PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY TRAPESIUM

Aristina Yulianty[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*aristina.yulianty@yahoo.com

ABSTRACT

In this expository paper we discuss the solution of trapezoidal fuzzy linear system $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ with $\tilde{\boldsymbol{x}}$ and $\tilde{\boldsymbol{y}}$ which the vectors of trapezoidal fuzzy numbers developed from a paper by Nasseri and Gholami [3]. The first step for solving the solution is to change the $\tilde{\boldsymbol{y}}$ variable in the form of triangular fuzzy numbers so that the parameters from triangular fuzzy numbers obtained. The next step is to change $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$ into $2n \times 2n$ matrix $\boldsymbol{S}$ and by using the inverse method, so that the triangular fuzzy solution obtained is changed to the trapezoidal fuzzy solution.

Keywords: *Fuzzy linear system, trapezoidal fuzzy linear system, trapezoidal fuzzy numbers, triangular fuzzy numbers.*

ABSTRAK

Kertas kerja ini membahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy trapesium $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ dengan $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{y}}$ merupakan vektor fuzzy trapezium yang diperoleh dari kertas kerja oleh Nasseri dan Gholami [3]. Langkah menyelesaikannya diawali dengan mengubah variabel $\boldsymbol{y}$ ke dalam bentuk bilangan fuzzy segitiga sehingga diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter. Selanjutnya merubah matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ menjadi matriks $\boldsymbol{S}$ berukuran $2n \times 2n$ dan dengan menggunakan metode invers sehingga didapat penyelesaian fuzzy segitiga yang diubah menjadi penyelesaian fuzzy trapesium.

1. PENDAHULUAN

Dalam aljabar linear sering dihadapkan kepada persoalan mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Friedman dalam [2]. Bentuk umum dari sistem persamaan linear fuzzy adalah $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}$ dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang berukuran $n \times n$ sedangkan $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{y}}$ adalah adalah vektor fuzzy yang berukuran $n \times 1$.

Cara menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy dalam bentuk $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}$ adalah dengan merubah koefisien matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ menjadi koefisien matriks $\boldsymbol{S}$ yang berukuran $2n \times 2n$. Cara penyelesaian ini telah banyak dibahas, diantaranya menggunakan metode Huang [1] dan dengan menentukan $\boldsymbol{S}^{-1}$ dari matriks $\boldsymbol{S}$ yang nonsingular dan sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian tunggal [4]. Yang mana seluruh unsur-unsur vektornya berupa bilangan fuzzy segitiga.

Dalam tulisan ini digunakan sistem persamaan linear fuzzy trapesium dalam bentuk $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{y}}$ adalah vektor fuzzy trapesium yang berukuran $n \times 1$. Kajian ini merupakan kajian ulang yang mendetailkan kertas kerja Nasseri dan Gholami [3].

2. BILANGAN FUZZY

Berikut akan diberikan konsep dasar bilangan fuzzy segitiga dan bilangan fuzzy trapesium yang mengacu pada [1] dan [2].

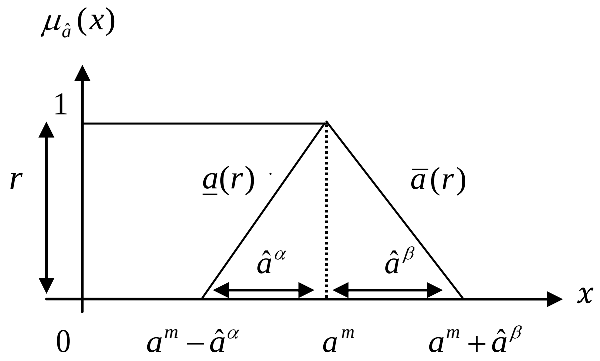
Definisi 1 [1, hal: 5] Bilangan fuzzy $\hat{a} = (a^m, \hat{a}^\alpha, \hat{a}^\beta)$ dikatakan bilangan fuzzy segitiga dengan a^m adalah pusat *(center)*, lebar sebelah kiri $\hat{a}^\alpha$, lebar sebelah kanan $\hat{a}^\beta$ jika memiliki fungsi keanggotaaan

$$\mu_{\hat{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a^m - x}{\hat{a}^\alpha}, & a^m - \hat{a}^\alpha \le x \le a^m, \quad \hat{a}^\alpha > 0 \\ 1 - \dfrac{x - a^m}{\hat{a}^\beta}, & a^m \le x \le a^m + \hat{a}^\beta, \quad \hat{a}^\beta > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya.} \end{cases} \tag{1}$$

Dalam [1] menjelaskan bahwa bentuk parameter dari bilangan fuzzy segitiga $\hat{a} = (a^m, \hat{a}^\alpha, \hat{a}^\beta)$ adalah

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}(r) &= ((a^m - \hat{a}^\alpha) + (\hat{a}^\alpha)r, (a^m + \hat{a}^\beta) - (\hat{a}^\beta)r) \\ &= (\underline{a}(r), \overline{a}(r)) \end{aligned}\right\} . \tag{2}$$

Adapun bilangan fuzzy segitiga $\hat{a} = (a^m, \hat{a}^\alpha, \hat{a}^\beta)$ dengan parameter r digambarkan seperti tampak pada Gambar 1.



Gambar 1. Bilangan Fuzzy Segitiga $\hat{a} = (a^m, \hat{a}^{\alpha}, \hat{a}^{\beta})$ dengan Parameter r.

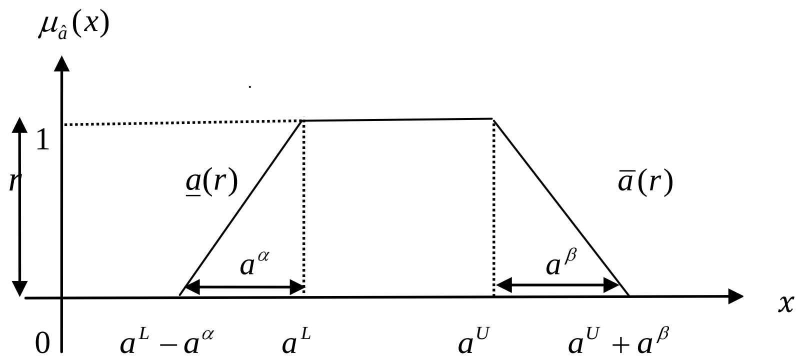
Definisi 2 [2, hal: 647] Bilangan fuzzy $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^{\alpha}, a^{\beta})$ dikatakan bilangan fuzzy trapesium dengan interval toleransi $[a^L, a^U]$ lebar sebelah kiri a^{α} dan kanan a^{β} jika memiliki fungsi keanggotaaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a^L - x}{a^{\alpha}}, & a^L - a^{\alpha} \le x \le a^L, \quad a^{\alpha} > 0 \\ 1, & a^L \le x \le a^U \\ 1 - \dfrac{x - a^U}{a^{\beta}}, & a^U \le x \le a^U + a^{\beta}, \quad a^{\beta} > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya.} \end{cases} \tag{3}$$

Dalam [2] menjelaskan bahwa bentuk parameter dari bilangan fuzzy trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^{\alpha}, a^{\beta})$ adalah

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}(r) &= ((a^L - a^{\alpha}) + (a^{\alpha})r, (a^U + a^{\beta}) - (a^{\beta})r) \\ &= (\underline{a}(r), \overline{a}(r)). \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

Adapun bilangan trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^{\alpha}, a^{\beta})$ dengan parameter r diilustrasikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Bilangan Fuzzy Trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^{\alpha}, a^{\beta})$ dengan Parameter r.

3. SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY TRAPESIUM

Berikut akan dibahas mengenai sistem persamaan linear fuzzy dan sistem persamaan linear fuzzy trapesium menurut [3].

Definisi 3 [3, hal: 72] Sistem persamaan linear fuzzy trapesium mempunyai bentuk umum yang sama dengan sistem persamaan linear fuzzy, yaitu

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + ... + a_{in}\tilde{x}_n = \tilde{y}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + ... + a_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + ... + a_{nn}\tilde{x}_n = \tilde{y}_n \end{array}\right\} , \tag{5}$$

dengan $\hat{x}_j$, $\hat{y}_i$ untuk $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ pada sistem persamaan linear fuzzy adalah vektor fuzzy segitiga yang berukuran $n \times 1$ sedangkan $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_i$ untuk $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ pada sistem persamaan linear fuzzy adalah vektor fuzzy trapesium yang berukuran $n \times 1$.

Definisi 4 [3, hal: 72] Suatu vektor fuzzy $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)^T$ dengan $\hat{x}_i = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))$, untuk $1 \le i \le n$ dan $0 \le r \le 1$ disebut penyelesaian dari sistem persamaan linear fuzzy jika memenuhi persamaan berikut:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij} x_j} = \underline{y}_i \\ \overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij} x_j} = \overline{y}_i \end{array}\right\}, \tag{6}$$

dimana $\underline{y}_i$ dan $\overline{y}_i$ adalah nilai minimum dan maksimum dari $\hat{y}_i$, dengan $\hat{y}_i = (\underline{y}_i, \overline{y}_i)$.

Untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear (5) dengan merubah matriks koefisien $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ menjadi matriks koefisien $\boldsymbol{S}$ berukuran $2n \times 2n$ maka untuk menentukan entri-entri dari $\boldsymbol{s_{ij}}$ ditentukan dengan dengan ketentuan sebagai berikut:

$$s_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ge 0 \Rightarrow s_{i,j} = s_{i+n,j+n} = a_{ij} \\ a_{ij} < 0 \Rightarrow s_{i,j+n} = s_{i+n,j} = -a_{ij} \\ \quad 0 \quad \text{untuk lainnya.} \end{cases} \tag{7}$$

Sehingga diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} s_{1,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{1,n}\underline{x}_n + s_{1,n+1}(-\overline{x}_1) + s_{1,2n}(-\overline{x}_n) = \underline{y}_1 \\ \vdots \\ s_{n,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{n,n}\underline{x}_n + s_{n,n+1}(-\overline{x}_1) + s_{n,2n}(-\overline{x}_n) = \underline{y}_n \\ s_{n+1,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{n+1,n}\underline{x}_n + s_{n+1,n+1}(-\overline{x}_n) + s_{n+1,2n}(-\overline{x}_n) = -\overline{y}_1 \\ \vdots \\ s_{2n,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{2n,n}\underline{x}_n + s_{2n,n+1}(-\overline{x}_n) + s_{2n,2n}(-\overline{x}_n) = -\overline{y}_n \end{array}\right\} . \qquad (8)$$

Dengan menggunakan notasi matriks maka sistem persamaan (8) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}\,, \qquad (9)$$

dengan

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix},\ \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(r) \end{bmatrix}\ \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{x}_n(r) \end{bmatrix},\ \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{y}_n(r) \end{bmatrix}\ \overline{y} = \begin{bmatrix} \overline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{y}_n(r) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ adalah memuat entri-entri positif dari matriks $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{C}$ adalah nilai mutlak entri-entri yang negatif dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$.

Berikut ini diberikan teorema yang menjamin eksistensi singularitas dan teorema yang menyatakan eksistensi invers matriks $\boldsymbol{S}$ menurut [3].

Teorema 1 [3, hal: 73] Matriks $\boldsymbol{S}$ dikatakan *nonsingular* jika dan hanya jika $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ dan $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ adalah *nonsingular*.

Bukti : $\Rightarrow$ misalkan matriks $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ *nonsingular* $|\boldsymbol{S}| \neq 0$, akan dibuktikan matriks $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ dan $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ adalah *nonsingular*.

Tambahkan baris ke- $(n+i)$ kepada baris ke- i untuk $1 \leq i \leq n$ dari matriks $\boldsymbol{S}$ diperoleh

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Kurangkan kolom $(n+j)$ dengan kolom j untuk $1 \leq j \leq n$ dari matriks $\boldsymbol{S}_1$ diperoleh

$$\boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} & 0 \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa $|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{S}_1| = |\boldsymbol{S}_2| = |\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}|\,|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}|$ .karena $|\boldsymbol{S}| \neq 0$, maka $|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}|\,|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}| \neq 0$. Sehingga terbukti $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \neq 0$ dan $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \neq 0$.

$\Leftarrow$ Jika matriks $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ dan $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ adalah *nonsingular*, maka $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ dan $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$, sehingga $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \neq 0$.

Misalkan $\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{C}^2 \neq 0$ adalah $|\boldsymbol{S}|$, maka $|\boldsymbol{S}| \neq 0$. Sehingga terbukti bahwa matriks $\boldsymbol{S}$ *nonsingular*.

Untuk mencari penyelesaian persamaan (9) dapat dilakukan dengan bentuk penyelesaian sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{S}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{10}$$

dengan $\boldsymbol{S}^{-1}$ merupakan invers dari matriks $\boldsymbol{S}$.

Teorema 2 [3, hal: 73] Matriks $\boldsymbol{S}^{-1}$ ada jika mempunyai bentuk yang sama dengan matriks $\boldsymbol{S}$, yaitu

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

Bukti : Misalkan s_{ij} merupakan entri dari $\boldsymbol{S}$ pada baris ke-i dan kolom ke-j dan t_{ij} merupakan entri dari $\boldsymbol{S}^{-1}$.

Jika $\boldsymbol{S}$ matriks kuadrat maka invers dari matriks $\boldsymbol{S}$, yaitu $\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{S}|}\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{S})$ dan *minor entri* $\boldsymbol{s_{ij}}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{M_{ij}}$ serta bilangan $(-1)^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{S_{ij}}$ sebagai kofaktor entri dari $\boldsymbol{s_{ij}}$ sehingga diperoleh

$$t_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}|S_{ji}|}{|S|},$$

dengan $\boldsymbol{S_{ji}}$ adalah matriks yang diperoleh dari menukarkan baris dan kolom dari matriks $\boldsymbol{S}$.

Kemudian, misalkan $\boldsymbol{t_{i,n+j}}$ dan $\boldsymbol{t_{n+i,j}}$ merupakan entri dari $\boldsymbol{S}^{-1}$ untuk $1 \leq i \leq n$. Karena $\boldsymbol{S_{i,n+j}} = \boldsymbol{S_{n+i,j}}$, maka

$$t_{i,n+j} = \frac{(-1)^{i+n+j}|S_{n+j,i}|}{|S|} = t_{n+i,j}$$
$$\frac{(-1)^{i+n+j}|S_{n+j,i}|}{|S|} = t_{n+i,j}.$$

Lakukan hal yang sama untuk $\boldsymbol{t_{n+i,n+j}} = \boldsymbol{t_{i,j}}$ untuk sebarang i dan j. Dengan memisalkan

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

maka terbuktilah

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}.$$

Jika S matriks kuadrat dan terdapat S^{-1} sedemikian hingga $SS^{-1} = S^{-1}S = I$ dengan I adalah matriks identitas, maka dapat ditulis

$$SS^{-1} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}\right], \\ E &= \frac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}\right] \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (B+C)^{-1} + (B-C)^{-1} & (B+C)^{-1} - (B-C)^{-1} \\ (B+C)^{-1} - (B-C)^{-1} & (B+C)^{-1} + (B-C)^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Pada persamaan (11) adalah invers dari matriks S dengan $(B+C)^{-1}$ dan $(B-C)^{-1}$ adalah invers dari matriks $B+C$ dan $B-C$.

Definisi 5 [3, hal: 74] Misalkan $\hat{x} = \left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ untuk $1 \le i \le n$ adalah penyelesaian dari $S\hat{x} = \hat{y}$. Vektor fuzzy $\hat{u} = \left(\underline{u}_i(r), \overline{u}_i(r)\right)$ untuk $1 \le i \le n$ didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \underline{u}_i(r) &= \min\left\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \overline{x}_i(1)\right\} \\ \overline{u}_i(r) &= \max\left\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \overline{x}_i(1)\right\} \end{aligned}, \qquad (12)$$

disebut penyelesaian fuzzy dari $S\hat{x} = \hat{y}$.

Jika $\hat{x}_i = \left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ untuk $1 \le i \le n$ semuanya adalah bilangan fuzzy, maka $\underline{u}_i(r) = x_i(r)$ dan $\overline{u}_i(r) = \overline{x}_i(r)$ untuk $1 \le i \le n$ dan $\hat{u}$ disebut penyelesaian fuzzy kuat (*strong solution fuzzy*). Jika tidak, $\hat{u}$ disebut penyelesaian fuzzy lemah (*weak solution fuzzy*).

Berikut ini diberikan definisi dari sistem persamaan linear fuzzy trapesium yang diperkenalkan oleh [3]

Definisi 6 [3, hal: 74] Suatu vektor fuzzy trapesium $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)^T$ dengan $\tilde{x}_i = (x_i^L, x_i^U, x_i^\alpha, x_i^\beta)$ dengan $1 \le i \le n$ disebut penyelesaian dari sistem persamaan linear fuzzy trapesium jika memenuhi persamaan berikut

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j = \tilde{y}_i \ . \tag{13}$$

Definisi 7 [3, hal: 75] Untuk setiap bilangan fuzzy fuzzy trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dapat didefinisikan hubungan bilangan fuzzy segitiga $\hat{a} = (a^m, \hat{a}^\alpha, \hat{a}^\beta)$, sehingga diperoleh $a^m = \dfrac{a^L + a^U}{2}$, $\hat{a}^\alpha = a^\alpha + (a^m - a^L)$ dan $\hat{a}^\beta = a^\beta + (a^U - a^m)$.

Untuk lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 2 dengan $\dfrac{a^L + a^U}{2} = a^m$ sehingga diperoleh hubungan antara bilangan fuzzy trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dan segitiga $\hat{a} = (a^m, \hat{a}^\alpha, \hat{a}^\beta)$ yang terdapat pada Gambar 1.

Dari persamaan (2) diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter, yaitu

$$\hat{a}(r) = ((a^m - \hat{a}^\alpha) + (\hat{a}^\alpha)r, (a^m + \hat{a}^\beta) - (\hat{a}^\beta)r) \ .$$

Berdasarkan Definisi 4.3 dapat didefinisikan hubungan sistem persamaan linear fuzzy untuk setiap sistem persamaan linear fuzzy trapesium dengan $(\tilde{y}_i) = (y_i^L, y_i^U, y_i^\alpha, y_i^\beta)$ merupakan bilangan fuzzy trapesium dan $(\hat{y}_i) = (y_i^m, \hat{y}_i^\alpha, \hat{y}_i^\beta)$ merupakan bilangan fuzzy segitiga, sehingga diperoleh

$$\left.\begin{aligned} y_i^m &= \frac{y_i^L + y_i^U}{2} \\ \hat{y}_i^\alpha &= y_i^\alpha + (y_i^m - y_i^L) \\ \hat{y}_i^\beta &= y_i^\beta + (y_i^U - y_i^m) \end{aligned}\right\} . \tag{14}$$

Dari persamaan (14) diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter, yaitu

$$\hat{y}(r) = ((y_i^m - \hat{y}_i^\alpha) + (\hat{y}_i^\alpha)r, (y_i^m + \hat{y}_i^\beta) - (\hat{y}_i^\beta)r) \ . \tag{15}$$

4. ALGORITMA PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY TRAPESIUM

Berikut ini dibahas mengenai algoritma untuk menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy trapesium, yaitu

Langkah 1.

Mengubah variabel $\tilde{y}$ yaitu bilangan fuzzy trapesium $(\tilde{y}_i) = (y_i^L, y_i^U, y_i^\alpha, y_i^\beta)$ ke dalam bentuk bilangan fuzzy segitiga sehingga diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter,

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}},$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \tilde{y} = \begin{bmatrix} (y_1^L, y_1^U, y_1^\alpha, y_1^\beta) \\ (y_2^L, y_2^U, y_2^\alpha, y_2^\beta) \\ \vdots \\ (y_n^L, y_n^U, y_n^\alpha, y_n^\beta) \end{bmatrix},$$

dengan menggunakan rumus pada persamaan (14) diperoleh bilangan fuzzy segitiga, yaitu

$$(\hat{y}_i) = (y_i^m, \hat{y}_i^\alpha, \hat{y}_i^\beta),$$

dari persamaan (15) diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter, yaitu

$$\hat{y}(r) = ((y_i^m - \hat{y}_i^\alpha) + (\hat{y}_i^\alpha)r, (y_i^m + \hat{y}_i^\beta) - (\hat{y}_i^\beta)r).$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan linear fuzzy, yaitu

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}},$$

dengan

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_n \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\boldsymbol{y}}_1(\boldsymbol{r}), \overline{\boldsymbol{y}}_1(\boldsymbol{r})) \\ (\underline{\boldsymbol{y}}_2(\boldsymbol{r}), \overline{\boldsymbol{y}}_2(\boldsymbol{r})) \\ \vdots \\ (\underline{\boldsymbol{y}}_n(\boldsymbol{r}), \overline{\boldsymbol{y}}_n(\boldsymbol{r})) \end{bmatrix}.$$

Langkah 2.

Menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy (5) pertama dengan mengubah matriks koefisien $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ menjadi matriks koefisien $\boldsymbol{S}$ berukuran $2n \times 2n$ dengan menggunakan ketentuan pada persamaan (7) sebagai berikut

$$
\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{s}_{1,\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{s}_{1,\boldsymbol{n}+1} & & \boldsymbol{s}_{1,2\boldsymbol{n}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n},1} & \cdots & \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}+1} & \cdots & \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n},2\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}+1,1} & \cdots & \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}+1,\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}+1,\boldsymbol{n}+1} & & \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}+1,2\boldsymbol{n}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{s}_{2\boldsymbol{n},1} & \cdots & \boldsymbol{s}_{2\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{s}_{2\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}+1} & \cdots & \boldsymbol{s}_{2\boldsymbol{n},2\boldsymbol{n}} \end{bmatrix} .
$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan linear fuzzy baru (9), yaitu

$$\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}} .$$

Kemudian menentukan penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy (9) dilakukan dengan bentuk penyelesaian pada persamaan (10) sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{S}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}} ,$$

dengan $\boldsymbol{S}^{-1}$ adalah invers dari matriks $\boldsymbol{S}$.

Berdasarkan Definisi 3.3 diperoleh penyelesaian fuzzy kuat atau penyelesaian fuzzy lemah dan asumsikan penyelesaian fuzzy segitiganya, yaitu

$$(\hat{x}_i) = (x_i^{\,m}, \hat{x}_i^{\,\alpha}, \hat{x}_i^{\,\beta}) .$$

Langkah 3.

Mengubah penyelesaian fuzzy segitiga $(\hat{x}_i) = (x_i^{\,m}, \hat{x}_i^{\,\alpha}, \hat{x}_i^{\,\beta})$ menjadi penyelesaian fuzzy trapesium sehingga diperoleh penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy trapesium dengan cara sebagai berikut:

Untuk variabel $(\tilde{y}_i) = (y_i^{\,L}, y_i^{\,U}, y_i^{\,\alpha}, y_i^{\,\beta})$, pertama menghitung

$$R_i = \frac{y_i^{\,U} - y_i^{\,L}}{(y_i^{\,U} + y_i^{\,\beta}) - (y_i^{\,L} - y_i^{\,\alpha})} , \tag{16}$$

dari persamaan (16) digunakan untuk mencari

$$\gamma = \max_{1 \le i \le n} \{R_i\} , \tag{17}$$

dari persamaan (17) diperoleh

$$\gamma_i = \gamma * \min \{\hat{x}_i^{\,\alpha}, \hat{x}_i^{\,\beta}\} , \tag{18}$$

dengan menggunakan persamaan (18) pada komponen ke- i diperoleh penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy trapesium, yakni

$$(\tilde{x}_i) = (x_i^{\,L}, x_i^{\,U}, x_i^{\,\alpha}, x_i^{\,\beta}),$$

dengan

$$x_i^L = x_i^m - \gamma_i ,\ x_i^U = x_i^m + \gamma_i ,\ x_i^\alpha = \hat{x}_i^\alpha - \gamma_i \text{ dan } x_i^\beta = \hat{x}_i^\beta - \gamma_i .$$

Langkah 4.

Mensubstitusikan penyelesaian fuzzy trapesium, yaitu $(\tilde{x}_i) = (x_i^L, x_i^U, x_i^\alpha, x_i^\beta)$ ke dalam sistem persamaan linear fuzzy trapesium pada persamaan (5) untuk menentukan benar atau tidaknya penyelesaian fuzzy trapesium tersebut.

Contoh 1.

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear fuzzy trapesium.

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 + 3\tilde{\boldsymbol{x}}_3 &= \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = (7, 13, 6, 6) \\ 4\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 - \tilde{\boldsymbol{x}}_3 &= \tilde{\boldsymbol{y}}_2 = (6, 12, 6, 6) \\ -\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 + 3\tilde{\boldsymbol{x}}_3 &= \tilde{\boldsymbol{y}}_3 = (0, 5, 5, 5) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Solusi

Langkah 1, yaitu mengubah variabel $\tilde{y}$ yaitu bilangan fuzzy trapesium $(\tilde{y}_i) = (y_i^L, y_i^U, y_i^\alpha, y_i^\beta)$ ke dalam bentuk bilangan fuzzy segitiga sehingga diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter.

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(r) &= (\underline{y}_1(r), \bar{y}_1(r)) = (1+9r, 19-9r) \\ \hat{y}_2(r) &= (\underline{y}_2(r), \bar{y}_2(r)) = (9r, 18-9r) \\ \hat{y}_3(r) &= (\underline{y}_3(r), \bar{y}_3(r) = (-5+{}^{15}\!/_{2}\,r, 10-{}^{15}\!/_{2}\,r) . \end{aligned}$$

Kemudian langkah 2, yakni mengubah matriks koefisien $\boldsymbol{A}$ berukuran 3×3 menjadi matriks koefisien $\boldsymbol{S}$ berukuran 6×6 dengan ketentuan (7) diperoleh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Kemudian diperoleh invers dari matriks $\boldsymbol{S}$,yaitu

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & -0,667 & 0,333 & 0 & -0,333 \\ -3,208 & 1,125 & 3,083 & -2,292 & 0,375 & 1,917 \\ 0,958 & -0,375 & -0,583 & 0,542 & -1,125 & -0,417 \\ 0,333 & 0 & -0,333 & 0,667 & 0 & -0,667 \\ -2,292 & 0,375 & 1,917 & -3,208 & 1,125 & 3,083 \\ 0,542 & -1,125 & -0,417 & 0,958 & -0,375 & -0,583 \end{bmatrix},$$

Karena $\hat{\boldsymbol{u}}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}_1$, $\hat{\boldsymbol{u}}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}_2$ dan $\hat{\boldsymbol{u}}_3 = \hat{\boldsymbol{x}}_3$, maka penyelesaiannya disebut penyelesaian fuzzy kuat (*strong fuzzy solution*).
Anggap penyelesaian fuzzy segitiga yaitu $\hat{\boldsymbol{x}}_1 = (5/2, 3/2, 3/2)$, $\hat{\boldsymbol{x}}_2 = (, 1/2, 3/2, 3/2)$ dan $\hat{\boldsymbol{x}}_3 = (3/2, 3/2, 3/2)$.

Selanjutnya langkah 3, diperoleh penyelesaian trapesium

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (2, 3, 1, 1) \\ \tilde{x}_2 &= (0, 1, 1, 1) \\ \tilde{x}_3 &= (1, 2, 1, 1). \end{aligned}$$

Terakhir langkah 4, yaitu mensubstitusikan $\tilde{\boldsymbol{x}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_2$ dan $\tilde{\boldsymbol{x}}_3$ ke persamaan (19) sebagai berikut:

- $2\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 + 3\tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (2 \otimes (2, 3, 1, 1)) \oplus (0, 1, 1, 1) \oplus (3 \otimes (1, 2, 1, 1))$
  $2\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 + 3\tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (7, 13, 6, 6) = \tilde{\boldsymbol{y}}_1$.

- $4\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 - \tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (4 \otimes (2, 3, 1, 1)) \oplus (0, 1, 1, 1) \oplus (-(1, 2, 1, 1))$
  $4\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 - \tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (6, 12, 6, 6) = \tilde{\boldsymbol{y}}_2$.

- $-\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 + 3\tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (-(2, 3, 1, 1)) \oplus (0, 1, 1, 1) \oplus (3 \otimes (1, 2, 1, 1))$
  $-\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2 + 3\tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (0, 5, 5, 5) = \tilde{\boldsymbol{y}}_3$.

Terlihat bahwa penyelesaian fuzzy trapesium untuk $\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = (2, 3, 1, 1)$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_2 = (0, 1, 1, 1)$ dan $\tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (1, 2, 1, 1)$ adalah benar.

5. KESIMPULAN

Dari artikel ini dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan linear fuzzy trapesium mempunyai bentuk umum yang sama dengan sistem persamaan linear fuzzy, yaitu $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ dengan $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks koefisien berukuran $n \times n$. Untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy trapesium diawali dengan mengubah variabel $\tilde{\boldsymbol{y}}$, yaitu bilangan fuzzy trapesium ke dalam bentuk bilangan fuzzy segitiga sehingga diperoleh bentuk bilangan fuzzy parameter. Selanjutnya mengubah matriks koefisien matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ menjadi matriks $\boldsymbol{S}$ berukuran $2n \times 2n$ sehingga terbentuk sistem persamaan linear baru $\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}}$. Bentuk penyelesaian dari sistem persamaan $\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ adalah $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{S}^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}$ dengan $\boldsymbol{S}^{-1}$ adalah invers matriks $\boldsymbol{S}$ yang *nonsingular* dan sistem persamaan tersebut memiliki penyelesaian tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Azizah, H. 2010. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Fuzzy dengan Metode Huang. *Skripsi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau*, Pekanbaru.

[2] Dehghan, M & Hashemi, B. 2006. Iterative Solution of Fuzzy Linear Systems. *Applied Mathematics and Computations*, 175: 645-674.

[3] Nasseri, S. H & M. Gholami 2011. Linear System of Equations with Trapezoidal Fuzzy Numbers. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, **3** (1): 71-79.

[4] Yulita, D. W. 2009. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy. *Skripsi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau*, Pekanbaru.