BAB III

PERTURBASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSI TAK LINEAR

Pada bab ini di berikan hasil utama dari penelitian ini yaitu mengenai kestabilan pertubasi sistem persamaan diferensi tak linear yang sebelumnya dibahas tentang persamaan diferensi tak linear terutama mengenai pelinearan.

3.1. Sistem Persamaan Diferensi Tak linear

Diberikan $x(n) \in R^k$ dan $f : N_0 \to R^k$ dan $N_0 \subseteq R^k$ maka sistem persamaan diferensi tak linear berbentuk:

$$x(n+1) = f(n,x(n)),\ x(0)=x_0 \qquad (3.1.1)$$

Sebelum membahas tentang perturbasi dari sistem tak linier, terlebih dahulu akan dipaparkan tentang metode pelinearan yang merupakan metode tertua dalam teori kestabilan, kita sesuaikan pendekatan Perron untuk mempelajari sistem persamaan diferensi tak linear berikut ini:

$$y(n+1) = A(n)\, y(n) + g(n,y(n)) \qquad (3.1.2)$$

dengan menggunakan komponen linear :

$$x(n+1) = A(n)x(n) \qquad (3.1.3)$$

dengan $A(n)$ adalah matriks $k \ x \ k$, untuk setiap $n \in N_0$ dan $g : N_0 x G \to R^k, G \subset R^k$ adalah fungsi kontinu. Persisnya sistem (3.1.2) merupakan pertubasi dari sistem (3.1.3). Sistem (3.1.2) bisa saja muncul sebagai pelinearan dari sistem persamaan diferensi tak linier yang berbentuk

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$y(n+1) = f(n,y(n)) \qquad (3.1.4)$$

dengan $f : N_0 x G \to R^k, G \subset R^k$ suatu fungsi yang mempunyai turunan pada titik equilibrium y^*. Agar lebih sederhana, kita asumsikan dalam bagian ini $y^* = 0$. $N_0 = N$ adalah himpunan bulat bulat positif. Kita juga mengasumsikan bahwa $f(n,0) = 0$, $n \in N_0$. Sekarang penulis akan mengganbarkan aplikasi dari metode pelinearan untuk sistem (3.1.4). Misalkan $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)^T$ matriks Jacobian dari f didefinisikan sebagai:

$$\left.\frac{\partial f(n,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\partial f(n,0)}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(n,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n(n,0)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(n,0)}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$

Untuk penyederhanaan $\frac{\partial f(n,0)}{\partial y}$ di notasikan dengan $f'(n,0)$.

Misalkan $\frac{\partial f(n,0)}{\partial y} = A(n)$ dan g(n,y) = f(n,y)- A(n)y(n) maka sistem (3.1.3) dapat ditulis kebentuk (3.1.2). Kita katakan g(n,y) = o(y) (titik terkecil dari y) dan $\|y\| \to 0$ jika $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $\|g(n,y)\| \le \varepsilon\|y\|$ dengan $\|y\| < \delta$ dan $n \in N_0$.

Suatu kasus khusus dari sistem (3.1.4) dapat dibentuk sistem autonomous yang berbentuk:

$$y(n+1) = f(y(n)) \qquad (3.1.5)$$

yang dapat ditulis sebagai

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)) \qquad (3.1.6)$$

dengan $A = f'(0)$ adalah matrik jacobian dari f di titik 0 dan $g(y) = f(y) - Ay$. Karena f mempunyai turunan pada 0, dapat dilihat bahwa $g(y) = o(y)$ jika $\|y\| \to 0$.

Ekivalen dengan $\lim_{\|y\| \to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0$.

Sebelum melanjutkan analisa kita mengenai kestabilan, kita pertimbangkan suatu lema sederhana berikut ini yang digunakan untuk mencapai hasil berikutnya. Lema ini disebut juga dengan pertaksamaan Gronwal diskrit.

Lemma 3.2.1. (Pertaksamaan Gronwal Diskrit) Misalkan $z(n)$ dan $h(n)$ adalah dua barisan bilangan real dengan $n \geq n_0 \geq 0$ dan $h(n) \geq 0$. Jika

$$z(n) \leq M\left[z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)z(j)\right], \qquad M>0$$

maka

$$z(n) \leq z(n_0)\prod_{j=n_0}^{n-1}[(1 + Mh(j))] \qquad (3.1.7)$$

$$z(n) \leq z(n_0)\exp[Mh(j)] \qquad (3.1.8)$$

Bukti: Misalkan

$$u(n) = M\left[u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j)\right], \; u(n_0) = z(n_0). \qquad (3.1.9)$$

Karena $h(j) \geq 0$ untuk setiap $j \geq n_0$ dapat dilihat bahwa $z(n) \leq u(n)$ untuk setiap $n \geq n_0$ dari persamaan (3.1.9) di peroleh :

$u(n+1) = Mh(n)u(n)$ atau $a(n+1) = [1+Mh(n)]u(n)$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Kemudian perhatikan bahwa $\Delta\left(\sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right) = x(n)$ (lihat Elaydi, S hal. 50), sehingga diperoleh

$$u(n) \le \prod_{j=n_0}^{n-1}[1 + Mh(j)]u(n_0).$$

Ini menunjukkan formula (3.1.7). Kesimpulan dari formula (3.1.8) diperoleh dari kenyataan bahwa $1 + Mh(j) \le \exp(Mh(j))$. ■

Selanjutnya kita tinjau mengenai kestabilan solusi nol dari sitem persamaan diferensi (3.1.2).

Teorema 3.2.1. Asumsikan $g(n, y) = o(\|y\|)$ dan $\|y\| \to 0$. Jika solusi nol dari sistem homogen (3.1.3) adalah stabil asimtotik seragam, maka solusi nol dari sistem tak linear (3.1.2) adalah stabil eksponensial.

Bukti: Karena sistem homogen (3.1.3) stabil asimtotik seragam, maka $\|\phi(n,m)\| \le M\eta^{(n-m)}$ $, n \ge m \ge n_0, M \ge 1$ dan $\eta \in (0,1)$ (dari definisi stabil asimtotik seragam). Dari variasi formula konstanta, solusi dari sistem (3.1.6) diberikan oleh

$$y(n, n_0, y_0) = \phi(n, n_0)y_0 + \sum_{l=n_0}^{n-1} \phi(n, l+1)g(n, y(l)).$$

jadi

$$\|y(n)\| \le M\eta^{(n-n_0)}\|y_0\| + M\eta^{-1}\sum_{l=n_0}^{n-1} \eta^{(n-l)}\|g(n, y(l))\| \qquad (3.1.10)$$

untuk $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga jika $\|g(n, y)\| < \varepsilon$ maka $\|y\| < \delta$. Jadi $\|y(l)\| < \delta$.

Sistem (3.1.10) menjadi

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \le M\left[\eta^{-n_0}\|y_0\| + \sum_{l=n_0}^{n-1}\varepsilon\eta^{-l-1}\|y(l)\|\right] \qquad (3.1.11)$$

Misalkan $z(n) = \eta^{-n}\|y(n)\|$ dan dengan menggunakan pertaksamaan Gronwall (3.1.7) diperoleh,

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \le \eta^{-n_0}\|y_0\|\sum_{l=n_0}^{n-1}\left[1 + \varepsilon\eta^{-1}M\right].$$

Jadi

$$\|y(n)\| \le \|y_0\|(\eta + \varepsilon M)^{(n-n_0)} \qquad (3.1.12)$$

Pilih $\varepsilon < {(1-\eta)}/{M}$. Maka $\eta + \varepsilon M < 1$. Jadi $\|y(n)\| \le \|y_0\| < \delta$ untuk setiap $n \ge n_0 \ge 0$. Jadi sistem (3.1.11) terpenuhi dan dari sistem (3.1.12) maka diperoleh kestabilan eksponensial. ■

3.2. Perturbasi Sistem Differensi Tak Linier

Prosedur tentang perturbasi tidak hanya dipakai untuk masalah nilai awal, tetapi juga dapat digunakan untuk variasi dari sistem linier dan sistem tak linier. Namun penulis hanya akan membahas pada sistem tak linier saja. Tehnik iplementasi dari sitem perturbasi itu terdiri dari tiga langkah dasar:

1. Diberikan perubahan pada sistem perturbasi (3.1.2) yaitu dengan paramater $|x_0|$ yang cukup kecil.
2. Asumsikan bahwa solusi nol yang diperoleh dari koefisien pada sistem tak linier (3.1.1) berbentuk urutan perturbasi .
3. Solusi yang diperoleh dari sistem pertubasi (3.1.2) tersebut berbentuk paramater $|x_0|$ yang cukup kecil.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Dari beberapa definisi dan teorema tentang kestabilan dari sistem diferensi tak linier dan perturbasi dari sistem diferensi tak linier, maka pada bagian ini akan dibahas secara khusus bagaimana perturbasi dari sistem diferensi tak linier sehingga sistem diferensi tak linier tersebut h_stabil. Adapun yang dimaksud dengan h- stabil diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 3.2.1: Solusi nol dari sistem persamaan diferensi tak linier (3.1.1) dikatakan h_stabil jika terdapat suatu fungsi positif dan terbatas h : $\mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ dan suatu konstanta $c \geq 1$ sehingga

$$|x(n, n_0, x_0)| \leq c|x_0|\, h(n)\, h^{-1}(n_0) \qquad (3.2.1)$$

untuk $n \geq n_0$ dan $|x_0|$ adalah cukup kecil. (Pada tulisan ini $\left(h^{-1} = 1/h(n)\right)$.)

Definisi 3.2.2: Solusi nol dari sistem persamaan diferensi tak linier (3.1.1) dikatakan h_stabil dalam variasi jika terdapat suatu fungsi positif dan terbatas h : $\mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ dan suatu konstanta $c \geq 1$ sehingga

$$|\phi(n, n_0, x_0)| \leq cn\,(n)\, h^{-1}(n_0) \qquad (3.2.2)$$

untuk $n \geq n_0$ dan $|x_0|$ adalah cukup kecil.

Selanjutnya misalkan bahwa persamaan variasional dari sistem (3.1.1) adalah

$$z(n+1) = f_x(n, x(n, n_0, x_0))z(n) \ . \qquad (3.2.3)$$

Sistem persamaan (3.1.1) h-stabil dalam variasi jika sistem variasional (3.2.2) h-stabil. Dengan demikian definisi 3.2.2 mengakibatkan definisi 3.2.1.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Lemma 3.2.1. Asumsikan $f: N_0 \times R^m \to R^m$ dan f mempunyai turunan parsial pada $N_0 \times R^m$. Misalkan solusi $x(n)=x(n, n_0, x_0)$ dari sistem $x(n+1)=f(n,x(n))$ ada untuk $n \geq n_0$ dan

$$H(n,n_0,x_0)=\frac{\partial f(n,x(n,n_0,x_0))}{\partial x},$$

maka

$$\phi(n,n_o,x_0)=\frac{\partial x(n,n_0,x_0)}{\partial x_0},$$

ada dan merupakan solusi dari

$$\phi(n+1,n_0,x_0)=H(n,n_0,x_0)\phi(n,n_0,x_0)$$

$$\phi(n_0,n_0,x_0) = I.$$

Bukti: Karena $x(n)=x(n, n_0, x_0)$ solusi dari $x(n+1)=f(n,x(n))$ maka diperoleh:

$$x(n+1,n_0,x_0)=f(n,x(n,n_0,x_0)), \quad x(n_0,n_0,x_0)=x_0$$

Kemudian diturunkan parsial terhadap x_0 didapat

$$\frac{\partial x(n+1)}{\partial x_0}=\frac{\partial f(n,x(n))}{\partial x}\cdot\frac{\partial x(n)}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial x(n_0)}{\partial x_0}=I.$$

Perhatikan bahwa ini berlaku untuk semua solusi. Dengan demikian kita memperoleh hasil yang diinginkan. ■

Bainov dan Simeonov menunjukkan bahwa Jika x(n) dan y(n) masing-masing merupakan solusi dari sistem (3.1.1) dan (3.1.2), dan $x(n_0)=y(n_0)$, maka formula Alekseev berikut ini dipenuhi :

$$y(n,n_0,x_0)=x(n,n_0,y_0)+\sum_{l=n_0}^{n-1}\int_0^1 \phi(n,l+1,f(l.y(l,n_n,x_0))+$$

$$+\tau\cdot g(l,y(l,n_n,x_0))d\tau.g(l,y(l,n_n,x_0))$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Selanjutnya misalkan $u=u(n)$ memenuhi pertidaksamaan,

$$u(n) \le c + \sum_{i=1}^{p}\left[\sum_{k=n_0}^{n-1}\lambda_i(k)\,\omega_i(u(k))\right], \qquad p \in N \tag{3.2.4}$$

dengan

(H_1) Fungsi $\omega_i : [d,\infty) \to [0,\infty)$, $1 \le i \le p$. adalah kontinu dan tak turun,

$\omega_i(u) > 0$ untuk $u > d$ dan $\dfrac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$ $(1 \le i \le p-1)$ adalah tak turun

pada $[d,\infty)$.

(H_2) Fungsi dari u: $\mathbf{N} \to [d,\infty)$ dan λ_i : $\mathbf{N} \to [0,\infty)$ c adalah fungsi, c adalah

konstanta sehingga $c > d$.

Kemudian didefinisikan fungsi

(i) $W_i(u) = \int_{u_i}^{u}\left(\dfrac{ds}{\omega_i(s)}\right)$, $u > 0$, $u_i > 0$ $(1 \le i \le p)$ dan W_i^{-1} adalah

fungsi invers dari $W_I(u)$.

(ii) $\varphi_0(u) = u$ dan

$$\varphi_i(u) = \phi_i \circ \phi_{i-1} \circ \ldots \circ \phi_1, \quad 1 \le i \le p \tag{3.2.5}$$

dengan $\varphi_0(u) = W_i^{-1}[W_i(u) + \alpha_i]$, $\alpha_i \ge 0$ adalah konstanta.

Medina, R., dan Pinto, M., memodifikasi pertidaksamaan (3.2.4) menjadi

$$u(n) \le w_p^{-1}\left[w_p(\varphi_{p-1}(c)) + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_p(k)\right] \tag{3.2.6}$$

untuk beberapa $n \le m$. Dengan asumsi bahwa (H_1) dan (H_2) dipenuhi, kemudian misalkan $m \in N$ sehingga

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\alpha_i(m) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_i(k) \leq \int_{\varphi_{i-1}(c)}^{\infty} \frac{ds}{\omega_i(s)} \qquad (1 \leq i \leq p)$$

dengan fungsi $\varphi_i(0 \leq i \leq p-1)$ diberikan pada (ii) dengan $\alpha_i = \alpha_i(m)$.

Dengan menggunakan hasil ini dapat ditunjukkan teorema berikut ini yang merupakan syarat perlu agar sistem persamaan pertubasi (3.2.1) h-stabil.

Teorema 3.2.1. Asumsikan bahwa

(i). Sistem persamaan diferensi (3.1.1) adalah h_stabil dan

$$\int_0^1 \left|\phi(n, l+1, f(l, y(l)) + \tau \cdot g(l, y(l))\right| d\tau \leq ch(n)h^{-1}(l+1), \qquad (3.2.7)$$

untuk $n \geq l+1 \geq n_0$.

Dengan $\phi(n, n_0, x(n, n_0, x_0))$ adalah matriks fundamental dari sistem persamaan variasional (3.2.3).

(ii). Perturbasi $g = g(n,y)$ adalah didefinisikan pada N_0 x R^m sehingga

$$|g(n, y)| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(n)\, \omega_i(|y|), \quad P \in N \qquad (3.2.8)$$

dengan,

(ii.1) fungsi ω_i $(1 \leq i \leq p)$ yang memenuhi kondisi (H1), dan

$$\int_0^1 \frac{ds}{\omega_i(s)} = \infty, \qquad (3.2.9)$$

Lebih lanjut, untuk setiap i, $1 \leq i \leq p$ ada fungsi r_i, sehingga

$$\omega_i(\beta u) \leq r_i(\beta)\omega_i(u), \qquad \beta > 0, u \geq 0. \qquad (3.2.10)$$

(ii.2). $\lambda_i : N \to [0, \infty)$ sehingga

$$\lambda_i(n) r_i(h(n)) h^{-1}(n+1) \in l_i(N_0), \qquad 1 \leq i \leq p.$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

maka, bila $|y_0|$ cukup kecil dan solusi $y(n)=y(n,n_0,y_0)$ untuk sistem persamaan pertubasi (3.1.2) memenuhi $|y(n,n_0,y_0)|\leq o(|y_0|)h(n)$, $n\geq n_0$, dengan $o(|y_0|)\to 0$ jika $|y_0|\to 0$. Lebih lanjut, persamaan (3.1.2) stabil biasa, dan jika $h(n)\to 0$, $n\to\infty$ maka persamaan (3.1.2) stabil asimtotik.

Bukti: Pertama, perhatikan bahwa persamaan (3.2.9) mengakibatkan

$$\varphi_i(0^+)=0, \qquad 1\leq i\leq p, \tag{3.2.11}$$

dengan φ_i sudah diberikan oleh (3.2.5).

Dari formula Alekseev, $y(n) = y(n,n_0,y_0)$ memenuhi

$$y(n) = x(n,n_0,y_0) + \sum_{l=n_0}^{n-1}\int_0^1 \phi(n,l+1,f(l.y(l)) + \tau\cdot g(l,y(l))d\tau.g(l,y(l))$$

maka (i) dan (3.2.7) mengakibatkan

$$|y(n)| \leq c|y_0|h(n)h^{-1}(n_0) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{l=n_0}^{n-1} c\lambda_i(l)h^{-1}(l+1)r_i(h(l))\omega_i(h^{-1}(l)|y(l)|).$$

dan dari (3.2.10) diperoleh:

$$h^{-1}(n)|y(n)| \leq c|y_0|h^{-1}(n_0) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{l=n_0}^{n-1} c\lambda i(l)h^{-1}(l+1)ri(h(l))\omega i(h^{-1}(l)|y(l)|)$$

Sekarang kita gunakan pertidaksamaan (3.2.6) untuk $v(n) = h^{-1}(n)|y(n)|$ diperoleh bahwa bila $|y_0|$ cukup kecil,

$$|y(n)| \leq h(n).W_p^{-1}W_p\left(\varphi_{p-1}\left(c|y_0|h^{-1}(n_0)\right)\right) + \sum_{l=n_0}^{n-1} ch^{-1}(l+1)\lambda_p(l)r_p\left(h(l)\right) \tag{3.2.12}$$

untuk $n\geq n_0$.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Dengan demikian, jika $M = \sup\left\{ h(n)/n \in N_0 \right\}$, i= p-1, dari (3.2.12) dapat dipilih $|y_0|$ cukup kecil sehingga

$$h(n)W_p^{-1}\left[W_p\left(\varphi_{p-1}\left(c|y_0|h^{-1}(n_0)\right)\right) + \sum_{l=n_0}^{n-1} ch^{-1}(l+1)\lambda_p(l)r_p(h(l)) \right] \leq M\varphi_p\left(c|y_0|h^{-1}(n)\right) \quad (3.2.13)$$

untuk $n \geq n_0$.

Dengan demikian, untuk setiap $n \geq n_0$ dan $|y_0|$ cukup kecil

$$|y(n, n_0, y_0)| \leq h(n)\varphi_p\left(c|y_0|h^{-1}(n_0)\right) \quad (3.2.14)$$

akhirnya dari (3.2.12) dan (3.2.13) diperoleh kestabilan untuk i=p. ■

Hasil berikut ini juga merupakan syarat agar sistem persamaan pertubasi (3.1.2) h-stabil.

Teorema 3.2.2. Asumsikan kondisi (I) pada teorema 3.2.1 terpenuhi dan perurbasi $g = g(n,y)$ memenuhi

$$|g(n,y)| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda i(n)|y|^{\gamma_i} \qquad , p \in N$$

dengan $\gamma_i \geq 1$, $(1 \leq i \leq p)$ adalah konstanta, barisan $\lambda_i : N \to [0,\infty)$ positif dan $\lambda i(n)h^{\gamma_i}(n)h^{-1}(n+1) \in l_1(N_0)$ maka persamaan perturbasi (3.1.2) juga h_stabil.

Bukti: Misalkan $\omega(u) = u^{\gamma+1}$ dan $\phi(s) = W^{-1}[W(s) + \alpha]; s \geq 0,\ \alpha > 0$.

Akan dibuktikan bahwa jika s cukup kecil maka terdapat konstanta positif $M \geq 1$ sehingga

$$\phi(s) \leq Ms \quad (3.2.15)$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Kenyataannya, jika $\gamma = 0$ maka untuk setiap $s > 0$,

$$\phi(s) = W^{-1}[W(s) + \alpha] = e^{\alpha} s$$

Jika $\gamma > 0$ maka $W(u) = -u^{-\gamma}/\gamma, u > 0;\ W^{-1}(v) = (-\gamma v)^{-1/\gamma}, v < 0.$

Jadi

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= W^{-1}[W(s) + \alpha] \\
&= \left[-\gamma . \frac{-s^{-\gamma}}{\gamma} - \gamma . \alpha \right]^{-1/\gamma} \\
&= s[1 - \gamma . s^{\gamma} . \alpha]^{-1/\gamma} \\
&\leq Ms
\end{aligned}$$

untuk s cukup kecil dan $M \geq 1$. Dengan demikian dari pertidaksamaan terakhir ini dan (3.2.14), persamaan pertubasi (3.1.2) h-stabil.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/