MODIFIKASI LAGRANGIAN AUGMENTED UNTUK PROGRAM NONLINIER STOKASTIK MULTI-TAHAP

Ihda Hasbiyati [1,2]

[1]Mahasiswa S3 Matematika FMIPA Universitas Sumatera Utara
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau,
Pekanbaru (28293), Indonesia

ihdahasbiyati26@yahoo.com

ABSTRACT
Multi-stage stochastic programming problems arise in many practical situations, such as production and manpower planning, portfolio selections and so on. This paper describes our efforts to develop a nonlinear programming algorithm for problems characterized by a large sparse set of linear constraints and a significant degree of nonlinearity in the objective function. It has been our experience that many linear programming problems are inordinately large because they are attempting to approximate, by piecewise linearization, what is essentially a nonlinear problem. It also appears that many real-life problems are such that only a small percentage of the variables are involved nonlinearly in the objective function
Key words: *multi-stage stochastic nonlinear programs, projected Lagrange, scenario analysis, decomposition*

ABSTRAK

Masalah programming multi-stage stokastik muncul dalam banyak situasi parktis, seperti produksi dan rencana tenaga kerja, seleksi portfolio dan lain-lain.. Makalah ini menggambarkan suatu usaha untuk mengembangkan suatu algoritma programming nonlinier untuk karakterisasi masalah himpunan sparse yang besar dengan konstrain linier dan suatu derajat yang signifikan dari fungsi objektif yang nonlinier. Pengalaman bahwa banyak masalah programming linier sebagian besar tidak terkendali karena dicoba untuk di aproksimasi, melalui linierisasi piecewise, masalah nonlinier apa yang penting. Juga kelihatan bahwa banyak masalah-masalah dalam kehidupan nyata hanya sebagian kecil dari variable termasuk nonlinier dalam fungsi objektif.
Kata kunci: *program nonlinier stokastik multi-tahap, proyeksi Lagrange, analisis skenario, dekomposisi.*

PENDAHULUAN
Masalah Stokastik nonlinier programming (SNLP) mewakili kelompok penting dari masalah optimisasi yang seharusnya ada dimana-mana dalam situasi kehidupan nyata. Banyak sistem secara umum nonlinier, model nonlinier haruslah untuk representasi, dan sebagai konsekuensinya, metoda programming nonlinier untuk optimisasi. Factor penting lainnya sebagai pertimbangan adalah ketidakpastian. Sangat jarang system secara akurat diketahui secara rinci. Sering sekali, parameter dan variable hanya diketahui diaakhir saja, atau dalam beberapa kasus, distribusi probabilitas yang terakhir. Dalam kasus ini, metoda programming stokastik perlu mengambil jalan untuk optimisasi.

METODE PENELITIAN
Masalah program nonlinier stokastik multi-tahap muncul dalam banyak situasi praktis, seperti produksi dan perencanaan tenaga kerja, seleksi portfolio dan lain-lain.
Untuk melihat metoda apakah yang cocok untuk menyelesaikan program nonlinier stokastik multi-tahap, terdapat tiga formula dasar dalam stokastik programming. Formula pertama berdasarkan pada dekomposisi beanders, formula kedua berdasarkan lagrangian dual atau dekomposisi Dantzig-Wolfe, dan formula yang ketiga persamaan deterministik.
Dalam paper ini, diberikan suatu metode untuk menyelesaikan program nonlinier stokastik multi-tahap, dengan menggunakan modifikasi Lagrangian augmented dan barisan iterasi major.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan program nonlinier stokastik multi-tahap dengan recourse diberikan pada Persamaan (1)-(3) berikut:

$$\min_{x \in X} \hat{c}_0(x) + \mathrm{E}_{\xi_1} \mathrm{Q}_1(\mathrm{x}, \xi_1) \qquad (1)$$

Dimana $X = \{x \mid c_0(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n_0}$,

Fungsi recourse:

$$\begin{aligned} Q_1(x, \hat{\xi}_1) &= \min_{y_1} q_1(x, y_1, \hat{\xi}_1) + E_{\xi_2} Q_2(x, y_1, \hat{\xi}_1, \xi_2) \\ \text{s.t} \quad & c_1(x, y_1, \hat{\xi}_1) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Dan untuk $t = 2, \cdots, T-1$, berulang dipunyai

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Q}_t\left(x, y_1, \cdots, y_{t-1}, \hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_t\right) &= \min_{y_t} q_t\left(x, y_1, \cdots, y_{t-1}, \hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_t\right) \\ &\quad + E_{\xi_{t+1}} \mathrm{Q}_{t+1}\left(x, y_1, \cdots, y_{t-1}, \hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_t, \hat{\xi}_{t+1}\right) \\ \text{s.t. } c_1(x, y_1, \cdots, y_t, \hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$\mathrm{Q}_T = 0, x \in \mathbb{R}^{n_0}$ adalah vektor deterministik, $\hat{\xi}_i$ adalah realisasi dari vektor random $\xi_i \cdot y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ yang merupakan vektor keputusan pada tahap ke-*i*, yang dibangun secara rekursif oleh $x, y_1, \cdots, y_{i-1}$ dan $\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_i$, sehingga representasi $y_i(x, y_1, \cdots, y_{i-1}, \hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_i)$ secara aktual. $\hat{c}_0$ dan c_0 adalah fungsi bernilai riil pada $\mathbb{R}^{n_0}$. c_t random karena berelasi dengan $\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_t$. Untuk vektor random diskrit $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{T-1})$ jika c_t mempunyai realisasi hingga $c_{it}(i = 1, \cdots, S_t)$, maka semua c_{ti} bentuk fungsi konstrain pada tahap t. Untuk lebih detail, penjabaran mengenai program stokastik multi-tahap bisa di lihat di Kall dan Wallace [6].

Proses dimulai dengan barisan "iterasi major", pada setiap barisan iterasi major, konstrain nonlinier dilinierisasi pada beberapa titik dasar x_k dan ketaklinieran didampingkan dengan fungsi objektif dengan pengali Lagrange.

Definisikan,

$$\tilde{f}(x, x_k) = f(x_k) + J(x_k)(x - x_k),$$

dimana $J_k = [J(x_k)]_{ij} = \partial f^i / \partial x_j$ adalah matriks Jacobian dari turunan parsial pertama dari fungsi konstrain. Selanjutnya selesaikan sub-problem linier berikut untuk iterasi major ke-*k*,

$$\left.\begin{aligned} \text{Minimize}_{xy} \, L(x, y, x_k, \lambda_k, \rho) &= F(x) + d^T y - \lambda_k^T (f - \tilde{f}) + \frac{1}{2} \rho (f - \tilde{f})^T (f - \tilde{f}) \\ \text{s.t.} \quad & J_k x + A_1 y = b_1 + J_k x_k - f(x_k) \\ & A_2 x + A_2 y = b_2 \\ & l \leq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq u \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Fungsi objektif pada Persamaan (4) adalah modifikasi Lagrangian augmented, dimana parameter penalty ρ mempertinggi sifat konvergen dari estimasi awal derajat optimum paling jauh. Estimasi pengali Lagrangian λ_k diperoleh sebagai nilai optimum pada solusi subproblem sebelumnya. Sepanjang pendekatan barisan iterasi major, optimum (diukur dengan pertukaran relatif pada estimasi berurut dari λ_k dan degree untuk konstrain yang nonlinier dipenuhi pada x_k) parameter penalty ρ direduksi menjadi nol dan kuadrat nilai konvergen darp subproblem dipenuhi.

KESIMPULAN

Metoda proyeksi langrangian, sangat efektif untuk menyelesaikan programming nonlinier. Dengan menggunakan teknik senario analisis, untuk menyelesaikan program nonlinier stokastik multi-tahap, dengan melakukan arah pencarian melalui penyelesaian secara parallel himpunan subproblem programming kuadratik dengan ukuran yang lebih kecil dari masalah original pada setiap iterasi. Perumuman metoda gradient reduksi dapat dimasukkan untuk memperoleh estimasi dari pengalian dual yang berasosiasi dengan konstrain nonantisipatif.

DAFTAR PUSTAKA

Ihda Hasbiyati, A Projected Lagrangian Approach for a Class of Multi-stage Stochastic Nonlinear programs, 19th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies(IFORS), 10-15 July 2011, Melbourne Convention and Exhibition Centre, Melbourne, Australia

Xinwei Liu, Kim-Chuan Toh and Gongyun Zhao, On implementation of a log-barrier progressive hedging method for multistage stochastic programs, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 234(2010) 579-592.

Y. Shastri, U. Dewekar, an efficient algorithm for large scale stochastic nonlinear programming problems, *computer and chemical* engineering 30 (2006) 864-877.

Gongyun Zhao, A Lagrangian dual method with self-concordant barrier for multi-stage stochastic convex nonlinear programming, *Math. Programming* 102 (2005) 1, 1-24.

Xinwei Liu and Gongyun Zhao, A decomposition method based on SQP for a class of multi-stage stochastic nonlinear programs, *SIAM J. Optimization,* 14 (2003) 1, 200-222.

P. Kall and S.W. Wallace, *Stochastic Programming*, John Wiley & Sons. NY, 1994.

G.B. Dantzig and P. Wolfe, *Decomposition principle for linear programs,* Oper. Res., 8(1960), 101-111.