x + y\|_{\ell_1} \le \sum_{i=1}^{n} \left(\|x_i\|_i + \|y_i\|_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i + \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_i = \|x\|_{\ell_1} + \|y\|_{\ell_1}$$

karena $\|x\|_{\ell_1}$ memenuhi sifat (i), (ii), (iii), dan (iv) maka

$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ dengan $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ adalah norma untuk ℓ_1^n.

Selanjutnya akan ditunjukkan ℓ_1^n lengkap. Misalkan (x_m) sebarang barisan Cauchy di ℓ_1^n dengan $x_m = \left(\zeta_1^{(m)}, \zeta_2^{(m)}, \ldots\right)$. (x_m) Cauchy maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat

N sehingga untuk semua $n,m > N$ berlaku $\|x_m - x_n\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n} \left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right\|_j < \varepsilon$. Setiap $n,m > N$ selanjutnya untuk j=1,2,... maka

$$\left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right\|_j < \varepsilon \text{ setiap } n,m > N \qquad \ldots(2.2.3).$$

Untuk suatu nilai j yang tetap barisan $\left(\zeta_j^{(1)}, \zeta_j^{(2)}, \ldots\right)$ adalah Cauchy sehingga $x_m = \zeta_j^{(m)}$ konvergen. Misal $\zeta_j^{(m)} \to \zeta_j$ dengan $m \to \infty$ $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ akan dibuktikan $x \in \ell_1^n$ dan $x_m \to x$. Dari ketaksamaan (2.2.3) jika $n \to \infty$, maka

$$\left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\right\|_j \leq \varepsilon,\ m > N \qquad \ldots(2.2.4).$$

$x_m = \left(\zeta_j^{(m)}\right) \in \ell_1{}^n$ terdapat $K_m \in R$ sehingga $\left\|\zeta_j^{(m)}\right\|_j \leq K_m$ untuk semua j.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$\left\|\zeta_j\right\|_j \leq \left\|\zeta_j - \zeta_j^{(m)}\right\|_j + \left\|\zeta_j^{(m)}\right\|_j \leq \varepsilon + K_m, m > N$ maka $\left(\zeta_j\right)$ barisan terbatas . Hal ini menunjukkan bahwa $x = \left(\zeta_j\right) \in \ell_1^n$. Dari ketaksamaan (2.2.4) maka

$\|x_m - x\| = \sum_{i=1}^{n} \left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\right\|_j < \varepsilon$ setiap $m > N$ menunjukkan bahwa $x_m \to x$, x_m Cauchy maka ℓ_1^n lengkap. Karena ℓ_1^n merupakan ruang linear bernorma yang lengkap maka ℓ_1^n adalah ruang Banach.

Contoh 2.2.8. ℓ_∞^n adalah pasangan terurut antara hasil kali cartesian dengan norma pada ℓ_∞^n, akan dibuktikan bahwa ℓ_∞^n adalah ruang Banach.

Bukti: Secara matematis ditulis $\ell_{\infty}^{n}(E_i)=\left(\prod_{i=1}^{n}E_i,\|\cdot\|_{\ell_\infty}\right)$ dengan

$$\prod_{i=1}^{n}E_i=E_1\cdot\ldots\cdot E_n=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}\right)=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(n)}\right)+\ldots+\left(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(n)}\right) ,$$

untuk suatu $x_i^{(i)}\in E_i$, i=1,2,.....Definisikan normanya adalah $\|x\|_{\ell_\infty}=\sup\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|_i$,

$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}E_i$

i). $\|x\|_{\ell_\infty}\ge 0$, setiap $x\in\prod_{i=1}^{n}E_i$

Ambil $x\in\prod_{i=1}^{n}E_i$ sebarang, misalkan $\|x\|_{\ell_\infty}=\sup\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|_i$.

Karena $\|x_i\|_i\ge 0$, untuk setiap i maka $\sup\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|_i\ge 0$. Jadi $\|x\|_{\ell_\infty}\ge 0$

ii). $\|x\|_{\ell_\infty}=0$ jika dan hanya jika $x=0$

$(\Rightarrow)$ $\|x\|_{\ell_\infty}=0$ akan dibuktikan $x=0$

$\|x\|_{\ell_\infty}=\sup\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|_i=\sup\{\|x_1\|_1,\ldots,\|x_n\|_n\}=0$. Karena $\sup\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|_i=0$ dan $\|x_i\|_i\ge 0$ untuk setiap i maka haruslah $\|x_i\|_i=0$ sehingga x_i=0, i=1,2,…,n atau x =0.

$(\Leftarrow)$ $x=0$ akan dibutiktikan $\|x\|_{\ell_\infty}=0$

Dari definisi 2.1.3. jika x =0 maka $\|x\|=0$. $\|x\|_{\ell_\infty}=\sup\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|_i=\sup\{\|x_1\|_1,\ldots,\|x_n\|_n\}$

$$=\sup\{0\}=0$$

iii). $\|\alpha x\|_{\ell_\infty}=|\alpha|\|x\|_{\ell_\infty}$ α suatu skalar

$$\|\alpha x\|_{\ell_\infty}=\sup_{1\le i\le n}\|\alpha x_i\|_i=\sup_{1\le i\le n}|\alpha|\|x_i\|_i=|\alpha|\sup_{1\le i\le n}\|x_i\|_i=|\alpha|\|x\|_{\ell_\infty}$$

iv). $\|x+y\|_{\ell_\infty} \le \|x\|_{\ell_\infty} + \|y\|_{\ell_\infty}$ untuk semua $x, y \in \prod_{i=1}^{n} E_i$.

Ambil $x, y \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ sebarang maka $\|x+y\|_{\ell_\infty} = \sup_{1\le i\le n} \|x_i + y_i\|_i \le \sup_{1\le i\le n} \|x_i\|_i + \sup_{1\le i\le n} \|y_i\|_i$

$$= \|x\|_{\ell_\infty} + \|y\|_{\ell_\infty}.$$

Karena $\|x\|_{\ell_\infty}$ memenuhi sifat (*i*), (*ii*), (*iii*), dan (*iv*) maka $\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{1\le i\le n} \|x_i\|_i$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ $\in \prod_{i=1}^{n} E_i$ adalah norma untuk $\ell_\infty^{\,n}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\ell_\infty^{\,n}$ lengkap. Misalkan (x_m) sebarang barisan Cauchy di ℓ_∞. $x_m = \left(\zeta_1^{(m)}, \zeta_2^{(m)}, \ldots\right)$. (x_m) Cauchy maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga berlaku $\|x_m - x_n\|_{\ell_\infty} = \sup_{1\le j\le n} \left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right\|_j < \varepsilon$ maka

$$\left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j^{(n)}\right\|_j < \varepsilon \text{ setiap } n, m > N \qquad \ldots(2.2.5).$$

untuk suatu nilai j yang tetap barisan $\left(\zeta_j^{(1)}, \zeta_j^{(2)}, \ldots\right)$ adalah Cauchy sehingga $x_m = \zeta_j^{(m)}$ konvergen. Misal $\zeta_j^{(m)} \to \zeta_j$ dengan $m \to \infty$ $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ akan dibuktikan $x \in \ell_\infty$ dan $x_m \to x$. Dari ketaksamaan (2.2.5) jika $n \to \infty$, maka

$$\left\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\right\|_j \le \varepsilon, m > N \qquad \ldots(2.2.6).$$

$x_m = \left(\zeta_j^{(m)}\right) \in \ell_\infty$ terdapat $K_m \in R$ sehingga $\left\|\zeta_j^{(m)}\right\|_j \le K_m$ untuk semua j. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$\|\zeta_j\|_j \le \left\|\zeta_j - \zeta_j^{(m)}\right\|_j + \left\|\zeta_j^{(m)}\right\|_j \le \varepsilon + K_m, m > N$ maka (ζ_j) barisan terbatas. Hal ini menunjukkan bahwa $x = (\zeta_j) \in \ell_\infty$. Dari ketaksamaan (2.2.6) maka

$\|x_m - x\| = \sup_{1\le j\le n}\|\zeta_j^{(m)} - \zeta_j\|_j < \varepsilon$ setiap $m > N$ menunjukkan bahwa $x_m \to x$, x_m Cauchy maka ℓ_∞. Karena ℓ_∞^n merupakan ruang linear bernorma yang lengkap maka ℓ_∞^n adalah ruang Banach.

2.3. Tersambung dan Kompak

Konsep dan sifat dari himpunan kompak banyak dibicarakan dalam berbagai buku analisis dan topologi antara lain Royden (1968) dan Munkres (1988).

Definisi 2.3.1. Misal X suatu himpunan. X dikatakan tersambung jika tidak terdapat himpunan buka A, B di X sehingga $X=A\cup B$ dan $A\cap B=\varnothing$.

Definisi 2.3.2. Misal X suatu himpunan. $\mathcal{A} = \{A : A \text{ buka}\}$. Jika $X \subseteq \mathcal{A}$ maka $\mathcal{A}$ disebut selimut (cover) buka dari X . Jika terdapat $A_1,\ldots,A_n$ sehingga $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ disebut selimut buka berhingga dari X. X dikatakan kompak bila setiap selimut buka dari X mempunyai subselimut berhingga.

Pada kenyataannya sulit menentukan bahwa suatu himpunan itu kompak. Untuk itu berikut ini di berikan teorema Heine-Borel, dalam Bartle (1994) yang memberikan syarat perlu dan cukup suatu himpunan dikatalan kompak.

Teorema 2.3.3. $K \subseteq R^p$, p = 1,2, . . . kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas

Bukti: ($\Rightarrow$) Misal K suatu himpunan kompak akan ditunjukkan bahwa K tertutup dan terbatas. Pertama akan ditunjukkan K tertutup (dengan menunjukkan bahwa komplemennya buka). Misal x $\in$ $\widetilde{K}$ (kompolemen dari K) dan untuk setiap m $\in$ N, misalkan G_m suatu himpunan yang didefinisikan dengan $G_m = \left\{ y \in R^p : \|y - x\| > \frac{1}{m} \right\}$.

Maka setiap himpunan G_m , m $\in$ N buka di R . Selanjutnya gabungan dari semua himpunan G_m, $m \in N$, memuat semua titik di R^p kacuali di x. karna x $\notin$ K, maka semua titik di K adalah anggota suatu himpunan G_m. Karena K kompak maka terdapat M $\in$ N sehingga $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} G_m = G_M$. Dengan demikian lingkungan $\left\{ z \in R^p : \|z - x\| < \frac{1}{M} \right\}$ tidak memotong K. hal ini menunjukkan $\widetilde{K}$ buka, sehingga K tertutup di R^p.

Selanjutnya akan ditunjukkan K terbatas di R^p (yaitu $K \subseteq \{x \in R^p : \|x\| < r\}$ untuk nilai r cukup besar). Untuk setiap m $\in$ N, missal H_m suatu himpunan buka yang didefinisikan dengan $H_m = \{x \in R^p : \|x\| < m\}$ Semua ruang R^p, p =1,2,... dan K termuat dalam gabungan himpunan H_m, m $\in$ N. K kompak maka terdapat M $\in$ N sehingga $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} H_m = H_M$ Hal ini manunjukkan bahwa K terbatas.

($\Leftarrow$) K tertutup dan terbatas yang termuat dalam gabungan koleksi $\wp = \{G_\alpha\}$ dari himpunan buka di R^p, maka akan ditunjukkan K kompak, yaitu K termuat dalam gabungan suatu himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Karena K terbatas, dengan batasan sel tertutup I_1 di R^p . Misalkan $I_1 = \{(x_1, .. x_n) | x_k| \leq r, k = 1, ..., p\}$ untuk nilai r > 0. Andaikan K tidak kompak, artinya K tidak termuat dalam gabungan sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Karena itu, sedikitnya satu dari 2^p sel tertutup yang dibentuk dengan membagi sisi dari I_1 memuat titik dari K sehingga bagian dari K didalamnya tidak termuat dalam gabungan sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Permasalahan ini dapat dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: Jika setiap 2^p bagian dari K termuat dalam gabungan sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$, maka K akan termuat dalam suatu gabung sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Hal ini kontradiksi dengan K tidak termuat dalam gabungan sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Sehingga haruslah K kompak.

Kasus 2. Misalkan I_2 adalah salah satu dari sel bagian dari sub divisi I_1 sehingga himpunan tak kosong $K \cap I_2$ tidak termuat dalam gabungan sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Lanjutkan proses ini dengan membagi I_2 untuk memperoleh 2^p sel bagian tertutup dari I_2 dan misalkan I_3 adalah salah satu dari sel bagian sehingga himpunan tak kosong $K \cap I_3$ tidak termuat dalam gabungan sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$, dan seterusnya. Dalam kasus ini di bentuk barisan bersarang (nested sequenvce) I_n dari sel tak kosong. Berdasarkan sifat sel bersarang (nested cells) terdapat titik y $\in$ I_n, n$\in$N. Karena I_n memuat titik-titik di K, maka y adalah titik cluster dari K. Karena K tertutup maka y$\in$K dan termuat dalam suatu himpunan buka G_α di $\wp$. Selanjutnya terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga semua titik w dengan $\|y-w\| < \varepsilon$ adalah anggota G_α. Di sisi lain sel I_n, K≥2 terbentuk dengan membagi ssisi-sisi dari $I_1 = \{(x_1,\ldots,x_n) : |x_j| \leq r, j = 1,\ldots,p\}$, jadi panjang sisi I_k adalah c. Selanjutnya karena w $\in I_k$ maka $\|y-w\| \frac{r\sqrt{p}}{2^{k-3}}$. Karena itu jika K sangat besar maka $\frac{r\sqrt{p}}{2^{k-3}} < \varepsilon$, sehingga semua titik-titik di I_k sebagai suatu himpunan tunggal G_λ, hal ini kontradiksi dengan konstruksi I_k sebagai suatu himpunan sehingga $K \cap I_n$ tidak termuat dalam sebarang himpunan bilangan berhingga di $\wp$. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa K kompak .

Teoremaa 2.3.4. Setiap himpunan bagian tutup dari himpunan kompak adalah kompak

Bukti. Misalkan X kompak , F himpunan bagian tutup dari X, dan $\mathcal{A}$ suatu selimut buka dari F. Maka $\mathcal{A} \cup \{\widetilde{F}\}$ adalah selimut buka dari X dan karena X kompak maka terdapat subselimut berhingga $\{\widetilde{F}, A_1, \ldots, A_n\}$, sehingga $F \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \supseteq X$. Karena $F \cap \{\widetilde{F}\} = \varnothing$ maka $F \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$. . Ini berarti F kompak.

2.4. Kewujudan Bilangan Rendezvous di Ruang Banach

Lin (1997) mendefinisikan bilangan Rendezvous dari ruang metrik sebagai berikut.

Definisi 2.4.1. Misalkan (X, d) ruang metrik terbatas, dengan X suatu himpunan dan d metrik pada X. Bilangan real $\alpha = \alpha(X, d) \geq 0$ dikatakan bilangan Rendezvous dari X jika untuk sebarang n anggota bilangan asli N dan sebarang $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (tidak perlu berbeda) di X, terdapat x anggota X sehingga $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x) = \alpha$.

Sebelum membicarakan bilangan Rendezvous di ruang Banach, perlu ditunjukkan kewujudan bilangan Rendezvousnya supaya diketahui bahwa ruang tersebut benar memiliki bilangan Rendezvous. Hal ini dikarenakan tidak semua ruang Banach memiliki bilangan Rendezvous.

Berbicara mengenai kewujudan bilangan Rendezvous, Gross (1964) mengemukakan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.4.2. Misal X ruang kompak dan tersambung dan $d : X^2 \to R$ fungsi kontinu dan simetrik. Maka terdapat dengan tunggal bilangan $\alpha = \alpha(X, d)$ yang memenuhi sifat berikut: Untuk semua $n \in N$ dan untuk semua $x_1,\ldots,x_n \in X$ terdapat $y \in X$ sehingga $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y) = \alpha$ dengan d merupakan metrik pada X.

Bukti : Dalam beberapa hal pada pembuktian teorema ini tidak ditulis secara mendetil, tetapi ditulis secara langsung dengan merujuk pada buku dan artikel seperti Holmes (1975) dan Nikaido (1954).

Misal $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$. F adalah kumpulan semua tupel-tupel terbatas yang terurut dengan anggotanya adalah himpunan X. Jika $x \in X$ dan $f = (x_1,\ldots,x_n) \in F$. Ambil

$$d(x, f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, x_i),\ \alpha_f = \inf\{d(x, f) : x \in X\},\ \text{dan } \beta_f = \sup\{d(x, f) : x \in X\}.$$

Klaim $\alpha_f \le \beta_G$ dengan $f, G \in F$. Misal $f = (x_1,\ldots,x_m)$ dan $G = (y_1,\ldots y_n)$. Hal ini cukup dengan menunjukkan bahwa untuk suatu $i \le n$ dan suatu $j \le m$. $d(y_i,f) \le d(x_j,G)$ dengan $d(y_i, f) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d(y_i, x_j)$ dan $d(x_j, G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(x_j, y_i)$. Karena F tak kosong dan $f,G \in F$ maka $d(y_I,x_j) = d(x_j, y_I)$ dan $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d(y_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(x_j, y_i)$ selanjutnya karena $m > n$ maka $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ sehingga

$$d(y_i,f)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d(y_i,x_j)\ \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(x_j,y_i)=d(x_j,G) \qquad \ldots(2.4.1).$$

Andaikan ketaksamaan 2.4.1 tidak benar maka $d(y_i,f) > d(x_j,G)$ untuk semua $i \le n$ dan $j \le m$, $d(y_i,f) > d(x_j,G)$, maka

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d(y_i,x_j)\ > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(x_j,y_i)$$

$$n\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d(y_i,x_j)\ > m\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(x_j,y_i)$$

$$n\sum_{i=1}^{n}d(y_i,f)\ > m\sum_{j=1}^{m}d(x_j,G)$$

sedangkan diketahui bahwa $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d(y_i,x_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(x_j,y_i)$ sehingga diperoleh $n > m$. Hal ini kontradiksi dengan $m > n$ sehingga haruslah $d(y_i,f) \le d(x_j,G)$, yang artinya $\alpha_f \le \beta_G$.

Selanjutnya akan ditunjukkan kewujudan dari $\alpha(X,d)$. Untuk suatu $f \in F$ terdapat pemetaan $x \mapsto d(x,f)$ yang merupakan fungsi kontinu pada X. Karena X kompak berdasarkan teorema 2.3.3 maka X tertutup dan terbatas. Karena pemetaan $x \mapsto d(x,f)$ kontinu, maka $\{d(x,f) : x \in X\}$ merupakan himpunan tutup dan terbatas, sehingga α_f, dan β_f berada di $d(x,f)$. Selanjutnya karena $\alpha_f \le \beta_f$ dengan $f \in F$ maka terdapat $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(x_i,f)$ sehingga $\alpha_f \le \alpha \le \beta_f$ jadi kewujudan dari α didapatkan