BEBERAPA ALTERNATIF PEMBUKTIAN TEOREMA SIMSON

Fadli Nurdin[1*], Mashadi[2], M Natsir[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*fadli.nurdin.18@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses some alternative proofs of Simson theorem, which states the specific form of the three points of intersection lines on the sides of the triangle. In these alternative proofs, the principle of parallel lines, vertical angle and Menelaus theorem are used. At the end, a particular case found on tangent to Simson line is mentioned.

Keywords: *circumcircle, Menelaus theorem, Simson theorem.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas beberapa alternatif pembuktian teorema Simson, yang menyatakan bentuk khusus dari tiga titik perpotongan garis pada sisi-sisi segitiga. Teknik pembuktian alternatif yang dibahas menggunakan prinsip garis sejajar, sudut bertolak belakang dan teorema Menelaus. Diakhir pembahasan didiskusikan suatu kasus khusus yang terdapat pada garis singgung terhadap garis Simson.

Kata kunci: *lingkaran luar segitiga, teorema Menelaus, teorema Simson*.

1. PENDAHULUAN

Segitiga merupakan bangun datar yang sederhana dan di dalam sebuah segitiga banyak kesamaan dan ketaksamaan yang dapat dibentuk. Bila diberikan sebarang ΔABC kita dapat dikontruksi lingkaran dalam segitiga (*incircle of triangle*), lingkaran luar segitiga (*circumcircle of triangle*), dan juga dari masing-masing titik sudut segitiga dan sisi-sisi pada segitiga dapat dibentuk garis yang berpotongan di satu titik, titik-titik potong tersebut adalah *centroid*, *orthocenter, incenter* dan *circumcenter* [5, h. 139]. Oleh karena itu, akan muncul banyak permasalahan yang bisa dijadikan topik untuk menciptakan suatu karya ilmiah.

Misalkan terdapat lingkaran luar segitiga (*circumcircle of triangle*), pada lingkaran luar segitiga tersebut terdapat banyak teorema-teorema yang berlaku, salah satunya teorema Simson. Sehingga pada artikel ini, penulis akan membuktikan teorema Simson menggunakan beberapa alternatif yaitu alternatif pertama manggunakan garis sejajar, alternatif kedua menggunakan sudut bertolak belakang dan alternatif ketiga menggunakan teorema Menelaus [6].

Pada alternatif pertama, penulis akan menunjukkan dua garis sejajar dengan suatu garis yang sama, dengan cara menggunakan postulat garis sejajar [2, h. 238]. Namun, pada alternetif ini penulis akan menggunakan kesejajaran garis yang berbeda dengan yang digunakan pada [6]. Kemudian pada alternatif kedua, penulis akan menunjukkan sudut yang bertolak belakang sama besar [2, h. 92]. Namun, pada alternatif kedua penulis hanya memperjelas proses pembuktian yang terdapat pada [6].

Teorema Menelaus merupakan suatu teorema untuk menunjukkan titik-titik yang segaris pada segitiga. Pada alternatif 3, penulis akan menunjukkan persamaan dari teorema Menelaus berlaku. namun, penulis hanya memperjelas pembuktian yang terdapat pada [6]. Kemudian dibahas suatu kasus khusus yang terdapat pada garis Simson [4]. Apabila perpanjangan salah satu garis yang tegak lurus pada ΔABC merupakan garis tinggi pada ΔABC maka garis singgung yang terbentuk dari titik sudut yang dilalui perpanjangan salah satu garis yang tegak lurus pada ΔABC itu akan sejajar dengan garis Simson atau garis XYZ. Penulis akan menunjukkan garis singgung tersebut sejajar garis Simson menggunakan alat bantu teorema alternatif segmen [1].

2. BEBERAPA ALTERNATIF PEMBUKTIAN TEOREMA SIMSON

Terdapat sebuah ΔABC sebarang, kemudian ambil sebuah titik dari masing-masing sisi ΔABC sehingga membagi sisi-sisi ΔABC sama panjang dan tarik garis yang tegak lurus dari titik tersebut. Kemudian ketiga garis yang tegak lurus tersebut akan berpotongan di satu titik, titik itu dinamakan titik *circumcenter*. Dari titik *circumcenter* tersebut dapat dibuat lingkaran luar segitiga.

Sekarang ambil sembarang titik pada lingkaran luar segitiga dan anggap titik tersebut titik P. Tarik garis yang tegak lurus dari titik P ke masing-masing sisi pada ΔABC maka akan terbentuk titik potong pada masing-masing sisi ΔABC yaitu titik X, Y, dan Z sehingga apabila dihubungkan titik X, Y, dan Z itu pasti Segaris dan garis yang menghubungkan titik X, Y, dan Z dinamakan garis Simson. Berikut diberikan teorema yang telah di jelaskan pada [6].

Teorema 1. (Teorema Simson) Diberikan sebarang ΔABC, dan titik P pada lingkaran luar segitiga, kemudian X , Y, dan Z merupakan titik potong garis yang tegak lurus dari titik P ke masing-masing sisi CB, BA, dan perpanjangan sisi AC pada ΔABC. Sehingga bila di hubungkan, titik X , Y, dan Z segaris.

Alternatif 1

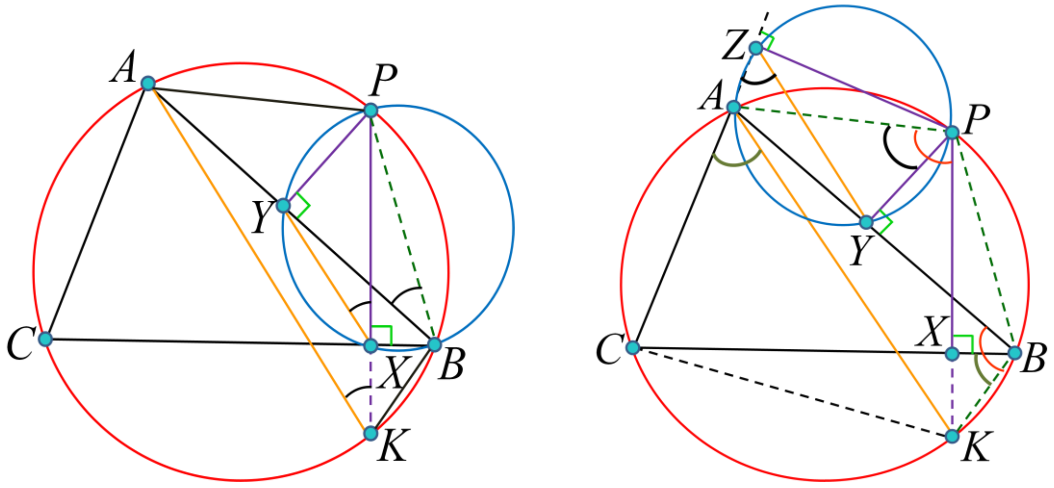
Pada alternatif 1 ini akan dibuktikan teorema Simson dengan menunjukkan dua garis yang sejajar ke suatu garis yang sama, dua garis yang dipotong oleh sebuah garis dikatakan sejajar apabila terdapat dua sudut yang berhadapan, berseberangan luarnya atau berseberangan dalamnya sama besar. Sehingga untuk membuktikan dua garis yang sejajar cukup dengan menunjukkan dua sudut yang bersesuaiannya sama besar berdasarkan postulat garis sejajar [2, h. 238].

Pembuktian ini akan dilakukan dengan dua kasus, kasus pertama jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik P ke masing-masing sisi segitiga tidak ada yang bersinggungan pada lingkaran luar segitiga, kasus kedua jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik P ke masing-masing sisi segitiga ada yang bersinggungan pada lingkaran luar segitiga.

Bukti :

Kasus 1 : Akan dibuktikan titik X, Y, dan Z segaris jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik P ke masing-masing sisi segitiga tidak ada yang bersinggungan pada lingkaran luar segitiga.

Perpanjang sisi PX sehingga berpotongan dengan lingkaran luar segitiga di titik K. Kemudian dari titik K hubungkan ke titik A, sehingga didapat garis AK merupakan garis bantu untuk membuktikan X, Y dan Z segaris. Pertama, akan dibuktikan $XY // AK$, dengan menunjukkan $\angle PKA = \angle PXY$. Perhatikan Gambar 1.



(a) (b)

Gambar 1. (a) Segiempat tali busur *PBXY*, (b) Segiempat tali busur *AZPY*.

Pada Gambar 1(a), terdapat segiempat tali busur *APBK* sehingga diperoleh $\angle PBA = \angle PKA$. kemudian buat sebuah lingakaran baru berdiameter PB didapat segiempat tali busur *PBXY*, dari segiempat tali busur *PBXY* diperoleh $\angle PBY = \angle PXY$. Diketahui $\angle PBA = \angle PBY$ maka $\angle PKA = \angle PXY$ sehingga terbukti $XY // AK$.

Kedua, akan dibuktikan $YZ // AK$, dengan menunjukkan $\angle AZY = \angle CAK$. Perhatikan Gambar 1(b), pada segiempat tali busur *APBK* diperoleh

$$\angle APK = \angle KBA. \tag{1}$$

Diketahui $\angle APK = \angle APY + \angle YPX$ dan $\angle KBA = \angle KBX + \angle XBY$, sehingga persamaan (1) menjadi

$$\angle APY + \angle YPX = \angle KBX + \angle XBY. \tag{2}$$

Kemudian dari segiempat tali busur *ABKC* diperoleh

$$\angle CAK = \angle KBC. \tag{3}$$

Diketahui $\angle KBX = \angle KBC$, sehingga persamaan (3) menjadi

$$\angle CAK = \angle KBX. \tag{4}$$

Selanjutnya, konstruksi sebuah lingkaran baru berdiameter AP diperoleh segiempat tali busur *AZPY*. Dari segiempat tali busur *AZPY* diperoleh

$$\angle AZY = \angle APY. \tag{5}$$

Perhatikan kembali Gambar 1(a), pada segiempat tali busur *PBXY* diperoleh

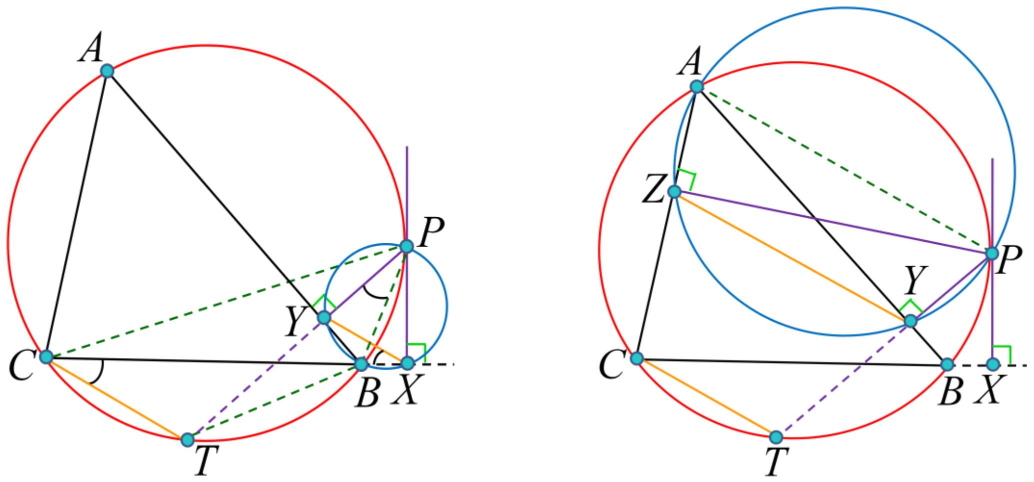
$$\angle YPX = \angle XBY. \tag{6}$$

Substitusikan persamaan (4), (5), dan (6) ke persamaan (2) diperoleh

$$\angle AZY = \angle CAK.$$

Jadi, diperoleh $\angle AZY = \angle CAK$ maka terbukti $YZ \,//\, AK$. Dapat disimpulkan bahwa X, Y, dan Z segaris karena $XY \,//\, AK$ dan $YZ \,//\, AK$.

Kasus 2 : Untuk kasus ini akan dibuktikan titik X, Y, dan Z segaris jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik P ke masing-masing sisi segitiga ada yang bersinggungan pada lingkaran luar segitiga. Perpanjang sisi PY sehingga berpotongan dengan lingkaran di titik T. Kemudian dari titik T hubungkan ke titik C, sehingga didapat garis CT merupakan garis bantu untuk membuktikan X, Y, dan Z segaris. Pertama, akan dibuktikan $XY \,//\, CT$, dengan menunjukkan $\angle TCB = \angle BXY$. Perhatikan Gambar 2.



(a) (b)

Gambar 2. (a) Segiempat tali busur *PBKC*,(b) Segiempat tali busur *APYZ*

Pada Gambar 2(a), hubungkan titik P, B, T, dan C sehingga terbentuk sebuah segiempat tali busur *PBTC*, segiempat tali busur *PBTC* didapat $\angle BPT = \angle TCB$. Konstruksi sebuah lingkaran baru berdiameter PB sehingga akan terbentuk segiempat tali busur *PXBY*, dari segiempat tali busur *PXBY* didapat $\angle BPY = \angle BXY$. Diketahui $\angle BPY = \angle BPT$ maka $\angle TCB = \angle BXY$ sehingga terbukti $XY \,//\, CT$.

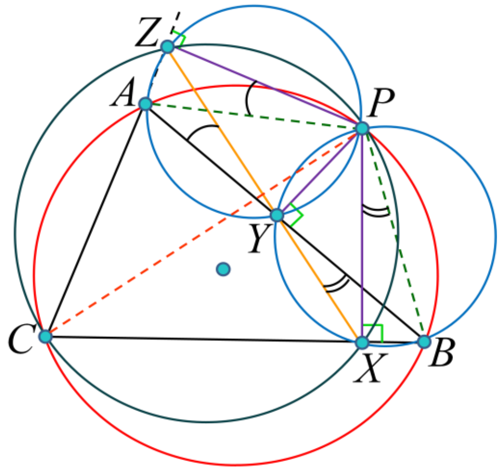
Kedua, akan dibuktikan $YZ \,//\, CT$, dengan menunjukkan $\angle AZY = \angle ACT$. Perhatikan Gambar 2(b), pada segiempat tali busur *APCT* didapat $\angle ACT + \angle APT = 180^0$. Konstruksi sebuah lingkaran baru berdiameter AP sehingga diperoleh segiempat tali busur *APYZ*, diperoleh $\angle AZY + \angle APY = 180^0$. Diketahui $\angle APY = \angle APT$ karena merupakan sudut yang sama maka $\angle AZY = \angle ACT$ sehingga terbukti $YZ \,//\, CT$. Dapat disimpulkan bahwa X, Y, dan Z segaris karena $XY \,//\, CT$ dan $YZ \,//\, CT$. ■

Alternatif 2

Pada alternatif pertama telah dibuktikan teorema Simson menggunakan garis yang sejajar. selanjutya pada alternatif kedua ini akan dibuktikan teorema Simson dengan menunjukkan sudut bertolak belakang itu sama besar yang terdapat pada [6].

Bukti :

Perhatikan Gambar 3.



Gambar 3. Segiempat tali busur *ZPXC* dan Segiempat tali busur *APBC.*

Perhatikan Gambar 3, pada lingkaran berdiamater *AP* terdapat segiempat tali busur *PZAY*, dari segiempat tali busur *PZAY* didapat $\angle ZPA = \angle AYZ$. Kemudian pada lingkaran berdiameter *PB* terdapat segiempat tali busur *PBXY*, dari segiempat tali busur *PBXY* didapat $\angle BPX = \angle BYX$. Akan dibuktikan $\angle AYZ = \angle BYX$.

Buat lingkaran baru bersiameter *AP* didapat segiempat tali busur *ZPXC*, dari segiempat tali busur *ZPXC* diperoleh

$$\angle ZCB + \angle ZPA + \angle APX = 180^0$$

$$\angle APX = 180^0 - (\angle ZCB + \angle ZPA). \quad (7)$$

Diketahui $\angle ZPA = \angle AYZ$, maka persamaan (7) menjadi

$$\angle APX = 180^0 - (\angle ZCB + \angle AYZ). \quad (8)$$

Kemudian dari segiempat tali busur *APBC* diperoleh

$$\angle ACB + \angle BPX + \angle APX = 180^0$$

$$\angle APX = 180^0 - (\angle ACB + \angle BPX). \quad (9)$$

Diketahui $\angle BPX = \angle BYX$, maka persamaan (9) menjadi

$$\angle APX = 180^0 - (\angle ACB + \angle BYX). \quad (10)$$

Diketahui $\angle ZCB = \angle ACB$, karena merupakan sudut yang sama maka dari persamaan (8) dan persamaan (10) diperoleh $\angle AYZ = \angle BYX$ sehingga dapat disimpulkan *X*, *Y*, dan *Z* segaris. ■

Alternatif 3

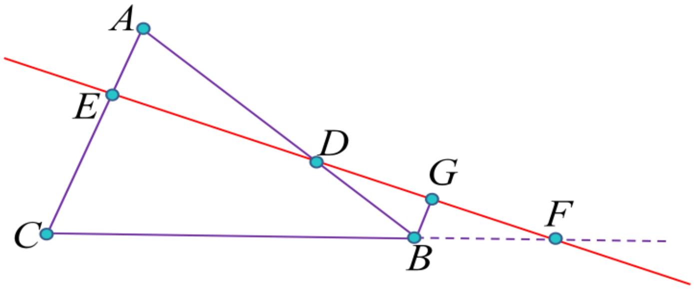
Pada alternatif pertama telah dibuktikan teorema Simson menggunakan garis yang sejajar kemudian pada alternatif kedua telah dibuktikan teorema Simson menggunakan sudut bertolak belakang. selanjutya pada alternatif ketiga ini akan dibuktikan teorema Simson menggunakan teorema Menelaus yang terdapat pada [6]. Teorema Menelaus merupakan suatu teorema pada geometri bidang yang menunjukkan tiga titik yang berpotongan pada masing-masing sisi segitiga segaris.

Teorema 2. (Teorema Menelaus) Diberikan sebuah ΔABC sebarang. Titik D terletak pada sisi AB titik E terletak pada sisi AC dan titik F terletak pada perpanjangan garis dari CB. Titik D, E, dan F dikatakan segaris jika dan hanya jika

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}=-1 \tag{11}$$

Bukti :

Misalkan titik D, E dan F segaris, maka akan dibuktikan persamaan (11) berlaku. Dari Gambar 4, perpanjang garis dari titik B ke sisi DF yang sejajar dengan sisi CA sehingga perpanjangan garis tersebut akan memotong di titik G pada sisi DF, maka $CA \,//\, BG$. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 4.



Gambar 4. Garis BG dan CA sejajar.

Pada Gambar 4, diperoleh beberapa segitiga yang sebangun, yaitu $\Delta ADE \sim \Delta BDG$ dan $\Delta CEF \sim \Delta BGF$. Sehingga apabila perbandingan sisi-sisi keempat segitiga tersebut dikalikan diperoleh

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{CE}{BG}=\frac{EA}{BG}\cdot\frac{FC}{FB}$$

$$\left(\frac{BG}{EA}\cdot\frac{FB}{FC}\right)\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{CE}{BG}=\frac{EA}{BG}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\left(\frac{BG}{EA}\cdot\frac{FB}{FC}\right)$$

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{FB}{FC}=1 \tag{12}$$

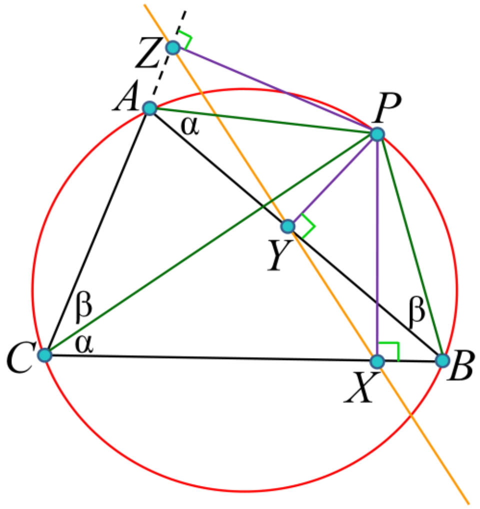
Segmen garis yang searah (dari kiri ke kanan) akan bernilai positif dan jika berlawanan arah (dari kanan ke kiri) akan bernilai negatif, maka FB = -BF dan persamaan (12) menjadi

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}=-1$$ ■

Kemudian akan dibuktikan teorema Simson menggunakan teorema Menelaus dengan menunjukkan

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

Bukti :
Perhatikan Gambar 5.



Gambar 5. Segiempat tali busur *ACBP*.

Perhatikan Gambar 5, misalkan $\angle ACP = \beta$ dan $\angle PCB = \alpha$ maka diperoleh $\angle ACP = \angle PBA = \beta$ dan $\angle PCB = \angle PAB = \alpha$. Kemudian diperoleh beberapa segitiga yang sebangun, yaitu $\Delta\, CZP \sim \Delta\, BYP$, diperoleh

$$\frac{PZ}{PY} = \frac{CZ}{BY}. \tag{13}$$

Selanjutnya $\Delta\, AYP \sim \Delta\, CXP$, diperoleh

$$\frac{PY}{PX} = \frac{AY}{CX}. \tag{14}$$

Kemudian $\Delta\, BXP \sim \Delta\, AZP$, diperoleh

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{BX}{AZ}. \tag{15}$$

Kalikan persamaan (13), (14), dan (15) diperoleh

$$\frac{CZ}{BY} \cdot \frac{AY}{CX} \cdot \frac{BX}{AZ} = \frac{PZ}{PY} \cdot \frac{PY}{PX} \cdot \frac{PX}{PZ}$$

$$\frac{CZ}{BY} \cdot \frac{AY}{CX} \cdot \frac{BX}{AZ} = 1. \tag{16}$$

Segmen garis yang searah (dari kiri ke kanan) akan bernilai positif dan jika berlawanan arah (dari kanan ke kiri) akan bernilai negatif maka *BY* = - *YB*, *CX* = - *XC* dan *AZ* = - *ZA* sehingga persamaan (16) menjadi

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

Menurut Teorema Menelaus dapat disimpulkan bahwa *X* , *Y*, dan *Z* Segaris. ■

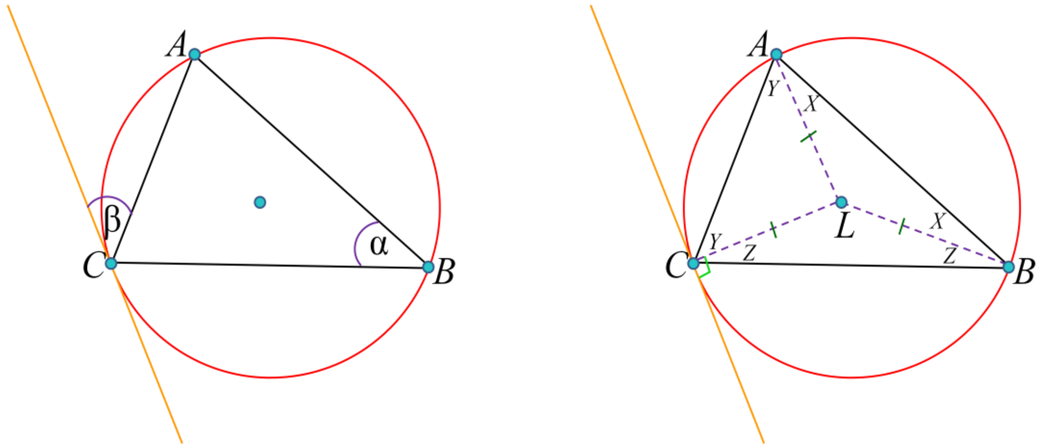
3. KASUS KHUSUS

Apabila perpanjangan salah satu garis yang tegak lurus pada Δ*ABC* merupakan garis tinggi pada Δ*ABC* maka garis singgung yang terbentuk dari titik sudut yang dilalui perpanjangan salah satu garis yang tegak lurus pada Δ*ABC* itu akan sejajar dengan garis Simson atau garis *XYZ* [4].

Pada kasus khusus ini penulis akan menunjukkan garis *MC* sejajar dengan garis Simson. Untuk menunjukkan garis *MC* // garis Simson penulis menggunakan teorema alternetif segmen. Teorema alternatif segmen merupakan sebuah teorema yang menyatakan dua buah sudut yang terbentuk pada sebuah lingkaran luar segitiga dan garis singgung lingkaran sama besar. Berikut diberikan teorema alternatif segmen yang terdapat pada [1].

Teorema 3. (Teorema Alternatif Segmen) Sudut yang terletak diantara garis singgung dan tali busur sama besar dengan sudut pada alternatif segmennya.

Bukti :
Perhatikan Gambar 6.



(a) (b)

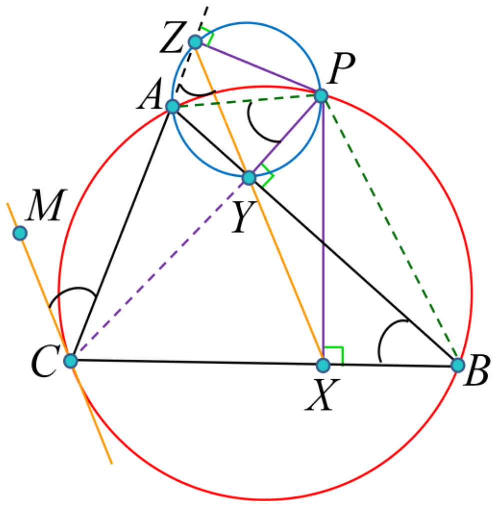
Gambar 6. (a) Δ*ABC* dengan α = β, (b) Δ*ABC* dengan jari-jari lingkaran.

Pada Gambar 6(a), misalkan titik pusat lingkaran itu *L* kemudian kita hubungkan titik *L* ke masing-masing titik sudut pada segitiga sehingga terbentuk jari-jari lingkaran luar segitiga. Maka didapat tiga segitiga yaitu Δ*ALB*, Δ*BLC*, dan Δ*CLA*. Masing-masing segitiga tersebut merupakan segitiga sama sisi karena sisi-sisi yang sama panjang merupakan jari-jari lingkaran luar Δ*ABC*. Dari Gambar 6(a) dan Gambar 6(b) diketahui bahwa β = 90^0 – *Y* dan α = *X* + *Z*.

Penjumlahan besar sudut pada suatu segitiga 180^0 maka diperoleh

$$(X+Y)+(X+Z)+(Z+Y) = 180^0$$
$$2(X+Y+Z) = 180^0$$
$$(X+Y+Z) = 90^0$$
$$X+Z = 90^0 - Y$$
$$\alpha = \beta \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan ditunjukkan garis *MC* // garis Simson. Perhatikan Gambar 7.



Gambar 7. Garis *MC* // garis Simson dengan sudut yang bersesuaian sama besar.

Pada Gambar 7, dari segiempat tali busur *APBC* diperoleh $\angle CBA = \angle APC$, kemudian, konstruksi segiempat tali busur yang baru berdiameter *AP* sehingga didapat segiempat tali busur *AZPY*. Dari segiempat tali busur *AZPY* didapat $\angle APY = \angle YZA$. Diketahui $\angle APC = \angle APY$ merupakan sudut yang sama maka $\angle CBA = \angle YZA$. Selanjutnya dengan menggunakan teorema alternatif segmen diperoleh $\angle MCA = \angle CBA$, sehingga $\angle MCA = \angle YZA$. Jadi, dapat disimpulkan garis *MC* // garis Simson.

4. KESIMPULAN

Teorema Simson dibuktikan dengan beberapa alternatif. Alternatif pertama menggunakan garis yang sejajar, alternatif kedua menggunakan sudut bertolak belakang dan alternatif ketiga menggunakan teorema Menelaus. Dari ketiga alternatif tersebut, dapat disimpulkan bahwa alternatif kedua lebih ringkas dari pada alternatif pertama dan ketiga.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Devereux, T. 2013. Alternatif Segment Theorem. 15 Agustus 2013 : 1 hal. http://www.timdevereux.co.uk/maths/geompages/proof7.php, 18 September 2013. pk. 21.00.

[2] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC., Reading.
[3] Gutierrez, A. 2004. Menelaus Theorem Proof. 1 hal. http://agutie.homestead.com/files/menelaus1.htm, 25 Oktober 2013. pk. 14.47.
[4] Gutierrez, A. 2004. Problem 678. 17 Oktober 2011 : 1 hal. http://www.gogeometry.com/problem/p678-simson-line-circumcircle-tangent-parallel.htm, 25 Oktober 2013. pk. 14.50.
[5] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.
[6] Riegel, M. 2006. Simson's Theorem. *Senior Project Archive*.