BAB I . PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Penelitian .

Matematika sebagai bahagian dari ilmu-ilmu dasar mempunyai peranan dan kontribusi yang besar dalam menyelesaikan berbagai persoalan yang dijumpai dalam berbagai bidang disiplin ilmu, baik dalam bidang ilmu-ilmu sosial dan ekonomi maupun dalam bidang sains dan teknologi.

Salah satu bahagian penting dalam bidang differensial geometri adalah **Analisa tentang Ketunggalan Solusi Persamaan Kurvature Rataan Dengan Data Awal Radial Tanpa Syarat Pertambahan** yaitu akan ditunjukkan ketunggalan solusi persamaan kurvature rataan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla u + \frac{\{D^2uDu\,,Du\}}{1+|Du|^2} = 0 \qquad \text{dalam} \quad R^N \times (0,+\infty), \qquad [1.1]$$

untuk suatu radia kontinu dengan syarat awal $u(x_0) = u_0\,|x|$

Eksistensi dari suatu solusi mulus dikembangkan oleh **Eicker** dan **Huisken** (1991) melalui artikel *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature.*yang menganalisa tentang eksistensi dan ketunggalan titik luar tanpa batasan pertambahan pada solusi syarat awal dengan menunjukkan eksistensi dari penyelesaiaan klasik ;

$u \in C^{\infty}\{R^N \times (0,+\infty)\} \cap C\{R^N \times [0,+\infty)\}$ dari persamaan kurvatur rataan [1.1] di atas .

Pada kasus masalah stasioner , akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu pertambahan limit pada suatu titik tertentu dan mengaplikasikan ketunggalan solusi dapat diformulasikan pada perubahan kurvature rataan dari entri radial yang diketahui .

Analisa yang dilakukan pada penelitian ini meliputi beberapa lanngkah dan pendekatan yang mencakup :

- Pendekatan geometri dan solusi extremal
- Estimate integral

- Mengkonstruksi penyelesaian dengan gradien extremal yang terbagi atas dua bahagian yaitu perumusan comparison untuk persamaan derived dan masalah Newmann
- Pembuktian dari teorema yang merumuskan ketunggalan solusi .
- Implementasi pada masalah staioner
- Aplikasi pada gerak kurvature rataan .

I.2. Identifikasi dan Perumusan Masalah .

Untuk menganalisa ketunggalan solusi persamaan kurvature rataan dengan syarat awal radial tanpa pertambahan , dikaji melalui beberapa teorema terkait yaitu :

- **Teorema 1.**

Misalkan $u_o \in C(R^N)$ merupakan radial , Maka terdapat suatu penyelesaian merekat yang tunggal dan kontinu pada [1.1] dengan syarat awal u_o ,dengan : $u \in C^{\infty}\{R^N \text{ x } (0,+\infty)\} \cap C\{R^N \text{ x } [0,+\infty)\}$ dan u(.,t) adalah radial untuk suatu t ≥ 0.

Perumusan dari solusi extremal dengan pendekatan geometrical diformulasikan pada teorema berikut :

- **Teorema 2 .**

Misalkan $u_o \in C\{R^N\}$ merupakan radial , Maka persamaan [1.1] mempunyai suatu solusi maksimum $u^+ \in C^{\infty}\{R^N \text{ x } (0,+\infty)\} \cap C\{R^N \text{ x } [0,+\infty)\}$ atau solusi minimum $u^- \in C^{\infty}\{R^N \text{ x } (0,+\infty)\} \cap C\{R^N \text{ x } [0,+\infty)\}$ yang merupakan radial dalam x untuk suatu t ≥ 0.

Pendekatan geometrical dari solusi persamaa [1.1] diinterpretasikan sebagai hypersurface evolving (dalam waktu) dalam R^{N+1} dan geometrical evolusi yang berkaitan dengan persamaan [1.1] merupakan gerak oleh kurvature rataan .

Misalkan u merupakan solusi dari persamaan [1.1] dengan data awal u_o , dan misalkan suatu fungsi kontinu seragam $v_o : R^{N+1} \to R$ sedemikian hingga ,

$\{ v_g = 0 \} = \Gamma_g$, $\{ v_g \ . \ 0 \} = \Omega_g^+$ dan $\{ v_g < 0 \} = R^{N+1} - \{ \Omega_g^+ \cup \Gamma_g \}$,

maka untuk suatu fungsi v ; $R^{N+!} \times [0,+\infty) \rightarrow R$ sedemikian hingga untuk setiap

$\{x,t\} \in R^N x\{0,+\infty\}$ dan setiap solusi u dari [1.1] mmenuhi :

$v(x,u(x,t),t) = 0$ dan $v(x, u_g\{x\},0\} = 0$

Berikutnya ditunjukkan bahwa v mempunyai suatu penyelesaian geometrical persamaan kurvature rataan :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nabla v + \frac{\{D^2 v Dv \, ; Dv\}}{1 + |Dv|^2} = 0 \qquad \text{dalam} \quad R^{N+1} \times (0,+\infty), \quad \text{dengan data awal}$$

$v(z,0) = v_0(z)$ untuk suatu $z \in R^{N+1}$.

Untuk generalisasi evolusi dengan kurvature rataan yang berhubungan dengan sifat isometris , diformulasikan oleh lemma berikut :

- **Lemma 1**

Misalkan Ω_0^+ merupakan himpunan bagian buka dari R^{N+1} dengan batasan $\Gamma_0 = \partial\Omega_0^+$ dan $A \in Q_{N+1}$,dimana Q_{N+1} *merupakan group isometris dari* R^{N+1} dan misalkan generalisasi evolusi dengan kurvature rataan $[\Gamma_t]_{t \geq 0}$, maka $\Gamma'_t = A[\Gamma_t]$

Untuk perumusan estimasi integral dikenalkan notasi dan lemma berikut ;

Definisikan himpunan $\varphi^{\pm}$ oleh $u^{\pm}(x,t) = \varphi^{\pm}(|x|,t)$ untuk $r_0 \geq 1$ dan setiap $\{r,t\} \in \{(r_0, +\infty) \times [0, +\infty)$, dipenuhi oleh $\varphi^{\pm}(r,t) = \int_{r_0}^{r} \varphi^{\pm}(\rho,t)\, d\rho$ dan $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$

yang diformulasikan dalam lemma berikut :

- **Lemma 2.** :

Misalkan $T > 0$, *terdapat suatu konstanta positip* $C = C(T)$ *sedemikian hingga untuk suatu* $r \geq r_0$ *dan* $t \in [0,T]$, *diperoleh* $\varphi(r,t) = \int_{r_0}^{r} (\varphi^- - \varphi)(\rho,t)\, d\rho \leq C$.

Konstruksi dari solusi dengan gradien extremal dirumuskan oleh teorema berikut :

- **Teorema 3 .**

Untuk suatu data awal radial $u_0 \in C^1(R^N)$ *, Terdapat dua solusi mulus radial dari persamaan [1] ,* $u^{g,+}(x,t) = \varphi^{g,-}(|x|,t)$ *dan* $u^{g,-}(x,t) = \varphi^{g,-}(|x|,t)$ *sedemikian hingga untuk suatu solusi radial* $u(x,t) := \varphi^{g,-}(|x|,t)$ *, diperoleh*

$\partial_r \varphi^{g,-}(r,t) \le \partial_r \varphi(r,t) \le \partial_r \varphi^{g,+}(r,t)$ *, untuk setiap* $(r,t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$

- **Teorema 4 .**

Misalkan $\xi > 0$, R , $T > 0$ *dan* $\psi_1, \psi_2 \in C^2\{(0,R) \times (0,T)\} \cap C\{[0,R] \times \{0,T]$ *yang merupakan super solusi dari [1.1] dalam* $\{0,R\} \times \{0,T\}$ *sedemikian hingga :*

$\psi_1(.,0) \le \psi_2(.,0)$ *pada* $[0,R]$

$\psi_1(t,R) \le \psi_2(t,R)$ *pada* $t \in [0,T]$

$\psi_1(t,0) = \psi_2(t,0) = 0$ *pada* $t \in [0,T]$

Maka $\psi_1 \le \psi_2$ *pada* $[0,R] \times [0,T]$.

Analisa persamaan [1.1] dalam suatu batasan domain dengan *syarat Newmann* yang mengkonstruksi solusi extremal gradient , dirumuskan dalam proposisi berikut :

- **Proposisi 1.**

Misalkan $u_0 \in C^1(B_R(0))$ *merupakan suatu data awal radial , dengan* $T > 0$ *dan* $K \in R$ *. Maka terdapat solusi radial* $u \in C^2\{(B_R(0) \times (0,T)\} \cap C^1(B_R(0) \times [0,T]$ *pada msalah berikut :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{Tr}(b(Du)(D^2 u)) = 0 \text{ dalam } B_R(0) \times (0,+\infty) \\ \quad \dfrac{\partial u}{\partial v}(x,t) = K \text{ dalam } \{|x| = R\} \times (0,\infty) \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ dalam } B_R(0) \times \{t=0\} \end{cases}$$

Perumusan ketunggalan dari persamaan [1.1] dan dapat ditinjau dalam permasalahan stationer yang dinyatakan daalam bentuk persamaan Elliptic

$$- \Delta u + \frac{\{D^2 uDu, Du\}}{1+|Du|^2} + \lambda u = f \text{ dalam } R^N \qquad [1.2]$$

yang dapat diaproksimasi oleh suatu persamaan parabolik :

$$- \frac{\partial_{\tau\tau}\psi}{1+(\partial_\tau \psi)^2} - (N-1)\frac{\partial_\tau \psi}{\tau} + \lambda\psi = f(\tau) \text{ dalam } (0,\infty) \qquad [1.3]$$

dimana $\lambda > 0$ dan $f \in C(R^N)$ merupakan fungsi suatu fungsi radial . dan perumusannya dinyatakan dalam teorema berikut :

- **Teorema 5 .**

Untuk $N > 1$ dan untuk suatu fungsi radial f , Jika $\psi_1 \in C$ merupakan suatu subsolusi dari [2.2] , Maka $\psi_1 \le \psi_2$ dalam $[0, \infty)$, dan persamaan [2.1] mempunyai satu solusi radial dalam C

Aplikasi pada gerak kurva rataan yang merupakan konsekwensi dari teorema [1] untuk suatu evolusi dengan kurvature rataan dirumuskan oleh teorema berikut :

- **Teorema 6 .**

Misalkan Γ_o = Graph $\{u_o\}$ dimana $u_o \in C\{R^N\}$ merupakan suatu fungsi radial , Maka generalisasi evolusi oleh kurva rataan $\{\Gamma_t , \Omega_t^+\}_{t\geq 0}$ dari $\{\Gamma_0 , \Omega_0^+\}$ dinyatakan oleh :

Γ_t = Graph $\{u(.,t)\}$ dan $\Omega_t^+ = \{y > u(x,t)\}$ untuk suatu $t \geq 0$,

Dimana $u \in C^\infty\{R^N x (0, \infty)\} \cap C\{R^N x [0, \infty)\}$ adalah merupakan ketunggalan viscocity kontinu dari persamaan [1]

1.3. Tujuan Penelitian .

Penelitian ini bertujuan :

- Menganalisa Ketunggalan Solusi Persamaan Kurvature Rataan Dengan Data awal radial tanpa syarat pertambahan .
- Memformulasikan suatu Solusi Ektremal pada Pendekatan Geometrical
- Menganalisa suatu solusi $\Psi^{\pm}$ oleh $u^{\pm}(x,t) = \Psi^{\pm}\{|x|,t\}$ pada estimate integral
- Mengkonstruksi suatu solusi dengan gradient ekstremal .
- Merumuskan suatu problem Newmann dan masalah stationer .
- Mengaplikasikan Ketunggalan Solusi Persamaan Kurvature Rataan Dengan Data awal radial tanpa syarat pertambahan pada gerak kurvature rataan .

1.4. Kegunaan Penelitian .

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan konstribusi baik secara langsung maupun tidak langsung kepada berbagai pihak yang memerlukannya dalam bentuk pemahaman konsep dasar dari ***Ketunggalan solusi persamaan kurvature rataan dengan data awal radial tanpa syarat pertambahan*** dan meningkatkan wawasan dan pengayaan materi dan ketrampilan dalam perumusan beberapa teorema yang terkait dan mendukung materi penelitian ini yaitu

- Formulasikan suatu Solusi Ektremal pada Pendekatan Geometrical ,
- Analisa suatu solusi $\Psi^{\pm}$ oleh $u^{\pm}(x,t) = \Psi^{\pm}\{|x|,t\}$ pada estimate integral ,
- Konstruksi dari suatu solusi dengan gradient ekstremal ,
- Perumusan dari problem Newmann dan Stationary sertaA
- Aplikasi pada gerak kurvature rataan .