MEREDUKSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY PENUH DENGAN BILANGAN FUZZY TRAPESIUM

Tuti Susanti[1], **Mashadi**[2], **Sukamto**[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*tuti.susanti22@gmail.com

ABSTRACT

This paper discusses how to solve the equation of fully fuzzy linear system $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ with $\tilde{\boldsymbol{A}}$ as $n \times n$ fuzzy matrix, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ and $\tilde{\boldsymbol{b}}$ as $n \times 1$ fuzzy vectors, with the elements which is a trapezoidal fuzzy number developed from a paper by Kumar et al. [4]. For solving the equation of fully fuzzy linear system by spreading form $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ into $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \otimes (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}),$ so the equation of linear system $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is obtained. Next, this linear equation is solved by using elementary row operations that gives the solution of fully fuzzy linear system.

Keywords: *Fully fuzzy linear system, row reduced echelon form, trapezoidal fuzzy number.*

ABSTRAK

Kertas kerja ini membahas penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy penuh $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ dengan $\tilde{\boldsymbol{A}}$ adalah matriks fuzzy berukuran $n \times n,$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{b}}$ adalah vektor fuzzy berukuran $n \times 1,$ yang unsur-unsurnya merupakan bilangan fuzzy trapesium yang diperoleh dari sebuah kertas kerja oleh Kumar et al. [1]. Penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy penuh ini dilakukan dengan menguraikan $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ menjadi $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \otimes (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}),$ sehingga diperoleh bentuk sistem persamaan linear $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$ Selanjutnya sistem persamaan linear ini diselesaikan dengan menggunakan operasi baris elementer yang akan memberikan penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy penuh.

1. PENDAHULUAN

Konsep bilangan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh L.A Zadeh (1965). Sistem persamaan linear dengan sebagian atau seluruh unsur-unsur yang berada pada matriks $\boldsymbol{A}$, vektor $\boldsymbol{x}$ dan vektor $\boldsymbol{b}$ merupakan bilangan fuzzy menjadi suatu topik yang sangat menarik untuk dibahas, salah satu diantaranya adalah sistem persamaan linear fuzzy penuh *(fully fuzzy linear system*). Menurut Dehghan dan Hashemi [1] sistem persamaan linear fuzzy penuh merupakan sistem persamaan linear dengan unsur-unsur dari matriks dan vektornya berupa bilangan fuzzy. Secara umum ada dua macam bilangan fuzzy, yaitu bilangan fuzzy segitiga (*triangular fuzzy number*) dan bilangan fuzzy trapesium (*trapezoidal fuzzy number*).

Dalam tulisan ini, sistem persamaan linear yang akan dibahas adalah sistem persamaan linear fuzzy penuh yang setiap unsurnya adalah bilangan fuzzy trapesium. Bentuk umum sistem persamaan linear fuzzy penuh adalah $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ dengan $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ adalah matriks fuzzy yang berukuran $n \times n$ sedangkan $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{\boldsymbol{x}}_j)$ dan $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\tilde{\boldsymbol{b}}_i)$ adalah vektor fuzzy yang berukuran $n \times 1$. Dubois dan Prade dalam [2] telah menjelaskan beberapa rumus untuk operator perhitungan pada sistem persamaan linear fuzzy, sehingga sistem persamaan linear fuzzy penuh $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ dapat diselesaikan dengan berbagai metode.

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy penuh telah banyak dibahas, diantaranya menggunakan dekomposisi dari matriks koefisien [3] dan menggunakan metode langsung dan metode Cramer [5]. Dalam metode ini seluruh unsur-unsur matriks dan vektornya berupa bilangan fuzzy segitiga.

Dalam tulisan ini penulis membahas satu kasus menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy penuh $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ dengan seluruh unsur di dalamnya adalah bilangan fuzzy trapesium atau bilangan fuzzy dalam bentuk $(m, n, \sim, \ )$ dengan interval toleransi $[m, n]$, $\sim$ lebar sebelah kiri dan lebar sebelah kanan. Kajian ini merupakan kajian ulang yang mendetailkan kertas kerja kumar et al. pada [4].

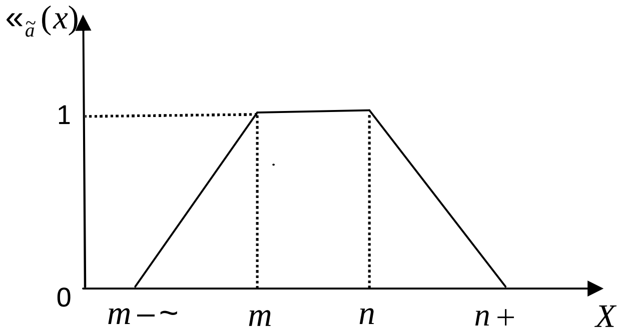
2. BILANGAN DAN MATRIKS FUZZY

Pada bagian ini dibahas konsep bilangan fuzzy trapesium dengan operasi aljabarnya serta matriks fuzzy yang mengacu pada [4].

Definisi 1. Bilangan fuzzy $\tilde{a} = (m, n, \sim, \ )$ dikatakan bilangan fuzzy trapesium dengan interval toleransi $[m, n]$, lebar sebelah kiri $\sim$ dan kanan jika memiliki fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m-x}{\alpha} & m-\alpha \le x \le m,\ \alpha > 0 \\ 1 & m \le x \le n \\ 1 - \dfrac{x-n}{\beta} & n \le x \le n+\beta,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Adapun bilangan fuzzy trapezium $\tilde{a} = (m, n, \alpha, \beta)$ digambarkan seperti tampak pada Gambar 1.



Gambar 1. Bilangan Fuzzy Trapesium.

Berikut ini beberapa konsep yang terkait dengan bilangan fuzzy trapesium menurut [4].

Definisi 2. Bilangan fuzzy trapesium $\tilde{a} = (m, n, \alpha, \beta)$ dengan $\tilde{a} > 0$ dikatakan bilangan fuzzy trapesium positif jika dan hanya jika $m - \alpha > 0$.

Definisi 3. Bilangan fuzzy trapesium $\tilde{a} = (m, n, \alpha, \beta)$ dengan $\tilde{a} < 0$ dikatakan bilangan fuzzy trapesium negatif jika dan hanya jika $m - \alpha < 0$.

Khusus untuk bilangan fuzzy $\tilde{a}$ dikatakan bilangan fuzzy nol jika $\tilde{a} = (0, 0, 0, 0)$. Dua buah bilangan fuzzy trapesium $\tilde{a}_1 = (m, n, \alpha, \beta)$ dan $\tilde{a}_2 = (p, q, \gamma, \delta)$ dikatakan sama jika dan hanya jika $m = p, n = q, \alpha = \gamma$ dan $\beta = \delta$.

Berikut diberikan operasi aljabar bilangan fuzzy trapesium dalam [4].

Misalkan terdapat bilangan fuzzy trapesium $\tilde{a}_1 = (m, n, \alpha, \beta)$ dan $\tilde{a}_2 = (p, q, \gamma, \delta)$ maka akan berlaku rumus sebagai berikut:

1. Penjumlahan (*addition*)

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = (m+p, n+q, \alpha+\gamma, \beta+\delta).$$

2. Lawan untuk bilangan fuzzy

$$-\tilde{a}_1 = -(m, n, \sim, \quad) = (-n, -m, \quad, \sim).$$

3. Perkalian (*multiplication*)

Jika $\tilde{a}_1 \geq 0$ dan $\tilde{a}_2 \geq 0$ maka

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = (mp, nq, m¥ + p\sim, n¢ + q \quad).$$

Berikut diberikan definisi matriks fuzzy dalam [4].

Definisi 4. Matriks $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}})$ dikatakan matriks fuzzy, jika setiap unsur dari $\tilde{\boldsymbol{A}}$ merupakan bilangan fuzzy.

Matriks $\tilde{\boldsymbol{A}}$ bernilai positif dinotasikan dengan $\tilde{\boldsymbol{A}} > 0$ dimana elemen-elemen $\tilde{\boldsymbol{A}}$ bernilai positif dan sebaliknya. Untuk $n \times n$ matriks fuzzy $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}} \quad)_{nn}$ maka $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}) = (a_{ij}, b_{ij}, \sim_{ij}, \quad_{ij})$ dengan notasi baru $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ dimana $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij}), \boldsymbol{M} = (\sim_{ij}), \boldsymbol{N} = (\quad_{ij})$.

Berikut dijelaskan mengenai definisi perkalian matriks fuzzy menurut [4].

Definisi 5. Misalkan $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}})$ dan $\tilde{\boldsymbol{B}} = (\tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{ij}})$ adalah matriks fuzzy yang berukuran $m \times n$ dan $n \times p$. Didefinisikan $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{C}} = (\tilde{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{ij}})$ adalah matriks $m \times p$ dengan

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{ij}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ik}} \otimes \tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{kj}}.$$

Matriks fuzzy $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ yaitu matriks fuzzy yang seluruh unsurnya merupakan bilangan fuzzy trapesium dapat diuraikan menjadi 4 komponen matriks. Karena matriks fuzzy $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ seluruh unsurnya merupakan bilangan fuzzy maka untuk menyelesaikan sistem persamaan ini digunakan sistem persamaan linear fuzzy penuh.

3. PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY PENUH

Sistem persamaan linear fuzzy penuh di dalam [5] didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6. Suatu sistem persamaan linear yang terdiri dari n persamaan linear dan n variabel-variabel yang tidak diketahui mempunyai bentuk umum

$$\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} = \tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{i}}, \qquad (1)$$

dengan $i = 1, 2, \cdots, n$, dapat dinotasikan dengan

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}, \tag{2}$$

dengan matriks fuzzy $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}})$ berukuran $n \times n$ dan vektor fuzzy $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{\boldsymbol{x}}_j)$ dan $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\tilde{\boldsymbol{b}}_i)$ berukuran $n \times 1$. Sistem ini dinamakan sistem persamaan linear fuzzy penuh.

Sebelum menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy penuh, terlebih dahulu menguraikan bentuk sistem persamaan linear fuzzy penuh $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ menjadi empat buah matriks yang unsur-unsur matriksnya adalah bilangan real, yaitu $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$. Selanjutnya, bentuk sistem persamaan linear fuzzy penuh pada persamaan (2) diuraikan menjadi empat buah sistem persamaan linear. Untuk lebih jelasnya, berikut akan dijelaskan proses menguraikan bentuk sistem persamaan linear fuzzy penuh $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$.

Matriks fuzzy $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}})_{nn}$ dimana $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}) = (a_{ij}, b_{ij}, \sim_{ij}, \;_{ij})$. Selanjutnya diasumsikan $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ sedemikian hingga didapat notasi baru $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij}), \boldsymbol{M} = (\sim_{ij}), \boldsymbol{N} = (\;_{ij})$, kemudian diasumsikan vektor fuzzy $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ dan $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ sehingga bentuk $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \otimes (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}). \tag{3}$$

Dengan menggunakan operasi perkalian dua buah bilangan fuzzy trapesium maka persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{By}, \boldsymbol{Az} + \boldsymbol{Mx}, \boldsymbol{Bw} + \boldsymbol{Ny}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}). \tag{4}$$

Dengan menggunakan kesamaan dua buah matriks fuzzy trapesium maka persamaan (4) dapat ditulis menjadi bentuk persamaan berikut.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{By} &= \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{Az} + \boldsymbol{Mx} &= \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{Bw} + \boldsymbol{Ny} &= \boldsymbol{k} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Selanjutnya dijelaskan langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy penuh dalam matriks bentuk eselon baris tereduksi dengan menggunakan operasi baris elementer.

Langkah 1. Setelah menguraikan sistem persamaan linear fuzzy penuh menjadi empat buah sistem persamaan linear, selanjutnya sistem persamaan linear ini akan dikembangkan menjadi matriks yang diperbesar. Matriks yang diperbesar tersebut terdiri dari $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}), (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} - \boldsymbol{Mx}), (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{Ny})$.

Langkah 2. Dari matriks yang diperbesar $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{B},\boldsymbol{g}), (\boldsymbol{A},\boldsymbol{h}-\boldsymbol{Mx}), (\boldsymbol{B},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Ny})$ akan dicari matriks eselon baris tereduksi. Untuk mencari matriks eselon baris tereduksi gunakan operasi baris elementer. Ada atau tidaknya penyelesaian dari sistem persamaan linear ini dapat ditentukan oleh rank dari matriks. Dalam hal ini ada 3 kasus, yaitu:

> **Kasus 1.** Jika rank ($\boldsymbol{A}$) $\neq$ rank $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ atau rank ($\boldsymbol{B}$) $\neq$ rank $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{g})$ maka sistem persamaan linear fuzzy penuh tidak konsisten artinya tidak ada penyelesaian positif.
>
> **Kasus 2.** Jika rank ($\boldsymbol{A}$) = rank $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ dan rank ($\boldsymbol{B}$) = rank $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{g})$ tapi ada paling sedikit satu anggota negatif pada kolom ke-$(n+1)$ dari matriks eselon baris tereduksi, maka sistem persamaan linear fuzzy penuh tidak konsisten artinya tidak ada penyelesaian positif.
>
> **Kasus 3.** Jika rank ($\boldsymbol{A}$) = rank $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ dan rank ($\boldsymbol{B}$) = rank $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{g})$ dan semua anggota pada kolom ke-$(n+1)$ dari matriks eselon baris tereduksi positif, maka sistem persamaan linear fuzzy penuh konsisten artinya ada penyelesaian positif. Dalam hal ini ada dua kasus:
>
> > **Kasus 3.a.** Jika rank ($\boldsymbol{A}$) = rank $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \neq n$ atau rank ($\boldsymbol{B}$) = rank $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{g}) \neq n$ maka sistem persamaan linear fuzzy penuh mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian dan penyelesaiannya positif.
> >
> > **Kasus 3.b.** Jika rank ($\boldsymbol{A}$) = rank $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = n$ dan rank ($\boldsymbol{B}$) = rank $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{g}) = n$ maka sistem persamaan linear fuzzy penuh mempunyai satu penyelesaian dan penyelesaiannya positif.

Jika pada langkah 2 terdapat kasus 3 maka dapat dilanjutkan ke langkah 3.

Langkah 3. Dari matriks eselon baris tereduksi diperoleh nilai $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{w}_i)$. Penyelesaian dari sistem persamaan linear fuzzy penuh dapat dinyatakan dengan $\tilde{x}_i = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{w}_i)$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

4. CONTOH NUMERIS

Diberikan sistem persamaan linear fuzzy penuh sebagai berikut.

$$\left.\begin{aligned} (3, 6, 2, 2)\tilde{\boldsymbol{x}}_1 \oplus (4, 6, 1, 2)\tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= (27, 66, 26, 58) \\ (4, 5, 1, 1)\tilde{\boldsymbol{x}}_1 \oplus (5, 8, 1, 2)\tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= (35, 70, 25, 55) \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Akan ditentukan penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy penuh dalam bentuk matriks fuzzy trapesium pada (6).

Dari proses penguraian sistem persamaan linear fuzzy penuh, diasumsikan bahwa $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ dengan $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij}), \boldsymbol{M} = (\sim_{ij}), \boldsymbol{N} = (\ _{ij})$ dan $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ dan $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$.

Sehingga bentuk soal pada (6) menjadi

$$\left.\begin{array}{r}(3, 6, 2, 2) \otimes (x_1, y_1, z_1, w_1) \oplus (4, 6, 1, 2) \otimes (x_2, y_2, z_2, w_2) = (27, 66, 26, 58) \\ (4, 5, 1, 1) \otimes (x_1, y_1, z_1, w_1) \oplus (5, 8, 1, 2) \otimes (x_2, y_2, z_2, w_2) = (35, 70, 25, 55)\end{array}\right\}.$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear fuzzy penuh ini adalah

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}_1 &= (x_1, y_1, z_1, w_1) \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= (x_2, y_2, z_2, w_2).\end{aligned}$$

Dari (6) diperoleh

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} (3, 6, 2, 2) & (4, 6, 1, 2) \\ (4, 5, 1, 1) & (5, 8, 1, 2) \end{pmatrix}.$$

Karena $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$, maka diperoleh matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dan vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 27 \\ 35 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 66 \\ 70 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 58 \\ 55 \end{pmatrix}.$

Dari matriks $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ dan vektor $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$, maka

Langkah 1. Membuat matriks yang diperbesar.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 27 \\ 4 & 5 & 35 \end{bmatrix},\ (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 66 \\ 5 & 8 & 70 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} - \boldsymbol{Mx}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 4 & 5 & 17 \end{bmatrix},\ (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{Ny}) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 36 \\ 5 & 8 & 39 \end{bmatrix}.$$

Langkah 2. Mencari matriks eselon baris tereduksi.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 27 \\ 4 & 5 & 35 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks yang diperbesar $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, diperoleh matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $\boldsymbol{x}_1 = 5,\ \ \boldsymbol{x}_2 = 3.$

Selanjutnya mencari matriks eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar

$$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 66 \\ 5 & 8 & 70 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks yang diperbesar $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}),$ diperoleh matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $\boldsymbol{y}_1 = 6,\ \ \boldsymbol{y}_2 = 5.$

Selanjutnya mencari matriks eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} - \boldsymbol{Mx}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 4 & 5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks yang diperbesar $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} - \boldsymbol{Mx})$ diperoleh matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $\boldsymbol{z}_1 = 3,\ \ \boldsymbol{z}_2 = 1.$

Terakhir, mencari matriks eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar

$$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{Ny}) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 36 \\ 5 & 8 & 39 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks yang diperbesar $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{Ny})$ diperoleh matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $\boldsymbol{w}_1 = 3,\ \ \boldsymbol{w}_2 = 3.$

Dari matriks $\boldsymbol{A}$ diperoleh rank $(\boldsymbol{A}) = 2,$ rank dari matriks $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$ dan rank dari matriks $\boldsymbol{B} = 2$, rank dari matriks $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{g}) = 2$ dan semua anggota pada kolom ketiga dari matriks eselon baris tereduksi positif. Maka berdasarkan kasus 3.b sistem persamaan linear fuzzy penuh ini konsisten, mempunyai satu penyelesaian dan penyelesaiannya positif. Sehingga diperoleh penyelesaian dari sistem persamaan linear fuzzy penuh pada persamaan (6) adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

atau

$$\boldsymbol{x}_1 = 5, \ \boldsymbol{x}_2 = 3, \ \boldsymbol{y}_1 = 6, \ \boldsymbol{y}_2 = 5, \ \boldsymbol{z}_1 = 3, \ \boldsymbol{z}_2 = 1, \ \boldsymbol{w}_1 = 3 \text{ dan } \boldsymbol{w}_2 = 3.$$

Langkah 3. Karena $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{z}, \ \boldsymbol{w})$ maka diperoleh penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy penuh sebagai berikut.

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = (5, \ 6, \ 3, \ 3) \text{ dan } \tilde{\boldsymbol{x}}_2 = (3, \ 5, \ 1, \ 3).$$

5. KESIMPULAN

Dari artikel ini dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan linear fuzzy penuh $\tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ yang unsur-unsurnya merupakan bilangan fuzzy trapesium, diselesaikan dengan menguraikan bentuk sistem persamaan linear fuzzy penuh menjadi $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \otimes (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}),$ sehingga diperoleh empat buah sistem persamaan linear seperti pada persamaan (5). Selanjutnya ada tiga langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear ini. Penyelesaian sistem persamaan linear ini ada jika rank $(\boldsymbol{A})$ = rank $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ dan semua anggota pada kolom ke-$(n+1)$ dari matriks eselon baris tereduksi positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dehghan, M & B. Hashemi. 2006. Solution of the Fully Fuzzy Linear Systems Using the Decomposition Procedure. *Applied Mathematics and Computation*. **182:** 1568-1580.

[2] Dubois, D & H. Prade. 1980. *Fuzzy Sets & Systems: Theory and Application*. Academic Press, New York.

[3] Handayani, E. 2011. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Fuzzy Penuh dengan Menggunakan Dekomposisi dari Matriks Koefisien. *SKRIPSI Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau*. Pekanbaru.

[4] Kumar, A., Neetu & A. Bansal. 2010. A New Method to Solve Fully Fuzzy Linear Systems with Trapezoidal Fuzzy Numbers. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics*. **1** (3): 45-56.

[5] Samsuri, M. 2010. Menentukan Penyelesaian Fuzzy yang Positif dan Memenuhi Sistem Persamaan Linear Fuzzy Penuh dengan Menggunakan Metode Langsung dan Metode Cramer. *SKRIPSI Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau*. Pekanbaru.