

# PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA DENGAN MENGGUNAKAN KUARTIL

Supriati<sup>1\*</sup>, Arisman Adnan<sup>2</sup>, Firdaus<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau  
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

\*supriati@unri.ac.id

## ABSTRACT

This article discusses the three ratio estimators for population mean in simple random sampling by using the auxiliary variable of the quartiles, proposed by Subramani and Kumarapandiyam. These three discussed estimators are biased estimators. The mean square errors of the discussed estimators are compared to obtain the most efficient estimator. The comparison shows that the ratio estimator by using inter-quartile range is the most efficient estimator than the other two estimators. A numerical example is given to explain the discussed problem.

Keywords: *ratio estimator, simple random sampling, quartile, bias, and mean square error*

## ABSTRAK

Artikel ini membahas tiga penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan kuartil yang diajukan oleh Subramani dan Kumarapandiyam. Ketiga penaksir yang dibahas merupakan penaksir bias. Selanjutnya, *mean square error* dari masing-masing penaksir tersebut dibandingkan untuk memperoleh penaksir yang paling efisien. Perbandingan ini menunjukkan bahwa penaksir rasio dengan menggunakan jangkauan antar kuartil paling efisien dari dua penaksir rasio lainnya. Sebuah contoh numerik disajikan untuk menjelaskan masalah yang didiskusikan.

Kata kunci: *penaksir rasio, sampling acak sederhana, kuartil, bias, dan mean square error*

## 1. PENDAHULUAN

Salah satu metode yang digunakan untuk menaksir rata-rata populasi pada sampling acak sederhana adalah metode rasio. Metode ini bertujuan untuk meningkatkan

ketelitian penaksir dengan mengambil manfaat hubungan antara  $y_i$  dan  $x_i$ , dimana  $y_i$  adalah unit dari populasi berkarakter  $Y$  dan  $x_i$  adalah unit dari populasi berkarakter  $X$ . Variabel  $x_i$  merupakan suatu variabel pendukung yang berkorelasi positif dengan variabel  $y_i$  dan variabel  $x_i$  telah diteliti sebelumnya sehingga variabel  $x_i$  dapat digunakan sebagai variabel bantu untuk menaksir variabel  $y_i$  [1].

Bentuk umum penaksir rasio sampling acak sederhana untuk rata-rata populasi  $\bar{Y}$  dari variabel yang diteliti  $Y$  dirumuskan sebagai

$$\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} = \hat{R}\bar{X}, \quad (1)$$

dengan  $\bar{y}$  adalah rata-rata sampel dari populasi  $Y$ ,  $\bar{x}$  adalah rata-rata sampel dari populasi  $X$  dan  $\bar{X}$  adalah rata-rata populasi  $X$ .

Dalam artikel ini dibahas tiga modifikasi penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dengan menggunakan kuartil yang diajukan oleh Subramani dan Kuamarapandiyam [4], yaitu

$$\hat{Y}_{P1} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + Q_r}{\bar{x} + Q_r} \right) \quad (2)$$

$$\hat{Y}_{P2} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + Q_d}{\bar{x} + Q_a} \right) \quad (3)$$

$$\hat{Y}_{P3} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + Q_a}{\bar{x} + Q_a} \right), \quad (4)$$

dengan  $Q_r$  adalah jangkauan antar kuartil,  $Q_d$  adalah jangkauan semi antar kuartil, dan  $Q_a$  adalah rata-rata kuartil.

Ketiga modifikasi penaksir rasio untuk rata-rata populasi tersebut merupakan penaksir bias, kemudian ditentukan *Mean Square Error (MSE)*. Berdasarkan ide dari Subramani dan Kumarapandiyam [4], penulis membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir untuk memperoleh penaksir rasio yang efisien. Penaksir yang memiliki nilai *MSE* terkecil merupakan penaksir yang efisien.

## 2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana adalah sebuah metode yang digunakan untuk mengambil  $n$  unit sampel dari  $N$  unit populasi sehingga setiap unit populasi memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih menjadi unit sampel. Dalam hal ini pengambilan sampel dilakukan tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat [1].

Pada pengambilan sampel tanpa pengembalian probabilitas terpilihnya  $n$  dari  $N$  populasi terpilih menjadi unit sampel pada pengambilan pertama adalah  $n/N$ , probabilitas pada pengambilan kedua adalah  $(n-1)/(N-1)$ , sampai probabilitas pada

pengambilan ke-  $n$  yaitu  $1/(N-n+1)$ , sehingga peluang seluruh  $n$  unit-unit tertentu yang terpilih dalam  $n$  pengambilan adalah  $\binom{N}{n}^{-1}$ .

**Teorema 2.1** [1: h. 27] Apabila sampel berukuran  $n$  diambil dari populasi berukuran  $N$  yang berkarakter  $Y$  dengan sampling acak sederhana maka variansi rata-rata sampel  $\bar{y}$  yang dinotasikan dengan  $V(\bar{y})$  adalah

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \frac{S^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{S^2}{n} (1-f),$$

dengan  $f = n/N$  adalah fraksi penarikan sampel dan  $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / N - 1$  adalah variansi  $y_i$  pada populasi berkarakter  $Y$ .

**Bukti:** Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1].

Untuk menentukan  $MSE$  dari penaksir dalam bentuk dua variabel digunakan suatu pendekatan dengan menggunakan deret Taylor dua variabel.

**Deret Taylor untuk dua variabel** [2: h. 47] Misalkan  $f(x, y)$  adalah suatu fungsi dua variabel dan  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$  adalah kontinu pada  $I$  dan  $f^{(n+1)}$  ada pada  $I$  untuk  $(x_0, y_0) \in I$ . Jika  $(x_0 + h, y_0 + k) \in I$ , maka

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \end{aligned} \quad (5)$$

dengan  $0 < \theta < 1$ .

Dengan memisalkan  $x_0 = \bar{X}$ ,  $y_0 = \bar{Y}$ ,  $x_0 + h = \bar{x}$  dan  $y_0 + k = \bar{y}$  dan mengabaikan pangkat-pangkat yang lebih besar dari satu, maka dari persamaan (5) diperoleh nilai pendekatan untuk mencari  $MSE$  yaitu

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{X}, \bar{Y}) \approx \left( (\bar{x} - \bar{X}) \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} + (\bar{y} - \bar{Y}) \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \right). \quad (6)$$

### 3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dari masing-masing penaksir sebagai berikut.

Bias dan *MSE* dari persamaan (1) diperoleh

$$B(\hat{Y}_R) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (C_x^2 - \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_R) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - 2\rho C_y C_x + C_x^2),$$

dengan  $\rho$  adalah koefisien variasi,  $C_y$  adalah koefisien variasi populasi  $Y$  dan  $C_x$  adalah koefisien variasi populasi  $X$ .

Bias dan *MSE* dari persamaan (2) diperoleh

$$B(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (\theta_{p1}^2 C_x^2 - \theta_{p1} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - 2\theta_{p1} \rho C_y C_x + \theta_{p1}^2 C_x^2),$$

dengan  $\theta_{p1} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_r}$ .

Bias dan *MSE* dari persamaan (3) diperoleh

$$B(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (\theta_{p2}^2 C_x^2 - \theta_{p2} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - 2\theta_{p2} \rho C_y C_x + \theta_{p2}^2 C_x^2),$$

dengan  $\theta_{p2} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_d}$ .

Bias dan *MSE* dari persamaan (4) diperoleh

$$B(\hat{Y}_{p3}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (\theta_{p3}^2 C_x^2 - \theta_{p3} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_{p3}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 - 2\theta_{p3} \rho C_y C_x + \theta_{p3}^2 C_x^2),$$

dengan  $\theta_{p3} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_a}$ .

Selanjutnya akan ditentukan penaksir rasio yang efisien diantara ke tiga penaksir rasio yang diajukan, yaitu dengan membandingkan *MSE* dari penaksir  $\hat{Y}_{p1}$ ,  $\hat{Y}_{p2}$  dan  $\hat{Y}_{p3}$ .

1. Perbandingan  $MSE(\hat{Y}_{p_2})$  dengan  $MSE(\hat{Y}_R)$  diperoleh  $MSE(\hat{Y}_{p_2}) < MSE(\hat{Y}_R)$  jika

$$Q_d > \frac{2\bar{X}(\rho C_y - C_x)}{(C_x - 2\rho C_y)}. \quad (7)$$

2. Perbandingan  $MSE(\hat{Y}_{p_1})$  dengan  $MSE(\hat{Y}_{p_2})$  diperoleh  $MSE(\hat{Y}_{p_1}) < MSE(\hat{Y}_{p_2})$  jika

$$Q_d < \frac{\bar{X}(C_x(\theta_{p_1} + 1) - 2\rho C_y)}{(2\rho C_y - \theta_{p_1} C_x)}. \quad (8)$$

3. Perbandingan  $MSE(\hat{Y}_{p_1})$  dengan  $MSE(\hat{Y}_{p_3})$  diperoleh  $MSE(\hat{Y}_{p_1}) < MSE(\hat{Y}_{p_3})$  jika

$$Q_a < \frac{\bar{X}(C_x(\theta_{p_1} + 1) - 2\rho C_y)}{(2\rho C_y - \theta_{p_1} C_x)}. \quad (9)$$

4. Perbandingan  $MSE(\hat{Y}_{p_3})$  dengan  $MSE(\hat{Y}_{p_2})$  diperoleh  $MSE(\hat{Y}_{p_3}) < MSE(\hat{Y}_{p_2})$  jika

$$Q_a < \frac{\bar{X}(C_x(\theta_{p_2} + 1) - 2\rho C_y)}{(2\rho C_y - \theta_{p_2} C_x)}. \quad (10)$$

#### 4. CONTOH

Contoh ini merupakan data panjang dan berat ikan barau dari Safrina [3]. Data tersebut diambil secara acak sederhana dari waduk PLTA Koto Panjang. Data panjang dan berat ikan barau diberikan pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Data panjang dan berat ikan barau waduk PLTA Koto Panjang

No	Panjang ikan (Y)	Berat Ikan (X)	No	Panjang Ikan (Y)	Berat Ikan (X)	No	Panjang Ikan (Y)	Berat Ikan (X)
1	120	18,2	30	116	26	59	465	1200
2	165	49	31	129	48,1	60	482	1310
3	204	89,5	32	140	49	61	115	18,6
4	440	1100	33	144	57	62	124	18,3
5	163	48,2	34	160	58,4	63	130	23
6	164	52,3	35	160	55,4	64	130	26,5
7	168	48,8	36	170	52	65	135	27,6
8	169	53	37	170	59,1	66	170	52
9	170	61	38	170	63,7	67	182	65
10	172	67,9	39	170	61,6	68	185	66

11	173	72,5	40	171	64,2	69	187	65
12	178	72	41	180	75	70	209	96
13	180	122,1	42	182	68,1	71	222	118,2
14	185	237,3	43	185	86,1	72	242	126
15	195	270	44	185	113	73	310	273
16	225	1250	45	186	800	74	428	1095
17	240	485,6	46	198	830	75	471	1320
18	300	950	47	223	950	76	510	1490
19	482	592,9	48	410	850	77	125	25
20	331	1300	49	417	780	78	344	600
21	332	1600	50	420	900	79	435	1100
22	335	17	51	423	850	80	448	960
23	520	58,9	52	430	780	81	450	1100
24	530	61,9	53	440	900	82	485	1350
25	112	82,7	54	440	850	83	490	1250
26	173	105,6	55	490	1400	84	490	1410
27	179	19,3	56	180	65,2	85	516	1680
28	180	26,2	57	190	80,4	Total	22589	36878,1
29	235	32,5	58	210	96,2			

Sumber: Safrina [3].

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir rasio yang efisien untuk menaksir rata-rata panjang ikan barau dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing masing penaksir yang diajukan. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir rata-rata panjang ikan barau digunakan berat ikan barau. Untuk menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari data panjang dan berat ikan barau dengan menggunakan Microsoft Excel pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Nilai-nilai yang diperoleh berdasarkan data panjang dan berat ikan barau

$N$	85	$C_y$	0,5049
$n$	30	$C_x$	1,1889
$\bar{Y}$	265,7529	$Q_1$	55,4
$\bar{X}$	433,86	$Q_3$	850
$\rho$	0,7886	$Q_r$	794,6
$S_y$	134,1666	$Q_d$	397,3
$S_x$	515,8271	$Q_a$	452,7

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh pada Tabel 2 ke persamaan (7), (8), (9) dan (10), maka diperoleh

- (i)  $MSE(\hat{Y}_{p_2}) < MSE(\hat{Y}_R)$  jika  $397,3 > -1747,4345$
- (ii)  $MSE(\hat{Y}_{p_1}) < MSE(\hat{Y}_{p_2})$  jika  $397,3 < 936,787596$
- (iii)  $MSE(\hat{Y}_{p_1}) < MSE(\hat{Y}_{p_3})$  jika  $452,7 < 936,787596$
- (iv)  $MSE(\hat{Y}_{p_3}) < MSE(\hat{Y}_{p_2})$  jika  $452,7 < 2503,2419$ .

Selanjutnya nilai  $MSE$  dari masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 3.

**Tabel 3.** Nilai  $MSE$  dari masing-masing penaksir

No	Penaksir	$MSE$
1	$\hat{Y}_R$	1099,435
2	$\hat{Y}_{p_1}$	147,5363
3	$\hat{Y}_{p_2}$	222,2209
4	$\hat{Y}_{p_3}$	198,2245

Berdasarkan Tabel 3, dapat dilihat bahwa penaksir rasio  $\hat{Y}_{p_1}$  memiliki nilai  $MSE$  yang terkecil dengan syarat bahwa kondisi lebih efisien dapat dipenuhi.

## 5. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa penaksir rasio dengan menggunakan jangkauan antar kuartil merupakan penaksir yang paling efisien dari dua penaksir rasio lainnya jika syarat lebih efisien terpenuhi.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Radiansyah & E.R Osman. UI Press, Jakarta.
- [2] Phillips, G. M. & P. J. Taylor. 1972. *Theory and Applications of Numerical Analysis. Second Edition*. Academic Press, New York.
- [3] Safrina, N. 2007. Aspek Biologi Reproduksi Ikan Barau (*Hampala macrolepidota* C.V) di Waduk PLTA koto Panjang. Skripsi Jurusan Manajemen Sumber Daya Perairan. FAPERIKA Universitas Riau, Pekanbaru.
- [4] Subramani, J. & G. Kumarapandiyam. 2012. Modified Ratio Estimator for Population Mean Using Function of Quartiles of Auxiliary Variable. *Bonfring International Journal of Industrial Engineering and Management Science*. 2(2): 19-23.