SEMIGRUP BEBAS DAN MONOID BEBAS PADA HIMPUNAN *WORD*

Novia Yumitha Sarie[1], Sri Gemawati[2], Rolan Pane[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*novia.yumitha@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper we discuss the characteristics of free semigroup and free monoid related to *word* set. The discussion begins with some homomorphism theorems and a criterion for freeness of semigroup and monoid. All characteristics of free semigroup and free monoid are expressed on some theorems. All discussions in this paper refer back to Harju [4].

Keywords: *Homomorphism Theorem, A Criterion For Freeness, Word Set.*

ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas sifat-sifat semigrup bebas dan monoid bebas yang himpunannya merupakan himpunan word. Pembahasan dimulai dengan pembuktian beberapa teorema homomorfisma dan kriteria bebas untuk semigrup dan monoid. Semua sifat semigrup bebas dan monoid dinyatakan dalam bentuk teorema. Semua pembahasan dalam artikel ini mengacu pada Harju [4].

1. PENDAHULUAN

Gagasan fundamental dari himpunan, pemetaan, operasi biner dan relasi biner sangat diperlukan untuk mempelajari struktur aljabar. Suatu struktur aljabar adalah himpunan tak kosong dimana terdapat sedikitnya satu relasi ekivalen dan satu atau lebih operasi biner yang dapat didefinisikan di dalamnya. Salah satu kasus struktur aljabar adalah semigrup.

Semigrup adalah suatu struktur aljabar dengan operasi biner yang bersifat asosiatif. Operasi biner pada semigrup S sering dinotasikan dengan $*$, yang memetakan tiap pasangan berurutan $(x, y) \in S \times S$ ke suatu elemen $x * y \in S$. Suatu semigrup yang mempunyai identitas disebut *monoid*.

Dalam [1] dan [4], misalkan diketahui S adalah sebarang semigrup dan X subsemigrup dari S yang membangun S secara bebas. Semigrup S

merupakan suatu semigrup bebas jika diketahui suatu pemetaan yang dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma yang berlaku pada semigrup tersebut. Dengan konsep yang sama, dapat dibentuk pula suatu monoid bebas. Dalam karya tulis ini diperkenalkan suatu himpunan *word* yang anggotanya disebut *letter*, kemudian menguraikan sifat-sifat semigrup bebas dan monoid bebas dalam bentuk himpunan *word*, yang diambil dari buku yang berjudul "*Lecture Notes on Semigroups*" karangan Tero Harju [4].

2. SEMIGRUP DAN SEMIGRUP BEBAS

Konsep-konsep yang dibahas dalam karya tulis ini merupakan materi-materi pendukung yang diambil dari beberapa referensi yaitu [3], [5] dan [6].

Definisi 1 (Himpunan) Himpunan adalah suatu kumpulan objek, baik kongkrit maupun abstrak, dengan syarat keanggotaan tertentu. Objek-objek dalam himpunan tersebut dinamakan anggota atau elemen himpunan.

Definisi 2 (Operasi Biner) Diketahui S suatu himpunan tak kosong. Suatu operasi biner pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ menuju S, ditulis $* : S \times S \to S$. Untuk pasangan $(a,b) \in S \times S$ dengan $a,b \in S$, peta pemetaan ini disebut hasil operasi biner dan dinotasikan dengan $a * b$.

Definisi 3 (Relasi Biner) Suatu relasi pada himpunan tak kosong A adalah himpunan tak kosong R dari pasangan berurutan (a,b) dengan $a,b \in A$. Jika pasangan (a,b) terdapat dalam R, maka ditulis aRb dan dikatakan a berelasi R dengan b.

Definisi 4 (Relasi Ekivalen) Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi ekivalen jika memenuhi sifat-sifat berikut :

- Refleksif ; yaitu, untuk setiap $x \in A$ berlaku xRx,
- Simetris ; yaitu, untuk setiap $x, y \in A$ jika xRy maka yRx,
- Transitif ; yaitu, untuk setiap $x, y, z \in A$, jika xRy dan yRz maka xRz.

Dalam [2] konsep semigrup dan monoid diberikan sebagai berikut.

Definisi 5 (Semigrup) Misalkan S suatu himpunan dan $* : S \times S \to S$ adalah operasi biner yang memetakan tiap pasangan $(x, y) \in S \times S$ ke suatu elemen $x * y \in S$. Himpunan S adalah suatu semigrup dengan operasi $*$ didefinisikan di dalamnya, biasanya dinotasikan dengan $(S,*)$ atau dengan S saja, jika operasi $*$ memenuhi sifat asosiatif, yakni untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku :

$$x * (y * z) = (x * y) * z .$$

Definisi 6 (Subsemigrup) Untuk suatu subhimpunan $X \subseteq S$ dengan $X \neq \emptyset$ didefinisikan

$$[X]_S = \{x_1 x_2 ... x_n ... \mid n \geq 1, x_i \in X\},$$

dimana $[X]_S$ adalah subsemigrup dari S, dan dikatakan sebagai subsemigrup yang dibangun oleh X.

Definisi 7 (Monoid) Monoid adalah semigrup yang mempunyai elemen identitas. Secara umum dalam [4] monoid S' didefinisikan sebagai berikut:

$$S' = \begin{cases} S & \text{jika } S \text{ suatu monoid,} \\ S \cup \{e\} & \text{jika } S \text{ bukan monoid,} \end{cases}$$

dengan e adalah elemen identitasnya.

Dalam [4] konsep kongruen, semigrup kuosien dan sifat homomorfisma diberikan sebagai berikut.

Definisi 8 (Kongruen) Suatu relasi ekivalen R pada semigrup S dikatakan kongruen kiri jika $xRy \Rightarrow (zx)R(zy)$ untuk setiap $x, y, z \in S$ dan dikatakan kongruen kanan jika $xRy \Rightarrow (xz)R(yz)$ untuk setiap $x, y, z \in S$. Jika relasi R kongruen kiri dan kanan, maka R dikatakan kongruen di S.

Definisi 9 (Semigrup Kuosien) Misalkan R suatu kongruen pada semigrup $(S,*)$ dan misalkan $S/R = \{xR : x \in S\}$ adalah himpunan semua kelas kongruensi dari R. Semigrup kuosien dengan domain S/R didefinisikan sebagai berikut:

$$xR * yR = (x * y)R \text{ untuk setiap } x, y \in S.$$

Definisi 10 (Homomorfisma) Misalkan diketahui sebarang semigrup $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$. Pemetaan $f : S \to P$ dikatakan suatu homomorfisma jika $f(x * y) = f(x) \oplus f(y)$ untuk setiap $x, y \in S$.

Definisi 11 Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup. Jika terdapat suatu homomorfisma $\sim : S \to P$, maka :

1. Jika $\sim$ bersifat injektif, maka $\sim$ merupakan suatu *monomorfisma*.
2. Jika $\sim$ bersifat surjektif, maka $\sim$ merupakan suatu *epimorfisma*.
3. Jika $\sim$ bersifat bijektif, maka $\sim$ merupakan suatu *isomorfisma*.

Dalam [1] konsep restriksi, semigrup bebas dan himpunan *word* diberikan sebagai berikut.

Definisi 12 (Restriksi) Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup. Untuk suatu pemetaan $\sim : S \to P$ notasikan $\tilde{}|_X$ sebagai restriksi dari $\sim$ ke subhimpunan $X \subseteq S$, yakni, $\tilde{}|_X : X \to P$ yang didefinisikan dengan

$$(\tilde{}|_X)(x) = \sim(x) \quad \text{dengan } x \in X.$$

Definisi 13 (Semigrup Bebas) Misalkan diketahui S sebarang semigrup. Himpunan bagian $A \subseteq S$ membangun S secara bebas jika terdapat pemetaan $\sim_0 : A \to P$, dengan P sebarang semigrup, yang dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma $\sim : S \to P$ sehingga $\tilde{}|_A = \sim_0$. Maka S dikatakan suatu semigrup bebas dan pemetaan $\sim$ dikatakan sebagai perluasan homomorfisma dari pemetaan $\sim_0$.

Definisi 14 (Himpunan *Word*) Misalkan A adalah suatu himpunan alfabet yang anggotanya disebut *letter*/huruf. Sebarang barisan hingga dari *letter* disebut *word* dari A. Himpunan semua *word* dari A, sedikitnya satu *letter*, dinotasikan dengan A^+. Tiap elemen dari A^+ mempunyai panjang sedikitnya satu *letter* dan sebanyak-banyaknya adalah tak hingga.

Contoh Misalkan diketahui himpunan alfabet $A = \{a, b\}$, maka himpunan *word* dari A adalah :

$$A^+ = \{a, b, ab, ba, aa, bb, aaa, aab, ...\}.$$

Dalam [5], teorema homomorfisma, teorema kernel, teorema monomorfisma dan teorema fundamental homomorfisma diberikan sebagai berikut.

Teorema 1 Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup dan pemetaan $\sim : S \to P$ adalah suatu homomorfisma, jika $X \subseteq S$, maka $\sim\left([X]_S\right) = \left[\sim\left(X\right)\right]_P$.
Bukti Dapat dilihat pada **[4].** ■

Teorema 2 Misalkan $(S,*), (P,\oplus)$ dan $(T,\otimes)$ sebarang semigrup. Jika pemetaan $\sim : S \to P$ dan $: P \to T$ adalah suatu homomorfisma, maka pemetaan $\circ \sim : S \to T$ juga suatu homomorfisma.
Bukti Dapat dilihat pada **[4].** ■

Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup. Untuk suatu homomorfisma $\sim : S \to P$, didefinisikan relasi kernelnya sebagai berikut:

$$\ker(\sim) = \{(x, y) \mid \sim(x) = \sim(y)\} \text{ dengan } x, y \in S .$$

Teorema 3 Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup. Untuk suatu homomorfisma $\sim : S \to P$, $\ker(\sim)$ adalah kongruen di S.
Bukti Dapat dilihat pada **[4].** ■

Teorema 4 Misalkan $(S,*)$ suatu semigrup dengan R kongruen di S. Pemetaan ¥ $: S \to S/R$ yang didefinisikan dengan

$$¥(x) = xR \text{ dengan } x \in S,$$

merupakan suatu epimorfisma.

Bukti R kongruen di S, maka untuk setiap $x, y \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} ¥(x * y) &= (x * y)R \\ &= (xR) * (yR) \\ &= ¥(x) * ¥(y) \end{aligned}$$

Maka ¥ adalah suatu homomorfisma.

Kemudian, ambil sebarang $u = xR \in S/R$, maka terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $¥(x) = u$. Karena u sebarang elemen dalam S/R, maka pemetaan ¥ surjektif. Pemetaan ¥ adalah suatu homomorfisma dan bersifat surjektif, maka ¥ adalah suatu epimorfisma. ■

Teorema 5 Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup dan terdapat suatu homomorfisma $\sim : S \to P$. Terdapat suatu monomorfisma tunggal $: S/\ker(\sim) \to P$ sehingga diagram pada Gambar 1 berlaku.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "¥"'] & & P \\ & S/\ker(\sim) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Gambar 1. Diagram komutatif $\sim\, = \ \circ ¥$

Bukti Misalkan $R = \ker(\sim)$ dan $¥ : S \to S/R$ adalah suatu homomorfisma. Definisikan $: S/R \to P$ dengan

$$(xR) = \sim(x) \quad \text{untuk setiap } x \in S.$$

terdefinisi dengan baik, yakni untuk setiap $x, y \in S$, pilih $xR = yR$ dengan $(x, y) \in \ker(\sim)$. Maka,

$$(x, y) \in \ker(\sim) \Rightarrow \sim(x) = \sim(y) \Rightarrow \ (xR) = \ (yR).$$

Tiap (xR) mempunyai nilai tertentu di P, yang secara independen merepresentasikan kelas kongruensi xR.

Kemudian,

$$\begin{aligned} (xR * yR) &= \ ((x * y)R) \\ &= \sim(x * y) \\ &= \sim(x) \oplus \sim(y) \\ &= \ (xR) \oplus \ (yR). \end{aligned}$$

Maka, merupakan suatu homomorfisma.

Selanjutnya, untuk setiap $(x, y) \in \ker(\sim)$ berlaku :

$$\sim(x) = \sim(y) \Rightarrow \ (xR) = \ (yR).$$

Tiap pemetaan (xR) memasangkan secara tunggal $\sim(x)$ dengan $x \in S$. Maka (xR) merupakan pemetaan injektif. Misalkan terdapat $¢ : S/R \to P$ sebarang monomorfisma yang lainnya, maka $\sim\, = ¢ \circ ¥$, dan $\sim(x) = ¢(xR)$ untuk setiap $x \in S$. Namun ini berarti bahwa $¢ = \ $. Jadi, pemetaannya adalah tunggal. ■

Teorema 6 (Teorema Fundamental Homomorfisma) Misalkan $(S,*)$ dan $(P,\oplus)$ sebarang semigrup dan terdapat suatu homomorfisma $\sim : S \to P$ dengan $\ker(\sim)$ kongruen di S. Maka $S/\ker(\sim)$ isomorfik dengan P.

Bukti Dari Teorema 5, terdapat suatu monomorfisma tunggal $: S/\ker(\sim) \to P$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan juga surjektif sehingga merupakan suatu isomorfisma.

Dari Teorema 4, pemetaan $¥ : S \to S/R$ merupakan suatu epimorfisma. Ambil sebarang $y \in P$ dengan $\sim(x) = y$. Diagram komutatif pada Gambar 1 berlaku, maka :

$$(\quad \circ ¥)(x) = \sim(x)$$
$$(¥(x)) = y$$
$$(u) = y$$

Untuk setiap $y \in P$ terdapat $u \in S/R$ sedemikian hingga $(u) = y$. Jadi, pemetaan surjektif. Karena merupakan suatu monomorfisma dan juga bersifat surjektif, maka merupakan suatu isomorfisma. ■

3. SEMIGRUP *WORD* BEBAS

Pada himpunan A^+, didefinisikan operasi biner $*$ sebagai suatu rangkaian berurutan (*catenation*) dari elemen-elemen A. Operasi rangkaian pada A^+ diilustrasikan sebagai berikut: Untuk setiap $a_i, b_j \in A$, terdapat elemen $w_1, w_2 \in A^+$, dengan $w_1 = a_1a_2...a_m$ dan $w_2 = b_1b_2...b_n$, $m, n \geq 1$, yang memenuhi:

$$w_1 * w_2 = (a_1a_2...a_m) * (b_1b_2...b_n) = a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n = w_1w_2 .$$

Karena operasi biner $*$ pada A^+ merupakan suatu rangkaian berurutan (*catenation*) dari elemen-elemennya, maka sifat asosiatif berlaku, yakni untuk setiap $w_1, w_2, w_3 \in A^+$, dengan $w_3 = c_1c_2...c_p$ dan $c_k \in A$, $k \geq 1$, diperoleh:

$$\begin{aligned} w_1 * (w_2 * w_3) &= a_1a_2...a_m * (b_1b_2...b_n * c_1c_2...c_p) \\ &= a_1a_2...a_m * (b_1b_2...b_nc_1c_2...c_p) \\ &= a_1a_2...a_mb_1b_2...b_nc_1c_2...c_p) \\ &= (a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n) * c_1c_2...c_p \\ &= (a_1a_2...a_m * b_1b_2...b_n) * c_1c_2...c_p \\ &= (w_1 * w_2) * w_3 . \end{aligned}$$

Maka, A^+ merupakan suatu semigrup.

Misalkan terdapat sebarang semigrup $(S, *)$ dan sebarang pemetaan $\sim_0 : A \to S$. Karena A membangun A^+, maka dapat didefinisikan suatu homomorfisma $\sim : A^+ \to S$ dengan :

$$\begin{aligned} \sim(w_1) &= \sim(a_1a_2...a_m) \\ &= \sim_0(a_1) * \sim_0(a_2) * ... * \sim_0(a_m) \end{aligned}$$

Karena restriksi $\tilde{}|_A = \sim_0$ terpenuhi maka dari Definisi 12, himpunan A^+ merupakan suatu semigrup bebas.

Teorema 7 Misalkan A^+ semigrup bebas pada himpunan alfabet A, dengan R_0 sebarang relasi pada A^+, R kongruen di A^+ yang dibangun oleh R_0 dan $\ddot{} : A^+ \to A^+/R$ suatu homomorfisma. Misalkan pula $(S, *)$ sebarang semigrup, dan $\sim : A^+ \to S$ suatu homomorfisma dengan $\sim(u) = \sim(v)$ untuk setiap $(u,v) \in R_0$. Maka terdapat suatu homomorfisma $^- : A^+/R \to S$ sehingga berlaku $^- \circ \ddot{} = \sim$.

Bukti Dari hipotesis teorema, pemetaan $\sim : A^+ \to S$ adalah suatu homomorfisma dengan $\sim(u) = \sim(v)$ untuk setiap $(u,v) \in R_0$. Maka $R_0 \subseteq \sim \circ \sim^{-1}$. Karena R adalah kongruen terkecil di A^+ yang memuat R_0, dan $\sim \circ \sim^{-1}$ adalah kongruen, maka $R \subseteq \sim \circ \sim^{-1}$, sehingga untuk setiap $(w_1, w_2) \in R$ diperoleh $\sim(w_1) = \sim(w_2)$.

Kemudian definisikan pemetaan $^- : A^+/R \to S$ dengan

$$^-(\ddot{} (w)) = \sim(w), \text{ untuk setiap } w \in A^+.$$

$\ddot{}$ terdefinisi dengan baik, yakni untuk setiap $w_1, w_2 \in A^+$ dengan $(w_1, w_2) \in R$, pilih $\ddot{}(w_1) = \ddot{}(w_2)$, maka

$$\begin{aligned} ^-(\ddot{}(w_1)) &= \sim(w_1) \\ &= \sim(w_2) \\ &= {}^-(\ddot{}(w_2)) \end{aligned}$$

Domain $^-$ adalah semua elemen di A^+/R karena setiap elemen di A^+/R mempunyai bentuk wR dengan $w \in A^+$. Maka $^- \circ \ddot{} = \sim$ terpenuhi.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $^-$ suatu homomorfisma. Untuk sebarang elemen $w_1, w_2 \in A^+$, diperoleh

$$\begin{aligned} ^-\big((\ddot{}(w_1))(\ddot{}(w_2))\big) &= {}^-((w_1 w_2)R) \\ &= \sim(w_1 w_2) \\ &= \sim(w_1) * \sim(w_2) \\ &= {}^-(\ddot{}(w_1)) * {}^-(\ddot{}(w_2)) \end{aligned}$$

Maka $^-$ adalah suatu homomorfisma. ■

Teorema 8 Untuk setiap semigrup $(S,*)$ terdapat suatu himpunan alfabet A dan suatu epimorfisma $\cdot : A^+ \to S$.

Bukti Misalkan X sebarang himpunan yang membangun S, pilih $X = S$ dan A suatu himpunan alfabet dengan $|A| = |X|$, dan misalkan pemetaan $\cdot_0 : A \to X$ adalah suatu pemetaan bijektif. Dari Definisi 12, $\cdot_0$ mempunyai suatu perluasan homomorfisma $\cdot : A^+ \to S$. Karena $[\cdot(X)]_S = \cdot([X]_S) = \cdot(S)$, maka pemetaan $\cdot$ surjektif. $\cdot$ adalah suatu homomorfisma surjektif, sehingga $\cdot$ merupakan suatu epimorfisma. ■

Teorema 9 Setiap semigrup isomorfik dengan suatu semigrup *word* kuosien. Yakni, untuk suatu epimorfisma $\cdot : A^+ \to S$ maka S isomorfik dengan $A^+/\ker(\cdot)$.

Bukti Dari Teorema 5, dalam bentuk himpunan *word* dapat dibuat diagram komutatifnya seperti terlihat pada Gambar 2.

$$\begin{tikzcd} A^{+} \arrow[rr, "\cdot"] \arrow[dr, "¥"'] & & S \\ & A^{+}/\ker(\cdot\ ) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Gambar 2. Diagram komutatif $\cdot\ = \ \ \circ ¥$

Terdapat suatu monomorfisma tunggal $\ : A^{+}/\ker(\cdot\ ) \to S$. Dari Teorema 4, pemetaan $¥ : A^{+} \to A^{+}/R$ merupakan suatu epimorfisma dan dari Teorema 8, pemetaan $\cdot\ : A^{+} \to S$ juga merupakan suatu epimorfisma. Ambil sebarang $y \in S$ dengan $\cdot\ (x) = y$. Diagram komutatif pada Gambar 2 berlaku, maka:

$$(\ \ \circ ¥)(x) = \cdot\ (x)$$
$$(¥(x)) = y$$
$$(u) = y$$

Untuk setiap $y \in S$ terdapat $u \in S/R$ sedemikian hingga $(u) = y$. Maka pemetaan surjektif. Karena merupakan suatu monomorfisma dan juga bersifat surjektif, maka merupakan suatu isomorfisma. ■

Teorema 10 Suatu semigrup S adalah bebas jika dan hanya jika S isomorfik ke suatu semigrup *word* A^{+} untuk suatu alfabet A.

Bukti $(\Rightarrow)$ Misalkan S dibangun secara bebas oleh suatu subhimpunan $X \subseteq S$, dan A adalah suatu himpunan alfabet dengan $|A| = |X|$ dan misalkan pemetaan $\cdot_{0} : A \to X$ adalah suatu pemetaan bijektif. Karena A membangun A^{+} secara bebas, maka dari Teorema 3.2 terdapat suatu perluasan epimorfisma $\cdot\ : A^{+} \to S$. Pemetaan $\cdot_{0}^{-1} : X \to A$ juga merupakan suatu pemetaan bijektif, yang memiliki perluasan epimorfisma $\ : S \to A^{+}$. Komposisi $\ \circ \cdot\ : A^{+} \to A^{+}$ adalah suatu epimorfisma, dimana

$$^{\circ\cdot}\ |_{A} = \ \ \circ \cdot_{0} = (\ \ |_{X}) \circ \cdot_{0} = \cdot_{0}^{-1} \circ \cdot\ \ = §_{A}.$$

Kemudian, pemetaan $§_{A} : A \to A$ diperluas secara tunggal ke suatu homomorfisma $§_{A^{+}} : A^{+} \to A^{+}$, dan oleh karena itu $^{\circ\cdot}\ |_{A}$ juga diperluas secara tunggal ke $§_{A^{+}}$, yakni, $\ \circ \cdot\ \ = §_{A^{+}}$. Maka $\ = \cdot^{-1}$ dan $\cdot$ suatu bijeksi, sehingga $\cdot$ suatu isomorfisma.

$(\Leftarrow)$ Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa jika S isomorfik ke suatu semigrup *word* A^{+} untuk suatu alfabet A, maka S adalah suatu semigrup bebas. Misalkan terdapat suatu isomorfisma $\cdot : A^+ \to S$. Maka $S = \left[\cdot\ (A)\right]_S$, dan $\cdot$ mempunyai pemetaan invers $\cdot^{-1} : S \to A^+$, yang juga merupakan suatu isomorfisma.

Notasikan $\cdot_0 = {}^{\cdot}\,|_A$ dan $X = \cdot\,(A)$. Misalkan P sebarang semigrup, dan $\sim_0 : X \to P$ suatu pemetaan yang dapat diperluas secara tunggal ke suatu homomorfisma $¥ : A^+ \to P$. Kemudian, notasikan pemetaan $\ = ¥ \circ \cdot^{-1} : S \to P$. Dari Teorema 2, pemetaan adalah suatu homomorfisma, sehingga untuk setiap $x \in X$,

$$(x) = ¥(\cdot^{-1}(x)) = \sim_0 \circ \cdot_0 \circ \cdot_0^{-1}(x) = \sim_0(x)$$

dan oleh karena itu $|_X = \sim_0$, yakni, adalah suatu perluasan homomorfisma dari $\sim_0$. Dari Definisi 12, S dibangun secara bebas oleh X. ■

Misalkan S suatu semigrup. Elemen $s \in S$ dikatakan *decomposable* (dapat diurai) jika terdapat elemen $s_1, s_2 \in S$ sehingga $s = s_1 s_2$. Himpunan semua elemen *decomposable* dari S dinotasikan dengan :

$$S^2 = S \cdot S = \{s_1 s_2 : s_1, s_2 \in S\}$$

Kemudian, didefinisikan $Basis(S)$ sebagai himpunan semua elemen $x \in S$ yang membangun S, yakni :

$$Basis(S) = S \setminus S^2 = \{x \neq yz : x, y, z \in S\}$$

Teorema 11 Suatu semigrup S adalah bebas jika dan hanya jika $Basis(S)$ membangun S secara bebas.

Bukti $(\Rightarrow)$ Misalkan X subsemigrup yang membangun S secara bebas dengan elemen-elemen berupa *letter*. Karena tiap elemen X adalah *letter* yang panjangnya satu dari elemen-elemen X yang ada dan tiap elemen S^2 panjangnya sekurang-kurangnya dua, maka $X \subseteq S \setminus S^2$. Selanjutnya, karena sebarang elemen S yang merupakan perkalian dua atau lebih elemen X termasuk S^2, maka $S \setminus S^2 \subseteq X$. Jadi $S \setminus S^2 = X$, yang berarti bahwa $Basis(S)$ membangun S secara bebas.

$(\Leftarrow)$ Kemudian, misalkan $Basis(S)$ membangun S secara bebas. Maka terdapat sebarang semigrup P dan pemetaan $\sim_0 : Basis(S) \to P$ yang dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma $\sim : S \to P$ sedemikian hingga ${}^{\sim}|_{Basis(S)} = \sim_0$. Dari Definisi 12, S merupakan suatu semigrup bebas. ■

4. MONOID *WORD* BEBAS

Dari Definisi 7, Monoid adalah semigrup yang mempunyai elemen identitas. Secara umum dalam [4] monoid S' didefinisikan sebagai berikut :

$$S' = \begin{cases} S & \text{jika } S \text{ suatu monoid,} \\ S \cup \{e\} & \text{jika } S \text{ bukan monoid,} \end{cases}$$

dengan e adalah elemen identitasnya.

Definisi 15 Suatu monoid S' dikatakan monoid bebas jika dibangun secara bebas oleh suatu subhimpunan X dengan $e_{S'} \notin X$. Jika $X \cup \{e_{S'}\}$ adalah himpunan generator untuk S', dan terdapat pemetaan $\sim_0 : X \to P$, dengan P sebarang monoid, yang dapat diperluas ke suatu homomorfisma $\sim : S' \to P$ sehingga $\tilde{}|_X = \sim_0$ dan $\sim(e_{S'}) = e_P$. Maka S' bebas dan pemetaan $\sim$ dikatakan sebagai perluasan homomorfisma dari pemetaan $\sim_0$.

Himpunan barisan hingga dari *letter-letter* A dan memuat identitasnya dinotasikan dengan A^*. Sama halnya dengan himpunan A^+, pada himpunan A^* operasi biner $*$ didefinisikan sebagai suatu rangkaian berurutan (*catenation*) dari elemen-elemennya. Elemen identitasnya dinotasikan dengan e_{A^*}. Sehingga, A^* merupakan suatu monoid.

Jika $e_{A^*} \notin A$, maka $A \cup \{e_{A^*}\}$ merupakan himpunan generator untuk A^*. Misalkan terdapat sebarang monoid S' dan sebarang pemetaan $\sim_0 : A \to S'$. Untuk sebarang $w_1 = a_1 a_2 ... a_m \in A^*$ dengan $a_i \in A$, dapat didefinisikan suatu homomorfisma $\sim : A^* \to S'$ dengan

$$\begin{aligned} \sim(w_1) &= \sim(a_1 a_2 ... a_m) \\ &= \sim_0(a_1) * \sim_0(a_2) * ... * \sim_0(a_m) \end{aligned}$$

Restriksi $\tilde{}|_A = \sim_0$ terpenuhi dan $\sim(e_{A^*}) = e_{S'}$, maka himpunan A^* merupakan suatu monoid bebas.

Dalam [2] dan [4] teorema-teorema yang berkaitan dengan monoid bebas diberikan sebagai berikut.

Teorema 12 Jika S semigrup bebas, maka S' adalah monoid bebas.

Bukti Dengan menggunakan Definisi 12 dan Definisi 14, maka pembuktian Teorema 12 pun terpenuhi. ■

Teorema 13 Suatu monoid S' adalah monoid bebas jika dan hanya jika $S' \backslash \{e_{S'}\}$ adalah suatu semigrup bebas.

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan S' suatu monoid bebas yang dibangun secara bebas oleh X dengan $e_{S'} \notin X$. Maka $S' \backslash \{e_{S'}\}$ adalah subsemigrup dari S', dimana $e_{S'} = x_1 x_2 ... x_n ...$ dengan $x_i \in X$. Misalkan pula terdapat pemetaan $\sim_0 : X \to A^*$ yang dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma $\sim : S' \backslash \{e_{S'}\} \to A^*$ sedemikian hingga $\tilde{}|_X = \sim_0$. Dari Definisi 12, $S' \backslash \{e_{S'}\}$ adalah suatu semigrup bebas.

($\Leftarrow$) Selanjutnya, misalkan $S' \backslash \{e_{S'}\}$ adalah suatu semigrup bebas. Terdapat sebarang semigrup A^+ dan pemetaan $\sim_0 : X \to A^+$ yang dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma $\sim : S'\backslash\{e_{S'}\} \to A^+$ sedemikian hingga $\tilde{}|_X = \sim_0$. Kemudian, elemen identitas $\{e_{S'}\}$ dapat ditulis sebagai $e_{S'} = x_1 x_2 ... x_n ...$ dengan $x_i \in X$, dimana

$$\begin{aligned} \sim(e_{S'}) &= \sim(x_1 x_2 ... x_n ...) \\ &= \sim(x_1) * \sim(x_2) * ... * \sim(x_n) * ... \end{aligned}$$

yang juga memenuhi sifat homomorfisma. Oleh karena itu, pemetaan $\sim_0 : X \to A^*$, dimana A^* adalah suatu monoid, dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma $\sim : S' \to A^*$ sedemikian hingga $\tilde{}|_X = \sim_0$ dengan $\sim(e_{S'}) = e_{A^*}$. Maka S' merupakan suatu monoid bebas. ■

Teorema 14 Suatu monoid S' bebas jika dan hanya jika S' isomorfis ke monoid *word* bebas A^* untuk suatu alfabet A.

Bukti. Dengan menggunakan Definisi 14 dan pembuktian Teorema 10, maka pembuktian Teorema 14 pun terpenuhi. ■

5. KESIMPULAN

Dari artikel ini dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Suatu semigrup dapat diidentifikasi apakah semigrup tersebut dibangun secara bebas atau tidak berdasarkan sifat-sifat bebasnya,
2. Hubungan antara suatu semigrup *word* bebas dengan sebarang semigrup dapat diidentifikasi berdasarkan jenis pemetaan yang berlaku di antara kedua semigrup tersebut,
3. Dari suatu semigrup *word* bebas dapat dibangun suatu monoid *word* bebas dengan menambahkan elemen identitas pada semigrup *word* bebas tersebut. Hal ini juga berlaku untuk semigrup bebas biasa.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Clifford, A. H. & G. B. Preston. 1961. *The Algebraic Theory of Semigroups Volume I.* American Mathematical Society, USA.

[2] Clifford, A. H. & G. B. Preston. 1967. *The Algebraic Theory of Semigroups Volume II.* American Mathematical Society, USA.

[3] Gilbert, J. & Linda Gilbert. 1992. *Element of Modern Algebra, Third Edition*. PWS-KENT, USA.

[4] Harju, T. 1996. *Lecture Notes on Semigroups*. University of Turku, Finland.

[5] Judson, T. W. 1997. *Abstract Algebra Theory and Applications.* Stephen F. Austin State University, USA.

[6] Setiawan, A. 2011. *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring).* FMIPA Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.