METODE TRANSFORMASI ELZAKI DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN VARIABEL

Marpipon Haryandi[1*], Asmara Karma[2], Musraini M[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*Marpipon.haryandi@gmail.com

ABSTRACT

This paper discusses how to solve second order linear ordinary differential equations with variable coefficients using ELzaki's transformation method, Euler's method and the method of variation of parameters. Then described the ELzaki's transformation properties to be used in solving second order linear ordinary differential equation with variable coefficients. From this review, ELzaki's transformation method produces particular solutions of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients. While the Euler's method and the method of variation of parameters only generate the general solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients.

Keywords: *Derivative, ELzaki's transformation, particular solution, second order linear ordinary differential equation, variable coefficient, .*

ABSTRAK

Makalah ini membahas tentang cara penyelesaian persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel menggunakan metode transformasi ELzaki, metode Euler dan metode variasi parameter. Kemudian diuraikan sifat-sifat transformasi ELzaki untuk digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel. Dari ulasan ini, metode transformasi ELzaki menghasilkan solusi khusus dari persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel. Sedangkan metode Euler dan metode variasi parameter hanya menghasilkan solusi umum dari persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel.

Kata kunci: *Persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel, solusi khusus, turunan fungsi, transformasi ELzaki.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu persamaan diferensial biasa yang sering digunakan dalam pemodelan matematika adalah persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel. Adapun bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel sebagai berikut

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t), \tag{1}$$

dengan $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ dan $b(t)$ adalah fungsi terhadap variabel t, serta $a_0(t) \neq 0$. Persamaan (**??**) disebut persamaan diferensial biasa linear orde dua nonhomogen dengan koefisien variabel jika $b(t) \neq 0$ dan persamaan diferensial biasa linear orde dua homogen dengan koefisien variabel jika $b(t) = 0$.

Persamaan diferensial biasa linear orde dua homogen dengan koefisien variabel yang berbentuk

$$a_0t^2y'' + a_1ty' + a_2y = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

dengan a_0, a_1, a_2 adalah konstanta, dapat diselesaikan dengan metode Euler [**?**, h.260]. Metode Euler menghasilkan solusi umum,

$$y = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}, \tag{3}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta, r_1 dan r_2 adalah akar karakteristik dari persamaan (**??**).

Persamaan diferensial biasa linear orde dua nonhomogen dengan koefisien variabel dapat diselesaikan dengan metode variasi parameter [**?**, h.109], yang solusi umumnya diberikan oleh

$$y = u_1t^{r_1} + u_2t^{r_2},$$

dimana r_1 dan r_2 adalah akar karakteristik dari persamaan (**??**). Lebih lanjut dalam [**?**, h.183] menyatakan bahwa u_1 dan u_2 dapat dicari dengan rumus

$$u_1 = -\int \frac{y_2(t)b(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + c_1,$$
$$u_2 = -\int \frac{y_1(t)b(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + c_2,$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta dan $W(y_1, y_2)$ adalah Wronski dari y_1 dan y_2.

Bila syarat awal untuk persamaan (**??**) tersedia, maka solusi khusus dari masalah nilai awal persamaan (**??**) dapat diperoleh dari solusi umum yang didapat dengan metode Euler atau variasi parameter. Solusi khusus tanpa mendapatkan solusi umum dari persamaan (**??**) dapat diperoleh langsung dengan metode transformasi ELzaki. Hal inilah yang dibahas dalam makalah ini yang merupakan review dari artikel *On The Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation With Variable Coefficients* [**?**].

2. TRANSFORMASI ELZAKI

Transformasi ELzaki adalah transformasi integral suatu fungsi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1 [?] Diberikan himpunan A dengan anggotanya adalah fungsi eksponensial berpangkat, sehingga A dapat ditulis,

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, k_1 \text{ dan } k_2 > 0 : |f(t)| < Me^{|t|k_j}, \text{ jika } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

maka transformasi ELzaki $f(t)$ dalam A adalah

$$E[f(t)] = v \int_0^\infty f(t) e^{\frac{-t}{v}} dt = T(v), v \in (k_1, k_2). \tag{4}$$

Teorema 2 [?] Jika transformasi ELzaki pada fungsi $f(t)$, yaitu

$$T(v) = E[f(t)] = v \int_0^\infty f(t) e^{\frac{-t}{v}} dt,$$

maka

1. $E[tf'(t)] = v^2 \frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right].$

2. $E[t^2 f'(t)] = v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right].$

3. $E[tf''(t)] = v^2 \frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right].$

4. $E[t^2 f''(t)] = v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right].$

Sifat-sifat transformasi ELzaki pada Teorema (**??**) digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel. Kemudian diperoleh solusi persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel dalam bentuk transformasi ELzaki. Dengan menggunakan skema invers transformasi ELzaki, diperoleh solusi sebenarnya dari persamaan dferensial biasa linear orde dua dengan koefisien varriabel.

Beberapa skema invers transformasi ELzaki yang digunakan adalah sebagai berikut [?]:

1. Misal $f(t) = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} E\big(1\big) &= v \int_0^\infty e^{\frac{-t}{v}} dt \\ &= v \Bigg[-ve^{\frac{-t}{v}} \Bigg]_0^\infty \\ E\big(1\big) &= v^2. \end{aligned}$$

2. Misal $f(t) = t$, diperoleh

$$E\big(t\big) = v\int_0^{\infty} te^{\frac{-t}{v}}dt.$$

Berdasarkan integral parsial, diperoleh

$$E\big(t\big) = v^3.$$

Untuk kasus umum jika $n > 0$ adalah bilangan bulat, diperoleh

$$E\big(t^n\big) = n!v^{n+2}. \tag{5}$$

3. Misal $f(t) = e^{at}$, diperoleh

$$E\big[e^{at}\big] = v\int_0^{\infty} e^{-t}ve^{at}dt,$$
$$E\big[e^{at}\big] = \frac{v^2}{1-av}, \tag{6}$$

Hasil dari persamaan (**??**) berguna juga untuk mendapatkan transformasi ELzaki dari

$$E\Big[\sin at\Big] = \frac{av^3}{1+a^2v^2},$$
$$E\Big[\cos at\Big] = \frac{v^2}{1+a^2v^2},$$
$$E\Big[\sinh at\Big] = \frac{av^3}{1-a^2v^2},$$
$$E\Big[\cosh at\Big] = \frac{v^2}{1-a^2v^2}.$$

3. METODE TRANSFORMASI ELZAKI DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN VARIABEL

Pada bagian ini diberikan contoh persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel, yang diselesaikan dengan menggunakan metode transformasi ELzki, kemudian akan dibandingkan dengan metode Euler dan metode variasi parameter.

Contoh 3.1
Temukanlah solusi khusus dari persamaan diferensial biasa linear orde dua homogen dengan koefisien variabel sebagai berikut,

$$2t^2y'' - 5ty' + 3y = 0,\ t > 0, \tag{7}$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0. \tag{8}$$

Solusi: Misalkan $y = f(t)$, berdasarkan Teorema (**??**) dan menggunakan (**??**), diperoleh

$$E[t^2y''] = E[t^2f''(t)] = v^4\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right], \tag{9}$$

sehingga persamaan (**??**) dapat ditulis,

$$E[t^2y''] = v^2E''[y] - 4ve'[y] + 6E[y]. \tag{10}$$

Berdasarkan Teorema (**??**) yaitu,

$$E[ty'] = E[tf'(t)] = v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right], \tag{11}$$

persamaan (**??**) dapat ditulis,

$$E[ty'] = vE'[y] - 2E[y]. \tag{12}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (**??**) dan (**??**) kedalam persamaan (**??**), diperoleh

$$\begin{aligned} 2\big(v^2E''[y] - 4vE'[y] + 6E[y]\big) - 5\big(vE'[y] - 2E[y]\big) + 3E[y] &= 0,\\ 2v^2E''[y] - 13vE'[y] + 25E[y] &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$E[y] = c_1v^{\frac{5}{2}} + c_2v^5.$$

Berdasarkan persamaan (**??**), diperoleh solusi khusus dari persamaan (**??**)

$$y = t^{\frac{1}{2}} + t^3.$$

Bila digunakan metode Euler untuk menyelesaikan persamaan (**??**) diperoleh solusi umum dengan bentuk,

$$y = c_1t^{\frac{1}{2}} + c_2t^3.$$

Contoh 3.2

Temukanlah solusi khusus dari persamaan diferensial biasa linear orde dua nonhomogen dengan koefisien variabel sebagai berikut,

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 12t^2, \tag{13}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0. \tag{14}$$

Solusi: Misalkan $y = f(t)$, berdasarkan Teorema (**??**) dan menggunakan (**??**) diperoleh

$$E[t^2y''] = E[t^2f''(t)] = v^4\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right],$$

Berdasarkan Teorema (**??**) yaitu,

$$E[ty'] = E[tf'(t)] = v^2 \frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right].$$

Karena $E[y] = T(v)$ dan $y(0) = f(0) = 0$, $y'(0) = f'(0) = 0$, diperoleh

$$E[t^2y''] = v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{E[y]}{v^2} - y(0) - vy'(0)\right),$$

$$E[t^2y''] = v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{E[y]}{v^2}\right). \tag{15}$$

Kemudian diperoleh

$$E[ty'] = v^2 \frac{d}{dv}\left(\frac{E[y]}{v} - vy(0)\right) - v\left(\frac{E[y]}{v} - vy(0)\right),$$

$$E[ty'] = v^2 \frac{d}{dv}\left(\frac{E[y]}{v}\right) - v\left(\frac{E[y]}{v}\right). \tag{16}$$

Ruas kanan pada persamaan (**??**) menjadi,

$$E[12t^2] = 24v^4. \tag{17}$$

Jika persamaan (**??**) diubah ke bentuk transformasi ELzaki, maka

$$E[t^2y'' + 4ty' + 2y] = E[12t^2]. \tag{18}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (**??**), (**??**) dan (**??**) ke dalam persamaan (**??**), diperoleh

$$v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{E[y]}{v^2}\right) + 4v^2 \frac{d}{dv}\left(\frac{E[y]}{v}\right) - 4v\left(\frac{E[y]}{v}\right) + 2E[y] = 24v^4, \tag{19}$$

dari persamaan (**??**), diperoleh

$$\begin{aligned}
v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{E[y]}{v^2}\right) &= v^4 \frac{d}{dv}\left(\frac{v^2E'[y] - 2vE[y]}{v^4}\right) = v^4 \frac{d}{dv}\left(\frac{E'[y]}{v^2} - \frac{2E[y]}{v^3}\right),\\
&= v^4\left(\frac{v^2E''[y] - 2vE'[y]}{v^4}\right) - \left(\frac{2v^3E'[y] - 6v^2E[y]}{v^6}\right),\\
&= v^4\left(\frac{E''[y]}{v^2} - \frac{2E'[y]}{v^3} - \frac{2E'[y]}{v^3} + \frac{6E[y]}{v^4}\right),
\end{aligned}$$

$$v^4 \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{E[y]}{v^2}\right) = v^2E''[y] - 4vE'[y] + 6E[y]. \tag{20}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (**??**) kedalam persamaan (**??**), diperoleh

$$\begin{aligned} v^2E''[y] - 4vE'[y] - 6E[y] + 4vE'[y] + 6E[y] &= 24v^4, \\ v^2E''[y] - 4vE'[y] - 6E[y] + 4vE'[y] + 6E[y] &= 24v^4. \end{aligned} \tag{21}$$

Sehingga persamaan (**??**) dapat ditulis,

$$E''[y] = 24v^2.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E'[y] &= \int 24v^2 dv, \\ E'[y] &= 8v^3 + c_1. \end{aligned}$$

Kemudian diperoleh

$$\begin{aligned} E[y] &= \int \left(8v^3 + c_1\right) dv, \\ E[y] &= 2v^4 + c_1 v + c_2. \end{aligned}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta. Bila $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$, maka diperoleh

$$E[y] = 2v^4.$$

Berdasarkan persamaan (**??**), diperoleh

$$y = t^2.$$

Bila digunakan metode variasi parameter diperoleh solusi dari persamaan (**??**), diperoleh solusi umum,

$$y = t^2 + c_1 t^{-2} + c_2 t^{-1}.$$

Dari Contoh 1 dan 2 dapat dilihat bahwa metode transformasi ELzaki, metode Euler dan metode variasi parameter sama-sama dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel yang diberikan. Metode Euler dan metode variasi parameter memberikan solusi umum dari persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel, sedangkan metode transformasi ELzaki memberikan solusi khusus dari persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien variabel. Jika solusi umum yang dihasilkan oleh metode Euler dan metode variasi parameter diberikan syarat awal, maka akan menghasilkan solusi khusus yang sama dengan solusi khusus pada metode transformasi ELzaki.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyce, W.E & R. Diprima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7'th edition*. John Wiley and Sons. New York.

[2] Elzaki, T.M & S.M. ELzaki. 2011. On The Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation With Variable Coefficients, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics 6(1)*. pp. 41-46.

[3] Elzaki, T.M. 2011. The New Integral Transform "Elzaki Transform", *Advances in Theoretical and Applied Mathematics 7(1)*. pp. 57-64.

[4] Kreyszig E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics, 9'th Edition*. John Wiley and Sons. Canada.

[5] Santoso, W. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern, Edisi Kedua*. Erlangga. Jakarta.