PENAKSIR RASIO DAN REGRESI MENGGUNAKAN DUA VARIABEL TAMBAHAN UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Saziati Fauzi[1*], Firdaus[2], Sigit Sugiarto[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*]saziati_fauzi@yahoo.com

ABSTRACT

In this article we study the ratio estimator, regression estimator and ratio regression estimator using two auxiliary variables in simple random sampling, which is a review from parts of an article Abu-Dayyeh et al. [*Applied Mathematics and Computation.* 162: 901-908]. The estimators are biased estimators. Then mean square error of each estimator is determined. The estimator with the smallest mean square error is the most efficient estimator. An example is given at the end of discussion.

Keywords: *auxiliary variable, mean square error, ratio and regression estimator, simple random sampling.*

ABSTRAK

Pada artikel ini penaksir yang dibahas adalah penaksir rasio, penaksir regresi dan penaksir rasio regresi menggunakan dua variabel tambahan pada sampling acak sederhana, yang merupakan *review* sebagian dari artikel Abu-Dayyeh *et al.* [*Applied Mathematics and Computation.* 162: 901-908]. Masing-masing penaksir merupakan penaksir bias. Lalu ditentukan *mean square error* dari masing-masing penaksir. Penaksir dengan *mean square error* terkecil merupakan penaksir yang efisien. Contoh perhitungan diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: variabel tambahan, *mean square error*, penaksir rasio dan regresi, sampling acak sederhana.

1. PENDAHULUAN

Metode sampling adalah sebuah metode pengambilan sampel untuk memperoleh sampel yang representatif dengan menghimpun semua karakteristik populasi. Metode ini harus objektif berdasarkan syarat-syarat peluang disebut dengan sampling acak. Metode sampling acak sederhana adalah suatu metode untuk memilih n unit dari N sehingga setiap elemen dari ${}_N C_n$ sampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih [2:h.18]. Probabilitas terpilihnya anggota n dari N unit populasi

sebagai unit sampel pada penarikan pertama yaitu n/N. Pada penarikan kedua yaitu $(n-1)/(N-1)$ dan sampai probabilitas pada pengambilan ke-n yaitu $1/(N-(n-1))$, maka probabilitas seluruh n unit-unit tertentu yang terpilih dalam n pengambilan adalah $({}_N C_n)^{-1}$ [2:h.18].

Misalkan suatu populasi berukuran N yang berkarakter Y dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit, $i = 1, 2, 3, \ldots, N,$ maka rata-rata populasi $\bar{Y}$ adalah

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \,.$$

Kemudian diambil sampel berukuran n unit dari populasi berukuran N dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit, $i = 1, 2, 3, \ldots, n.,$ maka rata-rata sampel $\bar{y}$ adalah

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \,.$$

Dalam perkembangan teori sampling acak sederhana, telah dianggap bahwa penaksiran hanya berdasarkan aritmatika sederhana dengan nilai pengamatan pada sampel. Oleh karena itu metode penaksiran lain yang dapat dipertimbangkan adalah metode yang memanfaatkan informasi tambahan dalam kondisi tertentu, sehingga penaksiran yang diberikan lebih handal dari nilai rata-rata populasi sederhana. Metode tersebut adalah metode penaksir rasio dan penaksir regresi.

Penaksir rasio merupakan salah satu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian penaksir dengan mengambil manfaat hubungan pengamatan x_i dan y_i. Penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan $\bar{y}_R$ dan dirumuskan sebagai [7]

$$\bar{y}_R = \bar{y}\frac{\bar{X}}{\bar{x}},$$

dengan $\bar{y}$ dan $\bar{x}$ berturut-turut menyatakan rata-rata sampel dari Y dan X serta $\bar{X}$ menyatakan rata-rata populasi dari X.

Kemudian penaksir regresi linear juga merupakan metode yang memanfaatkan variabel tambahan x_i yang berkorelasi dengan y_i. Penaksir regresi linear untuk rata-rata populasi y_i dinotasikan dengan $\bar{y}_{lr}$ dan dirumuskan sebagai

$$\bar{y}_{lr} = \bar{y} + b\left(\bar{X} - \bar{x}\right),$$

dengan b adalah koefisien regresi dari Y atas X.

Misalkan terdapat alat bantu kedua yaitu variabel X_2 digunakan untuk lebih meningkatkan ketelitian penaksir yang berhubungan dengan Y, maka penaksir rasio sederhana menjadi penaksir rasio menggunakan dua variabel tambahan dinotasikan dengan $\bar{y}_{rat2}$. Sedangkan penaksir regresi linear menjadi penaksir regresi menggunakan dua variabel tambahan dinotasikan dengan $\bar{y}_{reg2}$. Penaksir $(\bar{y}_{rat2})$ dan penaksir $(\bar{y}_{reg2})$ mendasari Abu-Dayyeh *et.al* [1] untuk mengajukan penaksir rasio regresi yang dinotasikan dengan $(\bar{y}_{pr})$. Berdasarkan ide dari Abu-Dayyeh *et.al* [3], penulis menemukan bias dari masing-masing penaksir, *MSE* dari penaksir $(\bar{y}_{rat2})$ dan

membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir untuk memperoleh penaksir yang efisien.

Untuk menentukan bias dan *MSE* pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

Teorema 1 [2:h.23] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y pada sampling acak sederhana, maka variansi rata-rata sampel $\bar{y}$ dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ dan dirumuskan sebagai

$$V(\bar{y}) = \frac{(1-f)}{n} S_y^2,$$

dengan $f = n/N$ adalah fraksi penarikan sampel dan $S_y^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2 \Big/ (N-1)$ adalah variansi y_i pada populasi berkarakter Y.
Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [2: h.23].

Teorema 2 [2:h.25] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan $\bar{y}, \bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n, maka kovariansinya adalah

$$\operatorname{cov}(y,x) = \frac{(1-f)}{n} \rho_{yx} S_y S_x,$$

dengan $S_{yx} = \rho_{yx} S_y S_x$.
Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [2:h.25].

Penaksir $(\bar{y}_{rat2})$ dan penaksir $(\bar{y}_{pr})$ merupakan penaksir bias. Untuk mengetahui penaksir yang efisien dari penaksir bias perlu diketahui *mean square error (MSE)* masing-masing penaksir, sedangkan penaksir $(\bar{y}_{reg2})$ merupakan penaksir tak bias. Untuk mengetahui penaksir yang efisien dari penaksir tak bias perlu diketahui variansi dari penaksir tersebut. Ketika menggunakan pendekatan derajat satu, diketahui bahwa *MSE* sama dengan variansi [3].

Oleh karena itu untuk memperoleh penaksir yang efisien dihitung dari *MSE* masing-masing penaksir. Semakin kecil *MSE* yang diperoleh maka akan menghasilkan penaksir yang efisien.

2. BIAS DAN *MSE* PENAKSIR RASIO REGRESI MENGGUNAKAN DUA VARIABEL TAMBAHAN

Pertama, penaksir rasio menggunakan dua variabel tambahan untuk rata-rata populasi adalah

$$\bar{y}_{rat2} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}_1}{\bar{x}_1}\right)\left(\frac{\bar{X}_2}{\bar{x}_2}\right), \tag{1}$$

dengan $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ berturut-turut menyatakan rata-rata sampel dari populasi X_1 dan X_2, $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ menyatakan rata-rata populasi X_1 dan X_2.

Kedua, model regresi dengan dua variabel bebas dinyatakan sebagai berikut

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Variabel y_i merupakan variabel tak bebas dari pengamatan ke $\boldsymbol{i}$, x_{i1} variabel bebas pertama dari pengamatan ke $\boldsymbol{i}$ dan x_{i2} variabel bebas kedua dari pengamatan ke $\boldsymbol{i}$. Sedangkan α, β_1, β_2 adalah parameter yang ditaksir disebut dengan koefisien regresi dan ε adalah kesalahan pengamatan ke $\boldsymbol{i}$ [5]. Dari persamaan (2) kesalahan pengamatan ke $\boldsymbol{i}$ ditulis

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2},$$

dengan demikian jumlah kuadrat kesalahan dapat ditulis

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} \right)^2 . \tag{3}$$

Nilai α, β_1 dan β_2 ditentukan dengan cara menurunkan persamaan (3) terhadap α, β_1 dan β_2 kemudian hasilnya disamakan dengan nol dan mengganti koefisien regresi untuk masing-masing penaksir dengan a, b_1 dan b_2 sehingga diperoleh

$$na + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} y_i . \tag{4}$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i1} . \tag{5}$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i2} . \tag{6}$$

Persamaan (4), (5) dan (6) disebut persamaan normal dan dapat diselesaikan dengan menggunakan matriks sebagai berikut

$$\mathbf{X'Xb} = \mathbf{X'Y}, \tag{7}$$

dengan

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X'X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 \end{pmatrix}, \mathbf{X'Y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{i2} \end{pmatrix}.$$

Jika $\mathbf{X'X}$ tak singular, maka persamaan (7) dapat juga ditulis

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}. \tag{8}$$

Ekspektasikan kedua ruas pada persamaan (8), maka diperoleh

$$E(\mathbf{b}) = \mathbf{B}. \tag{9}$$

Hal ini menyatakan bahwa $\mathbf{b}$ merupakan penaksir tak bias untuk $\mathbf{B}$ [4:h.460]. Sifat dari ekspektasi persamaan (9) akan digunakan untuk menentukan bias dan *MSE* pada penaksir $(\bar{y}_{reg2})$ dan penaksir $(\bar{y}_{pr})$.

Selanjutnya, karena $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \Big/ n$, $\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \Big/ n$ dan $\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \Big/ n$, maka persamaan (4) juga dapat ditulis

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2. \tag{10}$$

Ketika variabel y, x_1 dan x_2 mempunyai hubungan kausal atau hubungan sebab akibat, persamaan regresi dengan dua variabel bebas melalui titik pangkal dari persamaan (10) diperoleh

$$\bar{y} = b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2. \tag{11}$$

Jika koefisien b_1 dan b_2 berlaku untuk rata-rata sampel maka b_1 dan b_2 juga berlaku untuk rata-rata populasi. Sehingga diperoleh

$$\bar{Y} = b_1\bar{X}_1 + b_2\bar{X}_2. \tag{12}$$

Dengan mengurangkan persamaan (12) dengan persamaan (11) diperoleh penaksir regresi menggunakan dua variabel tambahan adalah

$$\bar{y}_{reg2} = \bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2). \tag{13}$$

dengan b_1 dan b_2 adalah koefisien regresi dari Y atas X_1 dan Y atas X_2.

Ketiga, penaksir rasio regresi menggunakan dua variabel tambahan merupakan penaksir yang diperoleh dari mengganti $\bar{y}$ pada penaksir $(\bar{y}_{reg2})$ pada persamaan (13) dengan penaksir $(\bar{y}_{rat2})$ pada persamaan (1) dan dirumuskan sebagai

$$\bar{y}_{pr} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}_1}{\bar{x}_1}\right)\left(\frac{\bar{X}_2}{\bar{x}_2}\right) + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2). \tag{14}$$

Bias dari penaksir rasio dan penaksir rasio regresi menggunakan dua variabel tambahan untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$B(\bar{y}_{rat2}) \approx \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}\left(C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 - \rho_{yx_1}C_yC_{x_1} - \rho_{yx_2}C_yC_{x_2} - \rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2}\right).$$

$$B(\bar{y}_{pr}) \approx \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}\left(C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 - \rho_{yx_1}C_yC_{x_1} - \rho_{yx_2}C_yC_{x_2} - \rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2}\right).$$

dengan $C_y = S_y/\bar{Y}$, $C_{x_1} = S_{x_1}/\bar{X}_1$, $C_{x_2} = S_{x_2}/\bar{X}_2$, $\rho_{yx_1} = S_{yx_1}/S_yS_{x_1}$, $\rho_{yx_2} = S_{yx_2}/S_yS_{x_2}$ dan $\rho_{x_1x_2} = S_{x_1x_2}/S_{x_1}S_{x_2}$, sedangkan penaksir regresi menggunakan dua variabel tambahan untuk rata-rata populasi merupakan penaksir tak bias.

Selanjutnya *MSE* dari penaksir rasio, penaksir regresi dan penaksir rasio regresi menggunakan dua variabel tambahan untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$MSE(\bar{y}_{rat2}) \approx \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + 2\rho_{x_1x_2}C_{x_1}C_{x_2} - 2\rho_{yx_1}C_yC_{x_1} - 2\rho_{yx_2}C_yC_{x_2}\right). \quad (15)$$

$$MSE(\bar{y}_{reg2}) \approx \frac{(1-f)}{n}S_y^2\left(1-\rho_{yx_1}^2 - \rho_{yx_2}^2 + 2\rho_{yx_1}\rho_{yx_2}\rho_{x_1x_2}\right) \quad (16)$$

$$MSE(\bar{y}_{pr}) \approx \frac{(1-f)}{n}\left(S_y^2 + (R_1+B_1)^2S_{x_1}^2 + (R_2+B_2)^2S_{x_2}^2 - 2(R_1+B_1)S_{yx_1} - 2(R_2+B_2)S_{yx_2} + 2(R_1+B_1)(R_2+B_2)S_{x_1x_2}\right). \quad (17)$$

dengan $B_1S_{x_1} = \rho_{yx_1}S_y, B_2S_{x_2} = \rho_{yx_2}S_y, R_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_1}, R_2 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_2}, B_1 = \frac{S_{yx_1}}{S_{x_1}^2}, B_2 = \frac{S_{yx_2}}{S_{x_2}^2}$.

3. PENAKSIR YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir yang bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir tersebut.

1. Perbandingan antara persamaan (16) dengan persamaan (15) diperoleh $MSE(\bar{y}_{reg2}) < MSE(\bar{y}_{pr})$ jika

$$\frac{-2S_y^2\rho_{yx_2}\rho_{x_1x_2} - \sqrt{J}}{-2S_y^2} < \rho_{yx_1} < \frac{-2S_y^2\rho_{yx_2}\rho_{x_1x_2} + \sqrt{J}}{-2S_y^2}$$

dengan

$$\sqrt{J} = \sqrt{\left(2S_y^2\rho_{yx_2}\rho_{x_1x_2}\right)^2 - 4\left(-S_y^2\right)\left(S_y^2\left(1-\rho_{yx_2}^2\right) - \left(S_y^2 + (R_1+B_1)^2S_{x_1}^2 + (R_2+B_2)^2S_{x_2}^2 - 2(R_1+B_1)S_{yx_1} - 2(R_2+B_2)S_{yx_2} + 2(R_1+B_1)(R_2+B_2)S_{x_1x_2}\right)\right)}.$$

2. Perbandingan antara persamaan (16) dengan persamaan (17) diperoleh $MSE(\bar{y}_{reg2}) < MSE(\bar{y}_{rat2})$ jika

$$\frac{2\bar{Y}^2\left(\rho_{x_1x_2}C_{x_2} - \rho_{yx_1}C_y\right) - \sqrt{J}}{-2\bar{Y}^2} < C_{x_1} < \frac{2\bar{Y}^2\left(\rho_{x_1x_2}C_{x_2} - \rho_{yx_1}C_y\right) + \sqrt{J}}{-2\bar{Y}^2}$$

dengan

$$\sqrt{J} = \sqrt{\left(-2\bar{Y}^2\left(\rho_{x_1x_2}C_{x_2} - \rho_{yx_1}C_y\right)\right)^2 - 4\left(-\bar{Y}^2\right)\left(-\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_{x_2}^2 - 2\rho_{yx_2}C_yC_{x_2}\right) + S_y^2\left(1-\rho_{yx_1}^2 - \rho_{yx_2}^2 + 2\rho_{yx_1}\rho_{yx_2}\rho_{x_1x_2}\right)\right)}.$$

3. Perbandingan antara persamaan (14) dengan persamaan (16) diperoleh $MSE(\bar{y}_{rat2}) < MSE(\bar{y}_{pr})$ jika

$$\frac{-2\bar{Y}^2\left(\rho_{x_1x_2}C_{x_2} - \rho_{yx_1}C_y\right) - \sqrt{J}}{2\bar{Y}^2} < C_{x_1} < \frac{-2\bar{Y}^2\left(\rho_{x_1x_2}C_{x_2} - \rho_{yx_1}C_y\right) + \sqrt{J}}{2\bar{Y}^2}$$

dengan

$$\sqrt{J} = \sqrt{\left(2\bar{Y}^2\left(\rho_{x_1x_2}C_{x_2} - \rho_{yx_1}C_y\right)\right)^2 - 4\left(\bar{Y}^2\right)\left(\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_{x_2}^2 - 2\rho_{yx_2}C_yC_{x_2}\right)\right.}$$
$$\overline{-\left(S_y^2 + (R_1+B_1)^2 S_{x_1}^2 + (R_2+B_2)^2 S_{x_2}^2 - 2(R_1+B_1)S_{yx_1} - 2(R_2+B_2)S_{yx_2}\right.}$$
$$\overline{\left.+2(R_1+B_1)(R_2+B_2)S_{x_1x_2}\right)}.$$

4. CONTOH

Sebagai contoh dari pembahasan, diberikan data tentang pendapatan, pengeluaran dan tanggungan karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru Tahun 2006.

Tabel 1 : Data Pengeluaran, Pendapatan dan Tanggungan Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru Tahun 2006.

No.	Nama	Pengeluaran (Rupiah)	Pendapatan (Rupiah)	Tanggungan (Jiwa)
1	Suradi	800.000	1.000.000	1
2	Erwin Syahputra	900.000	1.000.000	1
3	Legiman	1.500.000	1.800.000	2
4	Iman	1.300.000	1.400.000	2
5	A. Khalidi	1.100.000	1.200.000	3
6	Candra	1.100.000	1.300.000	2
7	Arifin	1.200.000	1.400.000	3
8	Adi Sasono	1.400.000	1.500.000	1
9	Nirwan	1.300.000	1.600.000	2
10	Fadly	1.400.000	1.800.000	4
11	Rudy Ismanto	1.800.000	1.900.000	3
12	Heri Darma	1.500.000	2.000.000	4
13	Ridwan	1.700.000	2.000.000	3
14	Iwan	1.800.000	2.100.000	3
15	Edi Agus	2.000.000	2.100.000	2
16	Kelber	2.000.000	2.200.000	5
17	Rizaldy	2.000.000	2.200.000	2
18	Sriyadi	2.000.000	2.300.000	1
19	Yohanes	2.100.000	2.300.000	3
20	Charles Purba	2.300.000	2.400.000	1
21	Ariyanto	2.000.000	2.400.000	1
22	Sugiarto	2.300.000	2.500.000	4
23	J. Hutajulu	2.500.000	2.600.000	2
24	Bambang	2.700.000	2.800.000	3
25	Laura Muslim	2.400.000	2.800.000	2
26	Heriawan	2.600.000	2.900.000	3

No.	Nama	Pengeluaran (Rupiah)	Pendapatan (Rupiah)	Tanggungan (Jiwa)
27	Drajat	2.500.000	3.000.000	2
28	Suprapto	2.800.000	3.200.000	6
29	Donny	3.000.000	3.400.000	2
30	N. Gultom	3.100.000	3.300.000	3
31	Tazul Arifin	3.000.000	3.400.000	2
32	Sudirman	3.000.000	3.700.000	3
33	Fetnando	3.400.000	3.500.000	2
34	F. Butar-butar	3.300.000	3.500.000	3
35	R. Sianturi	3.500.000	3.600.000	2
36	E. Tarigan	3.400.000	3.700.000	3
37	Edy Suprianto	3.400.000	4.200.000	2
38	Bayu Lesmana	3.700.000	4.100.000	3
39	Krisna Setiawan	4.200.000	4.700.000	4
40	L. M. Silaban	3.800.000	4.900.000	2
41	Sukirman	4.700.000	5.200.000	5
42	Zulkifli	4.800.000	5.300.000	4
43	R. Lubis	5.300.000	5.500.000	2
44	Hery Augusman	5.000.000	5.800.000	2
45	Adi Hurainah	5.400.000	5.600.000	4
46	Tuhu Bangun	5.500.000	5.700.000	2
47	Pandapotan P	5.700.000	5.800.000	4
48	Ali Azhar	5.600.000	6.100.000	2
49	Abu Bakar N	5.700.000	6.000.000	4
50	MT. Sagala	6.400.000	6.100.000	3
51	Rafialdi	6.900.000	7.100.000	4
52	Jati Teguh	6.000.000	6.300.000	4
53	B. Maniruk	5.900.000	6.000.000	2
54	Kasmaliza	7.100.000	7.700.000	3
55	Sardoltua Girsang	6.600.000	7.000.000	4
56	Syahrial Nasution	7.000.000	7.500.000	4
57	BT. Napitupulu	7.500.000	8.000.000	6
58	Romadka Purba	7.200.000	8.000.000	4
Jumlah		200.100.000	2.184.000	165

Sumber [6].

Dalam mengaplikasikan contoh pada perbandingan *MSE* dari penaksir (1), (13) dan (14), maka pada Tabel 1 dengan bantuan Microsoft Excel diperoleh nilai-nilai sebagai berikut

$N = 58$	$S_{x_1} = 20{,}15$	$B_2 = 7{,}02$	$C_y = 0{,}56$
$n = 8$	$S_{x_2} = 1{,}2$	$R_1 = 12{,}13$	$C_{x_1} = 0{,}54$
$\bar{Y} = 34{,}5$	$S_{yx_1} = 389{,}75$	$R_2 = 13{,}23$	$C_{x_2} = 0{,}42$
$\bar{X}_1 = 37{,}66$	$S_{yx_2} = 10{,}04$	$\rho_{yx_1} = 0{,}99$	$f = 0{,}14$
$\bar{X}_2 = 2{,}84$	$S_{x_1x_2} = 10{,}49$	$\rho_{yx_2} = 0{,}43$	
$S_y = 19{,}46$	$B_1 = 0{,}96$	$\rho_{x_1x_2} = 0{,}44$	

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh dari pengeluaran, pendapatan dan tanggungan karyawan ke persamaan, maka diperoleh

1. $MSE(\bar{y}_{reg2}) < MSE(\bar{y}_{pr})$ yaitu jika $-1 < \rho_{yx_1} < 1$.
2. $MSE(\bar{y}_{reg2}) < MSE(\bar{y}_{rat2})$ jika $-0{,}26 < C_{x_1} < 0{,}62$.
3. $MSE(\bar{y}_{rat2}) < MSE(\bar{y}_{pr})$ jika $-1{,}07 < C_{x1} < 0{,}70$.

Selanjutnya menentukan penaksir yang efisien juga dapat dilihat dari nilai *MSE* masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 2 sebagai berikut

Tabel 2: *MSE* Masing-masing Penaksir

No.	Penaksir	*MSE*
1	$(\bar{y}_{pr})$	133,52
2	$(\bar{y}_{rat2})$	22,14
3	$(\bar{y}_{reg2})$	8,13

Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat bahwa *MSE* dari penaksir $(\bar{y}_{reg2})$ merupakan *MSE* terkecil diantara tiga penaksir tersebut.

5. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai *MSE* dari penaksir rasio, penaksir regresi dan penaksir rasio regresi dengan masing-masing menggunakan dua variabel tambahan untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana. Kemudian *MSE* dari masing-masing penaksir dibandingkan sesuai dengan syarat-syarat efisien yang telah dikemukakan pada pembahasan sebelumnya. Lalu dapat disimpulkan bahwa penaksir $(\bar{y}_{reg2})$ lebih efisien dibandingkan dengan penaksir $(\bar{y}_{rat2})$ dan penaksir $(\bar{y}_{pr})$ jika syarat-syarat efisien terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abu-Dayyeh, W. A., Ahmed M. S., Ahmed R. A. & Muttlak H. A. 2003. Some estimators of a finite population mean using auxiliary information, *Applied Mathematics and Computation.* **139**: 287-298.

[2] Cochran, W. G. 1977. *Sampling Techniques*, Third Edition. John Wiley & Sons, New York.

[3] Kadilar, C. & Cingi, H. 2005. A new estimator using two auxiliary variabels, *Applied Mathematics and Computation.* **162**: 901-908.

[4] Montgomery, D. C. & Runger, D. C. 2011. *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Fifth Edition. John Wiley & Sons Inc, New York.

[5] Sembiring, R. K. 2003. Analisis Regresi. 2nd Edition. ITB, Bandung.

[6] Sinaga, C. V. D. N. 2007. Pola Konsumsi Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V (PTPN V) Pekanbaru. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.

[7] Singh, H. P. & Tailor, R. 2005. Estimation of Finite Population Mean with Known Coefficient of Variation of an Auxiliary Character. *Statistica, anno LXV, n.***3**: 301-313.