METODE ITERASI BEBAS TURUNAN BERDASARKAN KOMBINASI KOEFISIEN TAK TENTU DAN *FORWARD DIFFERENCE* UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Mahrani[1*], M. Imran[2], Agusni[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*rhanie90@ymail.com

ABSTRACT

We discuss an iterative method to solve a nonlinear equation, which is free from derivatives by approximating a derivative in the two-step Newton method by the method of undetermined coefficients and forward difference. We show analytically that the method is of three orde for a simple root. Numerical experiments show that the new method is comparable with other discussed methods.

Keywords: *forward difference, free derivative method, iterative method, order of convergence, undetermined coefficient method.*

ABSTRAK

Kertas kerja ini membahas metode iterasi bebas turunan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan mengaproksimasi turunan yang ada pada metode Newton dua langkah dengan menggunakan metode koefisien tak tentu dan *forward difference*. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode yang dihasilkan mempunyai kekonvergenan orde tiga. Hasil komputasi mendukung hasil kajian analitik. Komputasi numerik menunjukkan metode yang dihasilkan sebanding dengan metode sekelas yang ada.

Kata kunci: *metode iterasi, forward difference, metode bebas turunan, orde konvergensi, koefisien tak tentu.*

1. PENDAHULUAN

Menemukan teknik untuk mendapat solusi persamaan nonlinear yang berbentuk

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

adalah suatu topik yang hangat dalam penelitian di bidang analisis numerik. Hal ini dikarenakan tidak semua kasus persamaan (1) dapat diselesaikan secara secara analitik, seperti polinomial berderajat 5 atau lebih, sehingga solusi numerik menjadi alternatif.

Metode numerik yang populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah Metode Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \quad \text{dan} \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

yang memiliki keonvergenan orde dua, [4, h. 278]. Dalam perkembangannya banyak peneliti berusaha untuk memodifikasi metode Newton dengan menghindari munculnya turunan di formula iterasi (2), diantaranya adalah Metode Steffensen, dengan bentuk iterasinya adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \tag{3}$$

dengan kekonvergenan orde dua [4, h. 278].

Metode iterasi lain yang menghindari munculnya turunan adalah yang diturunkan dari metode Potra dan Ptak yang dikemukakan oleh Dehghan-Hajarian, dengan kekonvergenan orde tiga [3]. Metode ini memiliki bentuk iterasi

$$y_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \tag{4}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)[f(y_{n+1} - f(x_n)]}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \tag{5}$$

Pada kertas kerja ini di bagian dua dibahas metode iterasi bebas turunan yang merupakan review sebagian dari artikel Soleymani dan Hosseinabadi [6], dengan judul *"New Third - and - Six -Order Derivative - Free Techniques for Nonlinear Equations"*, kemudian dilanjutkan di bagian tiga dengan melakukan komputasi numerik terhadap lima fungsi uji.

2. METODE ITERASI BEBAS TURUNAN

Metode Newton satu langkah (2) dapat disajikan sebagai metode iterasi dua langkah yang berbentuk

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{6}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \tag{7}$$

Metode iterasi persamaan (6) dan (7) dinamakan metode iterasi Newton dua langkah.

Selanjutnya, turunan pertama $f'(y_n)$ pada persamaan (7) ditaksir dengan menggunakan koefisien taktentu adalah,

$$f'(y_n) = \frac{f'(x_n)g(f(x_n))^i}{a(f(x_n))^b + cf(x_n)f(y_n) + d(f(y_n))^e}. \tag{8}$$

Substitusikan persamaan (8) ke persamaan (7), maka diperoleh

$$x_{n+1} = y_n - \frac{a(f(x_n))^b + cf(x_n)f(y_n) + d(f(y_n))^e}{g(f(x_n))^i}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \tag{9}$$

Dengan memilih $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 0$, $e = 0$, $g = 1$ dan $i = 2$ [6] pada persamaan (9), maka diperoleh

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\left(1 + 2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)\right). \tag{10}$$

Selanjutnya ditaksir $f'(x_n)$ pada persamaan (6) menggunakan *forward difference* [7, h.242],

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$

dengan $h = f(x_n)$, sehingga

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}. \tag{11}$$

Misalkan $w_n = x_n + f(x_n)$ dan berdasarkan notasi beda terbagi [1, h.111-112], maka

$$f'(x_n) = f[x_n, w_n] = \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n}. \tag{12}$$

Substitusikan persamaan (12) ke persamaan (6) dan persamaan (10), maka diperoleh

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]}, \tag{13}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]}\left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\left(1 + 2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)\right). \tag{14}$$

Persamaan (13) dan (14) merupakan metode Iterasi Bebas Turunan yang akan ditunjukkan bahwa kekonvergenannya berorde tiga.

Teorema 1 (Orde Konvergensi)
Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan pada interval terbuka D. Selanjutnya asumsikan bahwa x^* adalah akar sederhana dari $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke x^*, maka metode iterasi persamaan (13) dan (14) mempunyai kekonvergenan orde tiga dan memenuhi persamaan eror

$$e_{n+1} = \left(-\frac{F_2^2}{4F_1} - \frac{F_2^2}{4}\right)e_n^3, \tag{15}$$

dengan $F_j = f^{(j)}(x^*)$, $j \geq 1$.

Bukti
Misalkan x^* adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(x^*) = 0$ dan $f'(x^*) \neq 0$. Misalkan $e_n = x_n - x^*$. Dengan melakukan ekspansi Taylor [2, h.184] terhadap $f(x)$ di sekitar $x_n = x^*$ sampai orde tiga dan mengabaikan orde yang lebih tinggi, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x_n - x^*)^2 \\ + \frac{1}{6}f'''(x^*)(x_n - x^*)^3. \end{aligned} \tag{16}$$

Karena x^* adalah akar, maka $f(x^*) = 0$ dan persamaan (16) menjadi

$$f(x_n) = F_1e_n + \frac{F_2e_n^2}{2} + \frac{F_3e_n^3}{6}, \tag{17}$$

dengan $F_j = f^{(j)}(x^*)$, $j \geq 1$. Selanjutnya dihitung $w_n = x_n + f(x_n)$, didapat

$$w_n = x_n + F_1e_n + \frac{F_2e_n^2}{2} + \frac{F_3e_n^3}{6}. \tag{18}$$

Melalui cara yang sama seperti mendapat (17), ekspansi Taylor dari $f(w_n)$ disekitar $w_n = x^*$ dan dengan menggunakan (18) serta mengabaikan suku yang memuat e_n berorde lebih besar dari tiga didapat

$$\begin{aligned} f(w_n) = \left(\frac{F_3}{6} + \frac{F_3F_1^2}{2} + \frac{2F_1F_3}{3} + \frac{2F_1F_3}{3} + \frac{F_2^2}{2} + \frac{F_3F_1^3}{6} + \frac{F_1F_2}{2}\right)e_n^3 \\ + \left(\frac{F_2}{2} + \frac{F_2F_1^2}{2} + \frac{3F_1F_2}{2}\right)e_n^2 + \left(F_1 + F_1^2\right)e_n. \end{aligned} \tag{19}$$

Selanjutnya untuk menghitung $\frac{f(x_n)f(x_n)}{f(w_n)-f(x_n)}$, dihitung terlebih dahulu $f(x_n)f(x_n)$ merupakan pembilang dan $f(w_n) - f(x_n)$ yang merupakan penyebut, didapat

$$f(x_n)f(x_n) = F_1e_n^3F_2 + F_1^2e_n^2, \tag{20}$$

dan

$$\begin{aligned} f(w_n) - f(x_n) = \left(\frac{F_3F_1^3}{6} + \frac{F_3F_1^2}{2} + \frac{F_1F_3}{3} + \frac{F_2^2}{2} + \frac{F_1F_2^2}{2}\right)e_n^3 \\ + \left(\frac{F_2F_1^2}{2} + \frac{3F_1F_2}{2}\right)e_n^2 + F_1^2e_n. \end{aligned} \tag{21}$$

Selanjutnya bagi pembilang (20) dan penyebut (21) dengan $F_1^2e_n$, diperoleh

$$\frac{f(x_n)f(x_n)}{F_1^2e_n} = \frac{e_n^2F_2}{F_1} + e_n \tag{22}$$

dan

$$\frac{f(w_n)-f(x_n)}{F_1^2 e_n} = 1+\left(\frac{F_1F_3}{6}+\frac{F_3}{2}+\frac{2F_3}{3F_1}+\frac{F_2^2}{2F_1^2}+\frac{F_2^2}{2F_1}\right)e_n^2 + \left(\frac{F_2}{2}+\frac{3F_2}{3F_1}\right)e_n. \tag{23}$$

Dengan bantuan deret geometri, dan menggunakan persamaan (22) dan persamaan (23) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f[x_n,w_n]} &= \frac{f^2(x_n)}{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)} \\ &= \left(\frac{F_2^2}{4}-\frac{F_3}{3F_1}-\frac{F_3}{2}+\frac{F_2^2}{2F_1}+\frac{F_2^2}{2F_1^2}-\frac{F_1F_3}{6}\right)e_n^3 \\ &\quad + \left(-\frac{F_2}{2}-\frac{F_2}{2F_1}\right)e_n^2+e_n. \end{aligned} \tag{24}$$

Kemudian substitusikan persamaan (24) ke persamaan (13), dan mengingat $x_n = x^* + e_n$ diperoleh

$$\begin{aligned} y_n = x^* &- \left(\frac{F_2^2}{4}-\frac{F_3}{3F_1}-\frac{F_3}{2}+\frac{F_2^2}{2F_1}+\frac{F_2^2}{2F_1^2}-\frac{F_1F_3}{6}\right)e_n^3 \\ &- \left(-\frac{F_2}{2}-\frac{F_2}{2F_1}\right)e_n^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Selanjutnya lakukan ekspansi Taylor terhadap $f(y_n)$ disekitar $y_n = x^*$ sampai orde tiga dan menggunakan persamaan (25), setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned} f(y_n) = &\left(\frac{F_3F_1^2}{6}-\frac{F_2^2}{2}+\frac{F_1F_3}{2}+\frac{F_3}{3}-\frac{F_2^2}{2F_1}-\frac{F_1F_2^2}{4}\right)e_n^3 \\ &+\left(\frac{1}{2}F_2+\frac{1}{2}F_1F_2\right)e_n^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Untuk menghitung $\frac{f(y_n)}{f(x_n)}$ digunakan persamaan (26) dan persamaan (17), maka dengan bantuan deret geometri diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n)}{f(x_n)} = &\left(\frac{F_4F_1^2}{24}-\frac{2F_2F_3}{3}+\frac{5F_2^3}{8F1}+\frac{5F_2^3}{4F_1^2}+\frac{5F_4}{24F_1}+\frac{F_1F_4}{6}+\frac{F_2^3}{8}\right. \\ &\left.+\frac{F_4}{4}-\frac{F_2F_1F_3}{6}+\frac{F_2^3}{F_1^3}-\frac{7F_2F_3}{6F_1}-\frac{2F_2F_3}{3F_1^2}\right)e_n^3 \\ &+\left(\frac{F_1F_3}{6}+\frac{F_3}{2}-\frac{3F_2^2}{4F_1^2}-\frac{3F_2^2}{4F_1}+\frac{F_3}{3F_1}-\frac{F_2^2}{4}\right)e_n^2 \\ &+\left(\frac{F_2}{2F_1}+\frac{F_2}{2}\right)e_n. \end{aligned} \tag{27}$$

Selanjutnya dihitung $\frac{f(x_n)}{f[x_n,w_n]}\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\left(1+2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)\right)$ dengan menggunakan persamaan (24) dan persamaan (27), diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f[x_n,w_n]}\left(1+\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\left(1+2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)\right) = \left(\frac{F2^2}{4F1}+\frac{F2^2}{4}\right)e_n^3 + e_n. \tag{28}$$

Kemudian substitusikan persamaan (28) ke persamaan (14), setelah penyederhanaan diperoleh

$$x_{n+1} = \left(-\frac{F_2^2}{4F_1}-\frac{F_2^2}{4}\right)e_n^3 + x^*. \tag{29}$$

Bila dinyatakan $x_{n+1} - x^* = e_{n+1}$ pada(29), dan mengambil nilai mutlak kedua ruas pada persamaan yang dihasilkan, maka didapat

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = \left|\frac{F_2^2}{4F_1}-\frac{F_2^2}{4}\right|$$

Dari definisi orde konvergensi [5, h.77] terlihat metode ini konvergen berorde tiga, maka teorema terbukti.□

3. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan banyak iterasi dari metode Newton (MN) persamaan (2), metode Steffensen (MS) persamaan (3), metode Dehghan-Hajarian (MDGH) persamaan (4)-(5) dan metode Iterasi Bebas Turunan (MIBT) persamaan (13)-(14) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

$f_1 = \sqrt{x^4+8}\,\sin(\frac{\pi}{x^2+2}) + \frac{x^3}{x^4+1} - \sqrt{6} + \frac{8}{17}$ $\quad x^* = -2.0$

$f_2 = \sqrt{x^2+2x+5} - 2\sin(x) - x^2 + 3$ $\quad x^* = 2,331967655883964$

$f_3 = \sin^{-1}(x^2-1) - (x/2) + 1$ $\quad x^* = 0.594810968398369$

$f_4 = x^5 + 23x - 6$ $\quad x^* = 0.260817090224163$

$f_5 = (1+\cos x)(e^x - 2)$ $\quad x^* = 0.693147180559945$

Perbandingan kelima contoh di atas menggunakan program MATLAB 5.3 dengan kriteria pemberhentian untuk setiap adalah

1. Jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
2. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari tolerasnsi yang diberikan.
3. Jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi.
4. Khusus untuk metode Newton ditambahkan dengan menguji apakah turunan pertama dari fungsi lebih kecil dari *eps*

Tabel 1: Perbandingan dari beberapa metode iterasi

Nomor Fungsi	x_0	Metode Iterasi				x^*
		MN	MS	MDGH	MIBT	
f_1	-2.5	5	4	3	3	-2.0
	-2.75	5	4	3	3	
	-1	5	5	4	3	
	-0.8	5	5	4	4	
	-0.6	5	4	4	3	
f_2	-1.0	7	6	4	4	2.331967655883964
	-1.5	6	6	4	5	
	-0.75	9	6	4	4	
	0.0	6	6	4	4	
	1.0	4	5	3	3	
f_3	0.85	4	5	4	4	0.594810968398369
	0.3	4	5	3	3	
	0.5	4	4	3	3	
	1	5	6	4	4	
	0.6	3	3	2	2	
f_4	-0.1	3	59	32	18	0.260817090224163
	0.4	3	8	5	4	
	0.5	3	24	14	9	
	0.1	3	7	5	4	
	0.0	3	20	11	8	
f_5	2.5	24	25	14	9	0.693147180559945
	0.9	4	5	3	3	
	0.5	4	5	4	3	
	0.7	3	3	2	2	
	0.6	4	4	3	3	

Hasil komputasi untuk setiap metode yang dibandingkan diberikan pada Tabel 1. Berdasarkan komputasi numerik, Tabel 1, tidak terlihat perbedaan yang cukup berarti antara MN, MS, MDGH dan MIBT baik dari segi iterasi maupun dari tingkat kesalahan (*error*). Secara keseluruhan untuk semua komputasi yang dilakukan metode Iterasi Bebas Turunan lebih cepat mencapai akar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2nd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & D. R. Shebert. 1999. *Introduction to Real Analysis, 3rd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Dehghan, M., & M. Hajarian. 2010. Some Derivative Free Quatratic and Cubic Konvergence Iterative Formulas for Solving Nonlinear Equation. *Computational and Applied Mathematics*, **29**. h. 19–31.

[4] Gautschi, W. 2011. *Numerical Analysis, Second Edition.* West Lafayette, Indiana.

[5] Mathews, J. H. 1987. *Numerical Method for Mathematical Science and Engineer.* Prentice-Hall International, U.S.A.

[6] Soleymani, F. & V. Hosseinabadi. 2011. New Third-and-Sixth-Order Derivative-Free Techniques for Nonlinear Equations. *Computational and Applied Mathematics*, **3**. h. 107–112.

[7] Samuer, T. 2006. *Numerical Analysis.* Pearson Education, Inc., Boston.