BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1. Teori Pendukung

Gagasan untuk mendapatkan persamaan potensial vektor magnetik dan distribusi rapat fluksi medan magnit dapat dijelaskan berdasarkan pengertian sebagai berikut :

Rapat fluksi medan magnit didapatkan berdasarkan persamaan :

$$\vec{B} = \nabla x \vec{A} \quad \text{.......(2.1)}$$

Untuk mendapatkan potensial vektor magnetik pada persamaan (2.1) Digunakan hukum Maxwell dalam bentuk diferensial, hukum Ampere dalam bentuk diferensial dan hukum Ohm, yakni :

- **Hukum Maxwell**

$$\nabla x \vec{H} = \vec{J} \quad \text{.......(2.2)}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \quad \text{.......(2.3)}$$

$$\nabla x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{.......(2.4)}$$

- **Hukum Ampere**

$$\nabla x \vec{B} = \mu \vec{J} \quad \text{.......(2.5)}$$

- **Hukum Ohm**

$$\vec{J} = \Gamma \bullet \vec{E} \quad \text{.......(2.6)}$$

dengan ketentuan :

$\vec{B}$ adalah Vektor rapat fluksi medan magnit.

$\vec{A}$ adalah Potensial vektor magnetik.

$\vec{H}$ adalah vektor kuat medan magnet

$\vec{J}$ adalah vektor kerapatan arus pada konduktor

$\vec{E}$ adalah vektor kuat medan listrik

μ adalah permeabilitas konduktor

Γ adalah konduktivitas konduktor

Dengan proses subsitusi dan penyelesaian persamaan (2.2) sampai (2.6) akan didapatkan persamaan potensial vektor magnetik dalam bentuk persamaan diferensial :

$$\nabla^2 \bar{A} = \mu \Gamma \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{.......(2.7)}$$

Dalam koordinat kartesian persamaan menjadi :

$$\nabla^2 \bar{A} = \frac{\partial^2 Ax}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Ay}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Az}{\partial z^2} \quad \text{.......(2.8)}$$

Jika analisa dilakukan pada bidang x dan y, maka potensial vektor magnetik hanya mempunyai komponen z, sehingga persamaan (2.8) adalah :

$$\nabla^2 \bar{A} = \frac{\partial^2 Az}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Az}{\partial y^2} \quad \text{.......(2.9)}$$

Selanjutnya persamaan (2.7) akan dipecahkan dengan menggunakan metode pemisahan variabel (Variable Separation Method). Didalam penyelesaian persamaan (2.7) akan timbul konstanta. Untuk itu penentuan nilai konstanta akan digunakan syarat batas magnetik yang penerapannya memerlukan hukum-hukum :

Hukum Ampere dalam bentuk Integral

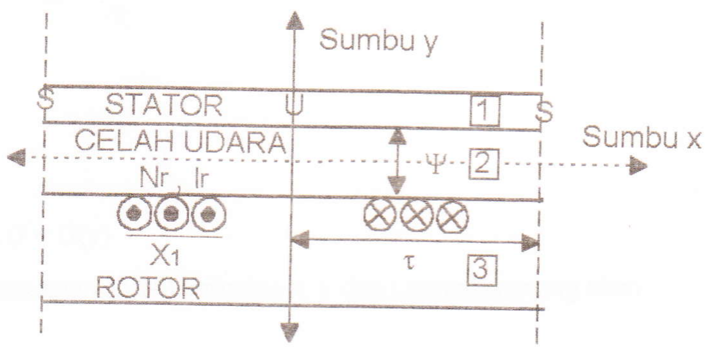
$$\oint H \bullet dl = I = \iint \vec{J} \bullet d\vec{A} \quad \text{.......(2.10)}$$

Hukum Gauss dalam bentuk Integral

$$\oiint B \bullet ds = 0 \quad \text{.......(2.11)}$$

II.2. Model Mesin Yang Akan Ditinjau

Model mesin yang dipilih adalah mesin serempak kutub tidak menonjol yang ditunjukkan pada gambar dibawah ini :



Gambar 0. Model Mesin Sinkron Dalam Koordinat Kartesian

Model yang ditunjukkan dibagi menjadi 3 lapisan yaitu :

Lapisan **1** merupakan inti besi stator.

Lapisan **2** merupakan celah udara.

Lapisan **3** merupakan inti besi rotor.

Lapisan **2** merupakan celah udara ekivalen yaitu celah udara yang terdiri dari celah udara sesungguhnya ditambah dengan celah udara tambahan yang dapat ditentukan dengan faktor "Carter" untuk menggantikan susut tegangan magnetik pada alur stator dan rotor.

Berdasarkan model yang ditunjukkan pada gambar 0, maka persamaan (2.7) akan menjadi 2 (dua) persamaan yaitu :

1. **Persamaan pada celah udara**

Pada celah udara, konduktivitas, $\Gamma = 0$, sehingga persamaan (2.7) akan menjadi :

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad \text{.......(2.12)}$$

2. **Persamaan pada lapisan rotor dan stator**

$$\nabla^2 \vec{A} = \alpha \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{.......(2.13)}$$

dimana $\alpha = \mu\Gamma$

II.3. Solusi Persamaan Potensial Vektor Magnetik Kerapatan Fluksi Magnetik.

Dari persamaan Poisson pada lapisan 1 dan 3;

$$\frac{\partial^2 A_{1,3-z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1,3-z}}{\partial y^2} = \alpha . \frac{\partial A_{1,3-z}}{\partial t}$$

dimana : $\alpha = \mu.\Gamma$,

dapat dimisalkan :

$$A_{1,3\text{-}z} = e^t.F.G \quad \text{.......(2.14)}$$

dengan : $F = F(x)$ dan $G = G(y)$

Diferensiasi parsial persamaan (2.14) terhadap x, y dan t masing-masing akan menghasilkan :

$$\frac{\partial A_{1,3-z}}{\partial t} = e^t.F.G \quad \text{.......(2.15)}$$

$$\frac{\partial^2 A_{1,3-z}}{\partial x^2} = e^t.G\frac{d^2F}{dx^2} \qquad \text{.......................... (2.16)}$$

$$\frac{\partial^2 A_{1,3-z}}{\partial y^2} = e^t.F\frac{d^2G}{dy^2} \qquad \text{.......................... (2.17)}$$

Substitusi persamaan (2.15), (2.16) dan (2.17) ke persamaan Poisson untuk lapisan 1 dan 3 akan menghasilkan :

$$e^t.G\frac{d^2F}{dx^2} + e^t.F.\frac{d^2G}{dy^2} = \alpha.e^t.F.G \qquad \text{.......................... (2.18)}$$

Persamaan (2.18) dibagi dengan $F.G.e^t$ akan menghasilkan :

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2} = \alpha. \qquad \text{.......................... (2.19)}$$

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = \alpha - \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2} \qquad \text{.......................... (2.20)}$$

dari persamaan (2.20) terlihat bahwa ruas kiri dan ruas kanan merupakan suatu konstanta. Untuk mendapatkan lengkung distribusi rapat fluksi yang periodik pada sumbu x maka dipilih konstanta $-k^2$. Dengan demikian persamaan (2.20) akan menjadi :

$$\frac{d^2F}{dx^2} + k^2.F = 0 \qquad \text{.......................... (2.21)}$$

$$\alpha - \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2} = -k^2 \qquad \text{.......................... (2.22)}$$

Persamaan (2.22) dapat dinyatakan :

$$\frac{d^2G}{dy^2} - L^2G = 0 \qquad \text{.......................... (2.23)}$$

dimana :

$L^2 = k^2 + \alpha$

Solusi persamaan (2.21) dan (2.23) adalah :

$$F = C_m \sin kx + C_n \cos kx \qquad \text{.......................... (2.24)}$$

$$G = C_k e^{Ly} + C_t e^{-Ly} \qquad \text{.......................... (2.25)}$$

Apabila persamaan (2.24) dan (2.25) dimasukkan ke dalam persamaan (2.14) akan *diperoleh solusi umum persamaaan potensial vektor magnetik pada lapisan 1 dan 3 yaitu :*

$$A_{1,3-z} = e^{t}((C_a e^{Ly} + C_b e^{-Ly})Coskx + (C_c e^{Ly} + C_d e^{-Ly})Sinkx) \quad \text{......... .... (2.26)}$$

dengan C_a, C_b, C_c dan C_d adalah konstanta.

Dengan demikian persamaan potensial vektor magnetik untuk lapisan 1 dan lapisan 3 adalah :

$$A_{1-z} = e^{t}((C_{a1}e^{Ly} + C_{b1}e^{-Ly})Coskx + (C_{c1}e^{Ly} + C_{d1}e^{-Ly})Sinkx) \quad \text{.............. .... (2.27)}$$

$$A_{3-z} = e^{t}((C_{a3}e^{Ly} + C_{b3}e^{-Ly})Coskx + (C_{c3}e^{Ly} + C_{d3}e^{-Ly})Sinkx) \quad \text{............ .... (2.28)}$$

Dengan mengganti fungsi exponensial dengan fungsi hiperbolik, maka persamaan (2.27) dan (2.28) menjadi:

$$\begin{aligned} A_{1-z} = e^{t}(((C_{a1} + C_{b1})CoshLy + (C_{a1} - C_{b1})SinhLy)Coskx + \\ ((C_{c1} + C_{d1})CoshLy + (C_{c1} - C_{d1})SinhLy)Sinkx) \end{aligned} \quad \text{...... ... . (2.29)}$$

$$\begin{aligned} A_{3-z} = e^{t}(((C_{a3} + C_{b3})CoshLy + (C_{a3} - C_{b3})SinhLy)Coskx + \\ ((C_{c3} + C_{d3})CoshLy + (C_{c3} - C_{d3})SinhLy)Sinkx) \end{aligned} \quad \text{...... ... . (2.30)}$$

Persamaan (2.29) dan (2.30) menunjukkan bahwa potensial vektor magnetik merupakan sebuah fungsi yang periodik terhadap x. Dimana konstanta k adalah :

$k = na$, $n = 1,2,3.....$, $a = 2\pi/T$

Dari persamaan potensial vektor magnetik terdahulu telah diperoleh :

Pada Lapis 1:

$$\begin{aligned} A_{1-z} = \sum_{n=1,2,3,..} e^{t}\Big(\big((C_{a1} + C_{b1})Cosh(L.y) + (C_{a1} - C_{b1})Sinh(L.y)\big)Cos(n.a.x) + \\ \big((C_{c1} + C_{d1})Cosh(L.y) + (C_{c1} - C_{d1})Sinh(L.y)\big)Sin(n.a.x)\Big) \end{aligned}$$

Pada Lapis 2:

$$\begin{aligned} A_{2-z} = \sum_{n=1,2,3,..} \Big(\big((C_5 + C_6)Cosh(n.a.y) + (C_5 - C_6)Sinh(n.a.y)\big)Cos(n.a.x) + \\ \big((C_7 + C_8)Cosh(n.a.y) + (C_7 - C_8)Sinh(n.a.y)\big)Sin(n.a.x)\Big) \end{aligned}$$

Pada Lapis 3:

$$A_{3-z} = \sum_{n=1,2,3,..} e^{t}\Big(\big((C_{a3}+C_{b3})\text{Cosh}(L.y)+(C_{a3}-C_{b3})\text{Sinh}(L.y)\big)\text{Cos}(n.a.x)+$$
$$\big((C_{c3}+C_{d3})\text{Cosh}(L.y)+(C_{c3}-C_{d3})\text{Sinh}(L.y)\big)\text{Sin}(n.a.x)\Big)$$

Persamaan rapat fluksi medan magnetik dilapisan-lapisan dapat diturunkan dari :

$$B_{i-x} = \frac{\partial A_{i-z}}{\partial y} \qquad (2.31)$$

$$B_{i-y} = -\frac{\partial A_{i-z}}{\partial x} \qquad (2.32)$$

dimana : i = 1,2, dan 3

Dengan demikian persamaan medan magnetik dilapisan-lapisan adalah :

1. Lapisan satu (rotor)

$$A_{1-z} = \sum_{n=1,3,5,..} e^{t}\Big(\big((C_{a1}+C_{b1})\text{Cosh}(L.y)+(C_{a1}-C_{b1})\text{Sinh}(L.y)\big)\text{Cos}(n.a.x)+ \big((C_{c1}+C_{d1})\text{Cosh}(L.y)+(C_{c1}-C_{d1})\text{Sinh}(L.y)\big)\text{Sin}(n.a.x)\Big) \qquad (2.33)$$

$$B_{1-x} = \frac{\partial A_{1-z}}{\partial y}$$

$$B_{1-x} = \sum_{n=1,3,..} L.e^{t}\Big(\big((C_{a1}+C_{b1})\text{Sinh}(L.y)+(C_{a1}-C_{b1})\text{Cosh}(L.y)\big)\text{Cos}(n.a.x)+ \big((C_{c1}+C_{d1})\text{Sinh}(L.y)+(C_{c1}-C_{d1})\text{Cosh}(L.y)\big)\text{Sin}(n.a.x)\Big) \qquad (2.34)$$

$$B_{1-y} = -\frac{\partial A_{1-z}}{\partial x}$$

$$B_{1-y} = \sum_{n=1,3,..} n.a.e^{t}\Big(\big((C_5+C_6)\text{Sinh}(L.y)+(C_5-C_6)\text{Cosh}(L.y)\big)\text{Sin}(n.a.x)- \big((C_7+C_8)\text{Sinh}(L.y)+(C_7-C_8)\text{Cosh}(L.y)\big)\text{Cos}(n.a.x)\Big) \qquad ...(2.35)$$

2. Lapisan dua (celah udara) :

$$A_{2-z} = \sum_{n=1,3,..} \Big(\big((C_5+C_6)\text{Cosh}(n.a.y)+(C_5-C_6)\text{Sinh}(n.a.y)\big)\text{Cos}(n.a.x)+ \big((C_7+C_8)\text{Cosh}(n.a.y)+(C_7-C_8)\text{Sinh}(n.a.y)\big)\text{Sin}(n.a.x)\Big) \qquad ...(2.36)$$

$$B_{2-x} = \frac{\partial A_{2-z}}{\partial y}$$

$$B_{2-x} = \sum_{n=1,3,..} n.a\Big(\big((C_5 + C_6)\mathrm{Sinh}(n.a.y) + (C_5 - C_6)\mathrm{Cosh}(n.a.y)\big)\mathrm{Cos}(n.a.x) + \big((C_7 + C_8)\mathrm{Sinh}(n.a.y) + (C_7 - C_8)\mathrm{Cos}(n.a.y)\big)\mathrm{Sin}(n.a.x)\Big) \quad .(2.37)$$

$$B_{2-y} = -\frac{\partial A_{2-z}}{\partial x}$$

$$B_{2-y} = \sum_{n=1,3,..} n.a\Big(\big((C_5 + C_6)\mathrm{Cosh}(n.a.y) + (C_5 - C_6)\mathrm{Sinh}(n.a.y)\big)\mathrm{Sin}(n.a.x) - \big((C_7 + C_8)\mathrm{Cosh}(n.a.y) + (C_7 - C_8)\mathrm{Sinh}(n.a.y)\big)\mathrm{Cos}(n.a.x)\Big) \quad ..(2.38)$$

3. Lapisan tiga (stator)

$$A_{3-z} = \sum_{n=1,3,.} e^t\Big(\big((C_{a3} + C_{b3})\mathrm{Cosh}(L.y) + (C_{a3} - C_{b3})\mathrm{Sinh}(L.y)\big)\mathrm{Cos}(n.a.x) + \big((C_{c3} + C_{d3})\mathrm{Cosh}(L.y) + (C_{c3} - C_{d3})\mathrm{Sinh}(L.y)\big)\mathrm{Sin}(n.a.x)\Big) \quad .(2.39)$$

$$B_{3-x} = \frac{\partial A_{3-z}}{\partial y}$$

$$B_{3-x} = \sum_{n=1,3,.} L.e^t\Big(\big((C_{a3} + C_{b3})\mathrm{Sinh}(L.y) + (C_{a3} - C_{b3})\mathrm{Cosh}(L.y)\big)\mathrm{Cos}(n.a.x) + \big((C_{c3} + C_{d3})\mathrm{Sinh}(L.y) + (C_{c3} - C_{d3})\mathrm{Cosh}(L.y)\big)\mathrm{Sin}(n.a.x)\Big) \quad (2.40)$$

$$B_{3-y} = -\frac{\partial A_{3-z}}{\partial x}$$

$$B_{3-y} = \sum_{n=1,3,.} n.ae^t\Big(\big((C_{a3} + C_{b3})\mathrm{Cosh}(L.y) + (C_{a3} - C_{b3})\mathrm{Sinh}(L.y)\big)\mathrm{Sin}(n.a.x) - \big((C_{c3} + C_{d3})\mathrm{Cosh}(L.y) + (C_{c3} - C_{d3})\mathrm{Sinh}(L.y)\big)\mathrm{Cos}(n.a.x)\Big) \quad (2.41)$$

Penyederhanaan Persamaan :

1. Distribusi rapat fluksi merupakan fungsi yang periodik ke arah sumbu x, sedangkan sumbu y diletakkan ditengah-tengah, sehingga $B_y(x)$ merupakan fungsi genap. Dengan demikian komponen sinus pada persamaan (2.35), (2.38), dan (2.41) akan hilang.
2. $B_y(x)$ adalah turunan $A_z(x)$ terhadap x, sehingga $A_z(x)$ merupakan fungsi ganjil. Dengan demikian komponen kosinus pada persamaan (2.33), (2.36), dan (2.39) akan hilang.

3. $B_x(x)$ merupakan turunan $A_z(x)$ terhadap y, karena $A_z(x)$ fungsi ganjil, maka $B_x(x)$ adalah fungsi ganjil. Dengan demikian komponen kosinus pada persamaan (2.34),(2.37), dan (2.40) akan hilang.

Dengan demikian persamaan-persamaan medan magnetik dilapisan-lapisan akan menjadi :

$$A_{1-z} = \sum_{n=1,3,.} e^{t}\left(K.\cosh(L.y) + S.\sinh(L.y)\right)\sin(n.a.x) \quad (2.42)$$

$$B_{1-x} = \sum_{n=1,3,.} L.e^{t}\left(K.\sinh(L.y) + S.\cosh(L.y)\right)\sin(n.a.x) \quad (2.43)$$

$$B_{1-y} = \sum_{n=1,3,.} -n.a.e^{t}\left(K.\cosh(n.a.y) + S.\sinh(n.a.y)\right)\cos(n.a.x) \quad (2.44)$$

dimana : $K = C_{c1} + C_{d1}$, dan $S = C_{c1} - C_{d1}$

$$A_{2-z} = \sum_{n=1,3,.} \left(M.\cosh(n.a.y) + N.\sinh(n.a.y)\right)\sin(n.a.x) \quad (2.45)$$

$$B_{2-x} = \sum_{n=1,3,.} n.a\left(M.\sinh(n.a.y) + N.\cosh(n.a.y)\right)\sin(n.a.x) \quad (2.46)$$

$$B_{2-y} = \sum_{n=1,3,.} -n.a.\left(M.\cosh(n.a.y) + N.\sinh(n.a.y)\right)\cos(n.a.x) \quad (2.47)$$

dimana : $K = C_7 + C_8$, *dan* $S = C_7 - C_8$

$$A_{3-z} = \sum_{n=1,3,.} e^{t}\left(P.\cosh(L.y) + Q.\sinh(L.y)\right)\sin(n.a.x) \quad (2.48)$$

$$B_{3-x} = \sum_{n=1,3,.} L.e^{t}\left(P.\sinh(L.y) + Q.\cosh(L.y)\right)\sin(n.a.x) \quad (2.49)$$

$$B_{3-y} = \sum_{n=1,3,.} -n.a.e^{t}\left(P.\cosh(L.y) + Q.\sinh(L.y)\right)\cos(n.a.x) \quad (2.50)$$

dimana : $P = C_{c3} + C_{d3}$, dan $Q = C_{c3} - C_{d3}$

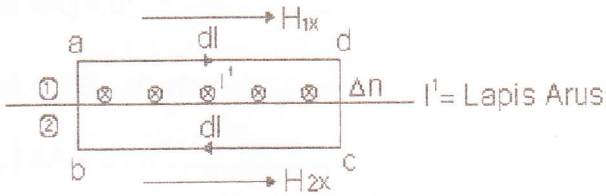
II.4. Penerapan Syarat Batas

Besarnya konstanta pada persamaan (2.42) sampai dengan (2.50) yaitu K, L, M, N, P, dan Q akan ditentukan dengan menggunakan syarat batas. Syarat batas magnetik yang diperlukan pada permukaan batas antara dua bahan magnetik yang berbeda akan ditentukan dengan menggunakan hukum Integral Ampere dan Hukum Gauss.

1. Hukum Integral Ampere

$$\oint \overline{H}.d\overline{L} = I \qquad (2.51)$$

Penerapan hukum integral Ampere digunakan gambar 1



Gbr.1 Syarat batas untuk vektor medan pada bidang temu antara dua bahan

$$\oint_{abcd} \overline{H}.d\overline{L} = I = \iint \overline{J}.d\overline{A} \qquad (2.52)$$

$$\int_a^d H_{1x}dl - \int_c^b H_{2x}dl = \int_0^{\Delta L}\int_0^{\Delta n} J\,dl\,dn \qquad (2.53)$$

$$(H_{1x} - H_{2x})\Delta l = J\Delta l\Delta n \qquad (2.54)$$

$$H_{1x} - H_{2x} = J\Delta n \qquad (2.55)$$

$$H_{1x} - H_{2x} = I^1 \qquad (2.56)$$

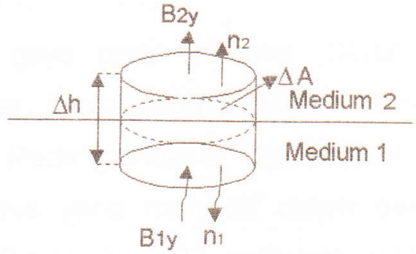
$$\frac{B_{1x}}{\mu_o} - \frac{B_{2x}}{\mu_o} = I^1 \qquad (2.57)$$

$$B_{1x} - B_{2x} = \mu_o . I^1 \qquad (2.58)$$

2. Dengan menggunakan hukum Gauss.

$$\oiint \overline{B}.d\overline{A} = 0 \qquad (2.59)$$

Penerapan hukum Gauss, digunakan gambar 2.



Gbr.2. Permukaan bentuk tabung pendek pada bidang temu dua medium

Jika $\bar{B}$ dibatasi, dengan membuat Δh mendekati nol. Dengan memperhatikan arah n_1 yang berlawanan dengan n_2, dapat disimpulkan :

$$\lim_{\Delta h \to 0} \left(\oiint \bar{B} . d\bar{A} \right) = 0 \quad \text{(2.60)}$$

$$\iint \bar{B}_{1y} . \bar{n}_1 dA + \iint \bar{B}_{2y} . \bar{n}_2 dA = 0 \quad \text{(2.61)}$$

$$\left(B_{2y} - B_{1y} \right) . \Delta A = 0 \quad \text{(2.62)}$$

$$B_{2y} = B_{1y} \quad \text{(2.63)}$$

Dengan cara yang sama maka akan didapat syarat batas :

1. Berdasarkan Hukum Integral Ampere

$$B_{1x}\Big|_{y=0} - B_{2x}\Big|_{y=0} = \mu_0 . I_r^{\,1} \quad \text{(2.64)}$$

$$B_{2x}\Big|_{y=y1} - B_{3x}\Big|_{y=y1} = \mu_0 . I_s^{\,1} \quad \text{(2.65)}$$

2. Berdasarkan Hukum Gauss :

$$B_{1y}\Big|_{y=0} = B_{2y}\Big|_{y=0} \quad \text{(2.66)}$$

$$B_{2y}\Big|_{y=y1} = B_{3y}\Big|_{y=y1} \quad \text{(2.67)}$$

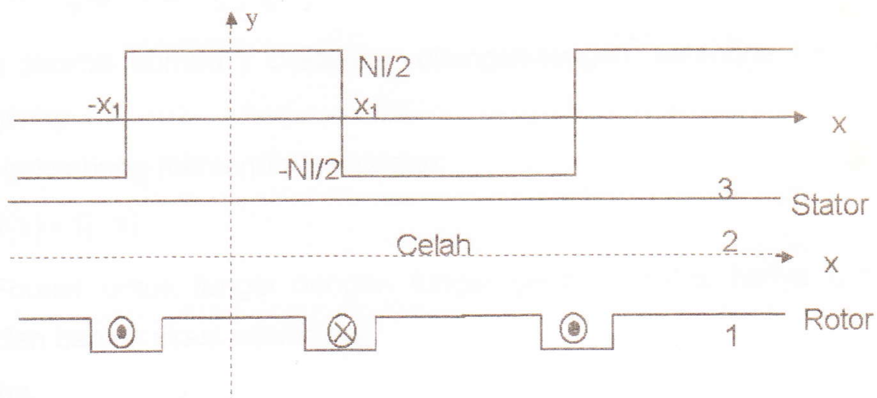
3. Dengan asumsi bahwa permeabilitas pada stator dan rotor tak hingga $\mu = \infty$

$$B_{1x}\Big|_{y=0} = 0 \quad \text{(2.68)}$$

$$B_{2x}\Big|_{y=y1} = 0 \quad \text{(2.69)}$$

II.5. Penentuan Lapis Arus

Untuk menganalisa gaya gerak magnet (GGM) yang dihasilkan pada permukaan rotor, sebagai dasar analisa adalah menggunakan persamaan Maxwell dan Deret Fourier. Pada gambar 3, diperlihatkan distribusi (GGM) yang ditimbulkan oleh adanya arus yang mengalir dalam belitan pada celah udara sesuai hukum Ampere yaitu $2\,g\,H = N.I\ (AT)$, sehingga $g\,H = N.I / 2\ (AT)$



Gbr.3. Distribusi Gaya Gerak Magnet Pada Permukaan Rotor

Jika magnitude dari GGM yang dihasilkan oleh belitan adalah ($g\,H = N.I / 2\ (AT)$), maka untuk bentuk gelombang segi empat pada gambar 3 tersebut adalah periodik, sehingga persamaannya dapat dicari dengan menggunakan Deret Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n.a.x) + b_n \sin(n.a.x)$$

dengan koefisien-koefisien sebagai berikut :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T f(x)\cos(n.a.x).dx$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T f(x)\sin(n.a.x).dx$$

Bila fungsi f(x) mempunyai perioda 2τ

Deret Fourier dengan fungsi f(x) diatas didefenisikan sebagai:

$$a_0 = \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{2\tau} f(x)\cos\left(\frac{n.\pi.x}{\tau}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{2\tau} f(x)\sin\left(\frac{n.\pi.x}{\tau}\right)dx$$

Dengan asumsi sumbu y diletakkan ditengah-tengah, sehingga $f(x)$ merupakan fungsi genap.

Bentuk gelombang memenuhi hubungan:

$$f(x) = f(-x)$$

Deret Fourier untuk fungsi dengan fungsi genap simetris hanya terdiri bentuk cosine dan bentuk sinus adalah nol.

Sehingga,

dengan $f(x) = NI/2$

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-x1}^{x1} f(x)dx = \frac{1}{T}\int_{-x1}^{x1} \frac{N.I}{2}dx$$

$$a_o = \frac{1}{T}\frac{N.I}{2}\left((x)_{-x1}^{0} + (x)_0^{x1}\right) = 0$$

$$a_0 = \mathbf{0} \text{ dan } \mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_o^T f(x)\cos\left(\frac{2n.\pi.x}{T}\right)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-x1}^{x1}\frac{NI}{2}\cos\left(\frac{2n.\pi.x}{T}\right)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\frac{N.I}{2}\int_{-x1}^{x1}\cos\left(\frac{2.n.\pi.x}{T}\right)dx$$

$$a_n = \frac{N.I}{T}\int_{-x1}^{0}\cos\left(\frac{2.n.\pi}{T}x\right)dx + \int_0^{x1}\cos\left(\frac{2.n.\pi}{T}x\right)dx$$

$$a_n = \frac{N.I}{T}\frac{T}{2.n.\pi}\left(\mathrm{Sin}\left(\frac{2.\pi.n}{T}x\right)_{-x1}^{0} + \mathrm{Sin}\left(\frac{2.\pi.n}{T}x\right)_{0}^{x1}\right)$$

$$a_n = \frac{N.I}{n.\pi}\mathrm{Sin}\left(\frac{2.\pi.n}{T}x_1\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-x1}^{x1} f(x)\mathrm{Sin}(a.n.x)dx = 0$$

Dengan demikian besar gaya gerak magnet (F) adalah :

$$F = \sum\frac{N.I}{n.\pi}\sin\left(\frac{2.\pi.n}{T}x_1\right)\cos\left(\frac{2.n.\pi}{T}x\right) \quad \text{.......................................(2.70)}$$

Lapis arus (I^1) adalah :

$$I^1 = \frac{dF}{dx} = -\frac{2\pi.n}{T}\frac{N.I}{\pi.n}\mathrm{Sin}\left(\frac{n.2\pi}{T}x_1\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{2.n.\pi}{T}x\right)$$

$$I^1 = -\frac{2.N.I}{T}\mathrm{Sin}\left(\frac{2.n.\pi}{T}x_1\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{2.n.\pi}{T}x\right)$$

$$I^1 = -\frac{2.N.I}{T}\mathrm{Sin}(n.a.x_1).\mathrm{Sin}(n.a.x) \quad \text{.......................................(2.71)}$$

II.6. Penentuan konstanta

Nilai dari suatu konstanta akan ditentukan berdasarkan syarat batas dengan jalan sebagai berikut :

Subsitusi persamaan (2.43) kedalam persamaan (2.66) akan didapatkan :

$$L.e^t(K.\mathrm{Sinh}(n.a.0) + S.\mathrm{Cosh}(n.a.0))\mathrm{Sin}(n.a.x) = 0$$

$$L.e^t.S = 0, \quad S = 0 \quad \text{.......................................(2.72)}$$

Subsitusi persamaan (2.43) dan (2.46) ke dalam persamaan (2.64) akan didapat :

$$L.e^t(K.\mathrm{Sinh}(n.a.0) + L.\mathrm{Cosh}(n.a.0))\mathrm{Sin}(n.a.x) -$$

$$n.a(M.\mathrm{Sinh}(n.a.0) + N.\mathrm{Cosh}(n.a.0))\mathrm{Sin}(n.a.x) = \mu_0.I_r{}^1$$

$$Le^tS - n.a.N = \frac{\mu_0 . I_r^1}{Sin(n.a.x)} \quad \ldots\ldots (2.73)$$

Dengan subsitusi persamaan (2.71) dan (2.72) kedalam persamaan (2.73) akan didapat

$$N = \frac{2.\mu_0 .N_r.I_r}{n.a.T} Sin(n.ax_1) \quad \ldots\ldots (2.74)$$

Subsitusi persamaan (2.36) kedalam persamaan (2.69) akan didapat :

$$n.a(M.Sinh(n.a.y_1) + N.Cosh(n.a.y_1))Sin(n.a.x) = 0 \quad \ldots\ldots (2.75)$$

Subsitusi persamaan (2.74) kedalam persamaan (2.75) diperoleh :

$$M = -N\frac{Cosh(n.a.y_1)}{Sinh(n.a.y_1)} = -N.Cotgh(n.a.y_1) \ldots\ldots (2.76)$$

Subsitusi persamaan (2.34) dan (2.37) kedalam persamaan (2.76) diperoleh

$$-n.a.e^t(KCosh\ nay + SSinh\ nay)Cos\ nax + na(MCosh\ nay + NSinh\ nay)Cos\ nax = 0$$

$$-n.a.e^t(KCosh\ (na0) + KSinh\ (na0))Cos\ (nax) +$$

$$n.a.(MCosh\ (na0) + NSinh(\ na0))Cos\ (nax) = 0 \quad \ldots\ldots (2.77)$$

$$-n.a.e^tK + naM = 0, \text{ sehingga } \quad K = \frac{1}{e^t}M$$

Subsitusi persamaan (2.76) kedalam persamaan (2.77) diperoleh :

$$K = -\frac{1}{e^t}N.Cotgh(n.a.y_1) \ldots\ldots (2.78)$$

Subsitusi persamaan (2.37) dan (2.50) kedalam persamaan (2.67) diperoleh :

$$-n.a(M.Cosh(n.a.y_1) + N.Sinh(n.a.y_1)) +$$

$$n.a.e^t(P.Cosh(L.y_1) + Q.Sinh(L.y_1)) = 0 \quad \ldots\ldots (2.79)$$

Subsitusi persamaan (2.36) dan (2.39) kedalam persamaan (2.65) diperoleh :

$$n.a.(M.Sinh(n.a.y_1) + N.Cosh(n.a.y_1)).Sin\ (n.a.x) -$$

$$L..e^t.(P.Sinh(L.y_1) + Q.Cosh(L.y_1)).Sin(n.a.x) = \mu_0 I_s^1 \quad \ldots\ldots (2.80)$$

Jika persamaan (2.79) dikalikan L.Cosh $L.y_1$ akan diperoleh :

$$-n.a.L\left(M.Cosh(n.a.y_1)+N.Sinh(n.a.y_1)\right).Cos\,(L.y_1)+$$
$$n.a.Le^{t}.\left(P.Cosh(L.y_1)+Q.Sinh(L.y_1)\right).Cos(L.y_1)=0 \quad \text{......................(2.81)}$$

Persamaan (2.80) dikalikan dengan n.a.Sinh Ly_1 akan didapat :

$$(n.a)^2\left(M.Sinh(n.a.y_1)+N.Cosh(n.a.y_1)\right).Sin\,(L.x)-$$
$$-n.a.Le^{t}.\left(P.Sinh(L.y_1)+Q.Cosh(L.y_1)\right).Sin(L.x)=\frac{n.a.\mu_0 I_s{}^1}{Sin(n.a.x)}Sinh(L.y1) \quad \text{....(2.82)}$$

Kemudian persamaan (2.81) dan (2.82) digabungkan akan menjadi :

$$-\left(n.a.LCosh(n.a.y_1)Cosh(L.y_1)-n^2a^2Sinh(n.a.y_1).Sinh(L.y_1)\right).M-$$
$$\left(n.a.L.Sinh(n.a.y_1)Cosh(L.y_1)-n^2a^2Cosh(n.a.y_1).Sinh(L.y_1)\right).N+ \quad \text{...(2.83)}$$
$$n.a.L.e^{t}.P=\frac{n.a.\mu_0.I_s{}^1}{Sin(n.a.x)}.Sinh(L.y_1)$$

Persamaan (2.83) dapat ditulis :

$$-\gamma.M-\beta.N+n.a.L.e^{t}.P=\frac{n.a.\mu_0.I_s{}^1}{Sin(n.a.x)}.Sinh(L.y_1) \quad \text{..................................(2.84)}$$

Dimana :

$$\gamma=n.a.L.Cosh(n.a.y_1).Cosh(L.y_1)-n^2a^2Sinh(n.a.y_1).Sinh(L.y_1)$$

$$\beta=n.a.L.Sinh(n.a.y_1).Cosh(L.y_1)-n^2a^2Cosh(n.a.y_1).Sinh(L.y_1)$$

$$P=\frac{\gamma}{n.a.L.e^{t}}.M+\frac{\beta}{n.a.L.e^{t}}.N+\frac{2.\mu_0.I_s{}^1Sinh(L.y_1)}{T.L.e^{t}.Sin(n.a.x)} \quad \text{.............................(2.85)}$$

Dengan memasukkan persamaan (2.71) kedalam persamaan (2.85) akan didapatkan :

$$P=\frac{\gamma}{n.a.L.e^{t}}.M+\frac{\beta}{n.a.L.e^{t}}.N+\frac{2.\mu_0.N_sI_s.Sin(n.a.x).Sinh(L.y_1)}{T.L.e^{t}} \quad \text{........(2.86)}$$

Jika persamaan (2.79) dikalikan L.Sinh $L.y_1$ akan diperoleh :

$$-n.a.L\left(M.Cosh(n.a.y_1)+N.Sinh(n.a.y_1)\right).Sinh\,(L.y_1)+$$
$$n.a.Le^{t}.\left(P.Cosh(L.y_1)+Q.Sinh(L.y_1)\right).Sinh(L.y_1)=0 \quad \text{......................(2.87)}$$

Persamaan (2.80) dikalikan dengan n.a.Cosh Ly_1 akan didapat :

$$(n.a)^2\left(M.\operatorname{Sinh}(n.a.y_1)+N.\operatorname{Cosh}(n.a.y_1)\right).\operatorname{Cosh}(L.x)-$$
$$n.a.Le^t.\left(P.\operatorname{Sinh}(L.y_1)+Q.\operatorname{Cosh}(L.y_1)\right).\operatorname{Cosh}(L.x)=\frac{\mu_0 I_s^{\ 1}}{\operatorname{Sin}(n.a.x)}\operatorname{Cosh}(L.y1) \quad \ldots(2.88)$$

Kemudian persamaan (2.87) dan (2.88) digabungkan akan menjadi :

$$\left(n^2a^2.L\operatorname{Sinh}(n.a.y_1)\operatorname{Cosh}(L.y_1)-n.a.\operatorname{Cosh}(n.a.y_1).\operatorname{Sinh}(L.y_1)\right).M+$$
$$\left(n^2a^2.L.\operatorname{Cosh}(n.a.y_1)\operatorname{Cosh}(L.y_1)-n.a.\operatorname{Sinh}(n.a.y_1).\operatorname{Sinh}(L.y_1)\right).N- \quad \ldots\ldots\ldots(2.89)$$
$$n.a.L.e^t.Q=\frac{n.a.\mu_0.I_s^{\ 1}}{\operatorname{Sin}(n.a.x)}.\operatorname{Cosh}(L.y_1)$$

Persamaan (2.89) dapat ditulis :

$$\nu.M-\rho.N-n.a.L.e^t.Q=\frac{n.a.\mu_0.I_s^{\ 1}}{\operatorname{Sin}(n.a.x)}.\operatorname{Cosh}(L.y_1) \quad \ldots\ldots\ldots(2.90)$$

Dimana :

$$\nu=n^2a^2.L.\operatorname{Sinh}(n.a.y_1).\operatorname{Cosh}(L.y_1)-n.a.L.\operatorname{Cosh}(n.a.y_1).\operatorname{Sinh}(L.y_1)$$

$$\rho=n^2a^2.L.\operatorname{Cosh}(n.a.y_1).\operatorname{Cosh}(L.y_1)-n.a.L.\operatorname{Sinh}(n.a.y_1).\operatorname{Sinh}(L.y_1)$$

$$Q=\frac{\nu}{n.a.L.e^t}.M+\frac{\rho}{n.a.L.e^t}.N-\frac{2.\mu_0.I_s^{\ 1}\operatorname{Cosh}(L.y_1)}{T.L.e^t.\operatorname{Sin}(n.a.x)} \quad \ldots\ldots\ldots(2.91)$$

Dengan memasukkan persamaan (2.71) kedalam persamaan (2.91) akan didapatkan:

$$Q=\frac{\nu}{n.a.L.e^t}.M+\frac{\rho}{n.a.L.e^t}.N-\frac{4.\mu_0.N_s I_s.\operatorname{Sin}(n.a.x).\operatorname{Conh}(L.y_1)}{T.L.e^t} \quad \ldots\ldots(2.92)$$