SIFAT-SIFAT KESETARAAN PADA MATRIKS *SECONDARY* NORMAL

Nursyahlina[1*], S. Gemawati[2], A. Sirait[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*nursyahlina@ymail.com

ABSTRACT

A square matrix $\mathbf{A}$ is called a *secondary* normal matrix if $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\theta} = \mathbf{A}^{\theta}\mathbf{A}$, where $\mathbf{A}^{\theta}$ is a *secondary* conjugate transpose of the matrix $\mathbf{A}$, which is different from the conjugate transpose matrix. In this paper, we discuss some equivalent conditions of a *secondary* normal matrix that is if $\mathbf{A}$ is a *secondary* normal matrix then it exists a *secondary* unitary matrix $\mathbf{P}$ obtained by diagonalization and Gram-Schmidt process, such that $\mathbf{P}^{\theta}\mathbf{A}\ \mathbf{P} = \mathbf{D}$, where $\mathbf{D}$ is a diagonal matrix. Moreover if $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{P}$ and $\mathbf{V}$ is a *secondary* uniter matrix then $\mathbf{A}$ is a *secondary* normal matrix.

Keywords: *diagonalizable matrix, Gram-Schmidt process, secondary normal matrix, secondary transpose conjugate.*

ABSTRAK

Matriks bujur sangkar, $\mathbf{A}$, dikatakan matriks *secondary* normal jika $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\theta} = \mathbf{A}^{\theta}\mathbf{A}$, dimana $\mathbf{A}^{\theta}$ merupakan transpose *secondary* konjugat dari matriks $\mathbf{A}$ yang berbeda dengan transpose konjugat matriks. Pada artikel ini dibahas sifat kesetaraan dari matrik $\mathbf{A}$, yaitu jika $\mathbf{A}$ matriks *secondary* normal, maka terdapat matriks *secondary* uniter $\mathbf{P}$ yang diperoleh dengan melakukan proses diagonalisasi matriks dan proses Gram-Schmidt sehingga $\mathbf{P}^{\theta}\mathbf{A}\ \mathbf{P} = \mathbf{D}$ dengan $\mathbf{D}$ matriks diagonal dan selanjutnya jika dimisalkan $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{P}$ dengan $\mathbf{V}$ matriks *secondary* uniter maka $\mathbf{A}$ merupakan matriks *secondary* normal.

Kata kunci: *diagonalisasi matriks, matriks secondary normal, transpose secondary konjugate, proses Gram-Schmidt.*

1. PENDAHULUAN

Didalam aljabar linear dikenal adanya ruang vektor. Ruang vektor adalah struktur matematika yang dibentuk oleh sekumpulan vektor, yaitu objek yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan suatu bilangan yang dinamakan skalar. Skalar yang umumnya digunakan adalah bilangan riil, tetapi kita juga dapat merumuskan ruang vektor dengan perkalian skalar terhadap bilangan kompleks yang selanjutnya digunakan dalam skripsi ini, bilangan rasional, atau bahkan medan.

Pada ruang vektor kompleks diterapkan matriks kompleks, matriks kompleks merupakan matriks yang entri-entrinya bilangan kompleks yang dalam artikel ini matriks kompleks yang berukuran $n \times n$ atau disebut juga matriks bujur sangkar diantaranya matriks normal, matriks Hermitian, dan matriks uniter. Pada tahun 1976, Ann Lee memperkenalkan konsep secondary simetriks matriks dalam artikelnya yang berjudul "*Secondary simmetric, Skwsimmetric and Orthogonal Matrices*". Selanjutnya banyak penulis seperti [3], [4] dan [5] ikut mengembangkan konsep matriks *secondary*.

Pada makalah ini dibagian dua dibahas mengenai matriks *secondary*, kemudian dilanjutkan dibagian tiga sifat-sifat kesetaraan pada matriks *secondary* normal yang merupakan review sebagian dari artikel yang berjudul "*Some Equivalent Conditions on s-Normal Matrices*" oleh S. Krisnomoorthy dan A. Govindarasu [3], dan bagian terakhir bagian 4 berupa kesimpulan.

2. MATRIKS *SECONDARY*

Sebelum membahas matriks *secondary*, terlebih dahulu dibahas mengenai transpose *secondary* matriks dinotasikan dengan A^S[6], merupakan matriks yang diperoleh dengan cara menukarkan baris pertama dengan kolom ke-n, baris kedua dengan kolom ke-$(n-1)$, didefinisikan

$$\mathbf{A}^S = a_{n-j+1,n-i+1} \quad \text{dimana} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

Secara geometris transpose *secondary* dapat digambarkan dengan mencerminkan entri-entrinya melalui diagonal *secondary*.

Transpose konjugat *secondary* dinotasikan dengan $\mathbf{A}^\theta$ merupakan matriks yang entri-entrinya adalah konjugat kompleks dari entri-entri yang bersesuain dengan matrik $\mathbf{A}^S$ didefinisikan

$$\mathbf{A}^\theta = \overline{a_{n-j+1,n-i+1}} \quad \text{dimana} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Transpose konjugat *secondary* juga memiliki sifat-sifat yang sama dengan transpose konjugat matriks. Jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ matriks-matriks dengan entri-entri bilangan kompleks dan k adalah sebarang bilangan kompleks, maka:

(a) $(\mathbf{A}^\theta)^\theta = \mathbf{A}$.

(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\theta = \mathbf{A}^\theta + \mathbf{B}^\theta$.

(c) $k(\mathbf{A}^\theta) = \bar{k}\mathbf{A}^\theta$.

(d) $(\mathbf{AB})^\theta = \mathbf{B}^\theta\mathbf{A}^\theta$.

Definisi 1 (Matriks *Secondary* Normal) [3, h. 1450] Matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ dengan unsur kompleks disebut matriks *secondary* normal jika

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\theta = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A}.$$

Definisi 2 (Matriks *Secondary* Hermitian) [3, h. 1450] Matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ dengan unsur kompleks dikatakan matriks *secondary* Hermitian jika

$$\mathbf{A}^\theta = \mathbf{A}.$$

Definisi 3 (Matriks *Secondary* Uniter) [1, h. 426] Matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ dengan unsur kompleks dikatakan matriks uniter jika

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\theta = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Definisi 4 (Matriks *Secondary* Uniter Ekuivalent) [3, h. 1451] Jika matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ dengan unsur kompleks. $\mathbf{B}$ dikatakan matriks *secondary* uniter ekuivalent ke $\mathbf{A}$ jika terdapat matriks *secondary* uniter $\mathbf{U}$ sehingga

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^\theta\mathbf{A}\mathbf{U}.$$

3. SIFAT-SIFAT KESETARAAN PADA MATRIKS *SECONDARY* NORMAL

Teorema 5 [3, h. 1451] Misalkan terdapat matriks bujur sangkar $\mathbf{A}$ dengan entri-entrinya bilangan kompleks, jika $\mathbf{A}$ adalah *secondary* uniter ekuivalen dengan matriks diagonal, maka $\mathbf{A}$ adalah *secondary* normal.

Bukti. Jika $\mathbf{A}$ adalah *secondary* uniter ekuivalen dengan matriks diagonal $\mathbf{D}$ maka terdapat sebuah matriks *secondary* uniter $\mathbf{P}$ sehingga

$$\mathbf{P}^\theta\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{3}$$

kalikan ke dua ruas dengan $\mathbf{P}^\theta$ dari kanan pada persamaan (3), diperoleh

$$\mathbf{P}^\theta\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{P}^\theta, \tag{4}$$

selanjutnya kalikan kedua ruas persamaan (4) dengan $\mathbf{P}$ dari kiri, maka diperoleh

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^\theta.$$

Dengan menggunakan sifat-sifat transpose konjugat, akan di tunjukkan bahwa terdapat $\mathbf{A}^\theta$ yakni $\mathbf{A}^\theta = \mathbf{P}^\theta\mathbf{D}^\theta\mathbf{P}$. $\mathbf{P}$ dapat dibalik sehingga diperoleh

$$\mathbf{A}^\theta = \mathbf{P}\mathbf{D}^\theta\mathbf{P}^\theta.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ matriks *secondary* normal berdasarkan Definisi 1

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\theta = (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^\theta)(\mathbf{P}\mathbf{D}^\theta\mathbf{P}^\theta) = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^\theta\mathbf{P}^\theta$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\theta = (\mathbf{P}\mathbf{D}^\theta\mathbf{P}^\theta)(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^\theta) = \mathbf{P}\mathbf{D}^\theta\mathbf{D}\mathbf{P}^\theta,$$

karena $\mathbf{D}^\theta\mathbf{D}$ dan $\mathbf{D}\mathbf{D}^\theta$ masing-masing matriks diagonal maka $\mathbf{D}\mathbf{D}^\theta = \mathbf{D}^\theta\mathbf{D}$, sehingga $\mathbf{A}\mathbf{A}^\theta = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A}$. Jadi $\mathbf{A}$ matriks *secondary* normal.

Teorema 6 [3, h. 1452] Asumsikan bahwa $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{P}$, di mana $\mathbf{V}$ adalah matriks *secondary* uniter dan $\mathbf{P}$ adalah non singular dan matriks *secondary* Hermitian sedemikian sehingga jika $\mathbf{P}^2$ komutatif dengan $\mathbf{V}$, maka $\mathbf{P}$ juga komutatif dengan $\mathbf{V}$. Kemudian kondisi berikut setara

1. $\mathbf{A}$ adalah normal.
2. $\mathbf{V}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{V}$.
3. $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{A}$.

Bukti. Misalkan $\mathbf{A}$=$\mathbf{V}\mathbf{P}$ karena $\mathbf{V}$ matriks *secondary* uniter maka $\mathbf{V}\mathbf{V}^\theta = \mathbf{V}^\theta\mathbf{V} = \mathbf{I}$ dan $\mathbf{P}$ matriks *secondary* Hermitian maka $\mathbf{P}^\theta = \mathbf{P}$.
($1 \Rightarrow 2$) Jika $\mathbf{A}$ adalah *secondary* normal, maka $\mathbf{A}\mathbf{A}^\theta = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A}$,karena $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{P}$, maka

$$(\mathbf{V}\mathbf{P})(\mathbf{V}\mathbf{P})^\theta = (\mathbf{V}\mathbf{P})^\theta(\mathbf{V}\mathbf{P}). \tag{5}$$

Gunakan sifat-sifat transpose konjugat pada persamaan (5)

$$\mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{P}^\theta\mathbf{V}^\theta = \mathbf{P}^\theta\mathbf{V}^\theta\mathbf{V}\mathbf{P}. \tag{6}$$

Karena $\mathbf{P}$ *secondary* Hermitian, dan V *secondary* uniter maka persamaan (6) menjadi

$$\mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{V}^\theta = \mathbf{P}^\theta\mathbf{P}.$$

$$\mathbf{V}\mathbf{P}^2\mathbf{V}^\theta = \mathbf{P}^2. \tag{7}$$

Kalikan kedua ruas pada persamaan (7) dengan $\mathbf{V}$ dari kanan, sehingga diperoleh

$$\mathbf{V}\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2\mathbf{V}, \tag{8}$$

dikatakan bahwa jika $\mathbf{P}^2$ komutatif dengan $\mathbf{V}$, maka $\mathbf{P}$ juga komutatif dengan $\mathbf{V}$, sehingga

$$\mathbf{V}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{V}. \tag{9}$$

$(1 \Leftarrow 2)$ Sebaliknya, jika $\mathbf{VP} = \mathbf{PV}$ dengan menggunakan sifat transpose konjugat *secondary* matriks, diperoleh

$$\mathbf{V}^\theta\mathbf{P}^\theta = \mathbf{P}^\theta\mathbf{V}^\theta.$$

Subsitusikan $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$ ke $\mathbf{AA}^\theta$ untuk menunjukkan bahwa $\mathbf{AA}^\theta$=$\mathbf{A}^\theta\mathbf{A}$

$$\mathbf{AA}^\theta = \mathbf{VPV}^\theta\mathbf{P}^\theta, \tag{10}$$

dengan menggunakan persamaan (9), persamaan (10) dapat ditulis

$$\mathbf{AA}^\theta = \mathbf{PVV}^\theta\mathbf{P}^\theta,$$

karena $\mathbf{V}$ matriks *secondary* uniter, berdasarkan Definisi 3 diperoleh

$$\mathbf{AA}^\theta = \mathbf{PV}^\theta\mathbf{VP}^\theta,$$

$\mathbf{P}$ matriks *secondary* Hermitian, maka berdasarkan Definisi 2 diperoleh

$$\mathbf{AA}^\theta = \mathbf{P}^\theta\mathbf{V}^\theta\mathbf{VP}$$
$$\mathbf{AA}^\theta = (\mathbf{VP})^\theta\mathbf{VP}$$
$$\mathbf{AA}^\theta = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A}.$$

$(1 \Rightarrow 3)$ Subsitusikan $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$ ke $\mathbf{AV}$, diperoleh

$$\mathbf{AV} = \mathbf{VA}. \tag{11}$$

$(1 \Leftarrow 3)$ Sebaliknya jika terdapat $\mathbf{AV} = \mathbf{VA}$, subsitusikan $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$ pada persamaan (11)

$$(\mathbf{VP})\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{VP}), \tag{12}$$

kalikan ruas kiri dan kanan pada persamaan (12) dengan $\mathbf{V}^\theta$ dari kiri, diperoleh

$$\mathbf{PV} = \mathbf{VP}, \tag{13}$$

yang merupakan persamaan (9), dengan menggunakan bukti pada bagian $(1 \Leftarrow 2)$ terbukti bahwa $\mathbf{AA}^\theta = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A}$.
$(1 \Rightarrow 4)$ Ambil $\mathbf{AP}$ subsitusikan ke $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$ ke $\mathbf{AP}$

$$\mathbf{AP} = (\mathbf{VP})\mathbf{P}, \tag{14}$$

gunakan persamaan (9) pada persamaan (14), diperoleh

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}(\mathbf{VP}),$$

karena $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$ sehingga diperoleh

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PA}.$$

$(1 \Leftarrow 4)$ Sebaliknya jika terdapat $\mathbf{AP} = \mathbf{PA}$, subsitusikan $\mathbf{A} = \mathbf{VP}$

$$(\mathbf{VP})\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{VP}). \tag{15}$$

Kalikan kedua ruas kiri dan kanan pada persamaan (15) dengan $\mathbf{P}^\theta$ dari kanan diperoleh

$$\mathbf{VP} = \mathbf{PV}$$

yang merupakan persamaan (9), dengan menggunakan bukti pada bagian $(1 \Leftarrow 2)$ terbukti bahwa $\mathbf{A}^\theta\mathbf{A} = \mathbf{A}^\theta\mathbf{A}$.

Contoh:
Misalkan

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 2 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

akan ditunjukkan bahwa **A** merupakan matriks *secondary* Hermitian jika $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\theta}$,

dengan menggunakan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\mathbf{A}^{\theta}=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 2 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Matriks **A** dapat didiagonalkan secara *secondary* uniter equivalent jika memenuhi $\mathbf{P}^{\theta}\mathbf{A}\mathbf{P}$=**D**. Akan dicari matriks **P** yang mendiagonalkan **A**. Sebelumnya dicari terlebih dahulu nilai eigen dari matriks **A**,

$$\begin{aligned}\det \lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} &= \det\begin{bmatrix} \lambda-\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -2 & 0 & \lambda-\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3-2\lambda^2-4\frac{1}{2}\lambda+10 \\ &= (\lambda+1.7991)(\lambda-1.3768)(\lambda-2.4223)\end{aligned}$$

dan nilai eigen dari matriks **A** adalah $\lambda=-1.7991$,$\lambda=1.3768$, dan $\lambda=2.4223$. Maka diperoleh matriks **P**

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} -0.6411+0.2520i & 0.2081-0.4052i & -0.1522+0.5214i \\ -0.0000+0.1326i & 0.6678 & 0.7208 \\ 0.7127 & -0.0000+0.5886i & -0.0000+0.4305i \end{bmatrix}.$$

dan

$$\mathbf{P}^{\theta}=\begin{bmatrix} -0.0000-0.4305i & 0.7208 & -0.1522-0.5214i \\ -0.0000+0.5886i & 0.6678 & 0.2081+0.4052i \\ 0.7127 & -0.0000-0.1326i & -0.6411-0.2520i \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{P}^{\theta}\mathbf{A}\mathbf{P}$=**D**

$$\mathbf{D}=\mathbf{P}^{\theta}\mathbf{A}\mathbf{P}\begin{bmatrix} -0.0000-0.0000i & -0.0000+0.0000i & 2.3462-0.0000i \\ -0.0000-0.0000i & 1.2708+0.0000i & -0.0000-0.0000i \\ 1.6123 & -0.0000+0.0000i & -0.0000+0.0000i \end{bmatrix}.$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa terdapat kesetaraan pada matriks kompleks dengan matriks *secondary*. Tetapi, terdapat perbedaan dalam memperoleh transpose konjugat matriksnya. Pada matriks *secondary*, transpose konjugat pada matriks *secondary* disebut transpose konjugat *secondary* matriks.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1995. *Aljabar Linier Elementer, Edisi Kelima.* Terj. Dari *Elementary Linier Algebra, Fifth Edition,* Oleh Pantur Silaban & Nyoman Susila I. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra.* W. H. Freeman and Company, New York.

[3] Krisnamoorthy.S. dan Vijayakumar, R. 2009. Some Equivalent Condition on s-Normal Matricces. *Int. J. Math. Contemp. Math. Sciences* **29**(4): 1449-1454.

[4] Krisnamoorthy.S. dan Govindarasu, A. 2010. On Secondary Unitary Matricces. *Int. J. Math. Contemp. Math. Sciences* **3**(2): 247-253.

[5] Lee, A. 1976. Secondary symmetric, skew symmetric, and orthogonal matrices. *Period Math. Hungary* **1**(7): 63-70.

[6] Poliouras. J. D. 1987. *Peubah Kompleks Untuk Ilmuan dan Insinyur.* Terj. Dari *Complex Variables For Scientists and Engineers,* Oleh Drs. Wibisono Gunawan. Penerbit Erlangga, Jakarta.