

NILAI TUNAI ANUITAS HIDUP AWAL UNTUK STATUS GABUNGAN BERDASARKAN DISTRIBUSI GOMPERTZ DAN DISTRIBUSI MAKEHAM

Deni Afrianti^{1*}, Hasriati²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*deniafrianti10@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses the present value of a life annuity due for joint life with Gompertz distribution and Makeham distribution. With Gompertz distribution and Makeham distribution, the present value calculation is done by first determining the life chances of single and joint life based on the Gompertz distribution and Makeham distribution. In determining of the present value of an annuity based on Gompertz distribution and Makeham distribution, the distribution constants will affect the present value of the annuity.

Keywords: *Annuity, present value, Gompertz and Makeham distributions, joint life.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham. Dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham, perhitungan nilai tunai diselesaikan dengan terlebih dahulu menentukan peluang hidup perorangan dan gabungan berdasarkan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham. Di dalam menentukan besarnya nilai tunai anuitas berdasarkan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham, besarnya konstanta-konstanta distribusi Gompertz dan distribusi Makeham akan mempengaruhi besarnya nilai tunai anuitas.

1. PENDAHULUAN

Anuitas adalah serangkaian pembayaran dengan jumlah yang sama besar pada setiap periode pembayaran [5]. Berdasarkan pembayarannya, anuitas terbagi menjadi dua yaitu pembayaran yang dilakukan di awal periode atau disebut dengan anuitas awal (*annuity due*) dan pembayaran yang dilakukan di akhir periode atau

disebut dengan anuitas akhir (*anuitas immediate*). Karena pembayaran dilakukan secara berkala, maka harus dipertimbangkan percepatan mortalita, peluang hidup dan peluang meninggal seseorang.

Untuk menentukan nilai tunai anuitas hidup awal ada beberapa distribusi yang dapat digunakan, diantaranya dapat digunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham. Futami [4] bahwa menurut Gompertz percepatan mortalita perorangannya yaitu $\mu_x = Bc^x$ dimana B dan c merupakan konstanta Gompertz, selanjutnya Futami [4] bahwa menurut Makeham percepatan mortalita perorangannya yaitu $\mu_x = A + Bc^x$ dengan A , B dan c merupakan konstanta Makeham, dimana teori yang disampaikan oleh Makeham ini merupakan penyempurnaan dari teori Gompertz.

Pada suatu instansi tidak tertutup kemungkinan sistem pembayaran anuitas dilakukan oleh dua orang yang mempunyai hubungan kekerabatan, misalnya hubungan suami-istri, ibu-anak, adik-kakak dan lain sebagainya. Ada kalanya suatu instansi mengadakan pengelompokan untuk peserta yang mempunyai hubungan kekerabatan seperti suami-istri yang berusia x dan y tahun, dimana x dan y saling bebas. Pengelompokan ini sering disebut kehidupan gabungan (*joint life*) yang dinotasikan dengan xy .

Apabila ${}_t p_{xy}$ menyatakan peluang hidup untuk status gabungan dari seseorang yang berusia x dan y tahun sampai dengan t tahun berikutnya, sedangkan v menyatakan faktor diskon, maka nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan dengan jangka waktu n tahun, dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{xy}.$$

Berdasarkan nilai tunai anuitas hidup awal gabungan ini, maka dapat ditentukan nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham.

Disini penulis membahas nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan, dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham dengan membahas ulang kertas kerja dari Rietz dengan judul "On Certain Properties of Makeham's Laws of Mortality with Applications" [7]. Rietz membahas nilai tunai anuitas dengan menggunakan distribusi Makeham, sedangkan penulis membahas nilai tunai anuitas untuk status gabungan dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham.

2. NILAI TUNAI ANUITAS HIDUP AWAL

Sebelum membahas nilai tunai anuitas terlebih dahulu dikemukakan teori pendukung yang berkaitan dengan nilai tunai anuitas. Dari [1] diketahui bahwa x menyatakan usia dari seseorang dan $T(x)$ variabel random yang menyatakan sisa usia seseorang yang berusia x tahun. Diketahui juga bahwa ${}_t q_x$ menyatakan peluang meninggal dari seseorang yang berusia x sebelum mencapai t tahun, ${}_t p_x$ menyatakan peluang

hidup seseorang yang berusia x bertahan hidup hingga t tahun berikutnya dan ${}_x p_0$ menyatakan peluang hidup seseorang yang baru lahir bertahan hidup hingga usia x tahun, dengan

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \quad (1)$$

Selanjutnya dari [3], μ_x menyatakan percepatan mortalita dari seseorang yang berusia x tahun, sering disebut juga dengan *force of mortality* yang dinyatakan dengan

$$\mu_x = \frac{-d \ln l_x}{dx}. \quad (2)$$

Berikut ini adalah hubungan antara ${}_x p_0$ dengan μ_x

$${}_x p_0 = e^{-\int_0^x \mu_y dy}, \quad (3)$$

pada artikel ini penulis lebih menekankan peluang hidup gabungan dari seseorang yang berusia x dan y tahun. Dari [4], peluang hidup gabungan seseorang yang berusia x dan y tahun bertahan hidup hingga t tahun berikutnya dinyatakan dengan

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x {}_t p_y. \quad (4)$$

Nilai tunai anuitas hidup berkaitan dengan peluang hidup seseorang. Dari [4], nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan dari seseorang yang berusia x dan y dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{xy}, \quad (5)$$

dengan v menyatakan faktor diskon yaitu

$$v = \frac{1}{1+i}. \quad (6)$$

3. NILAI TUNAI ANUITAS HIDUP BERDASARKAN DISTRIBUSI GOMPERTZ DAN DISTRIBUSI MAKEHAM

Dalam artikel ini penulis membahas nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham. Dari [2], bahwa distribusi Gompertz diperkenalkan oleh matematika inggris Benjamin Gompertz pada tahun 1825. Distribusi Gompertz adalah salah satu distribusi yang dapat digunakan untuk menentukan peluang hidup baik untuk perorangan maupun gabungan. Dalam menyatakan teorinya Gompertz menggunakan μ_x sebagai ukuran rentannya seseorang terhadap kematian, dari [2] percepatan mortalita berdasarkan distribusi Gompertz adalah

$$\mu_x = Bc^x, \quad (7)$$

dengan B dan c konstanta Gompertz. Besarnya konstanta Gompertz dapat dicari dengan menggunakan Definisi 1.

Definisi 1 [8, hal: 170] Distribusi Gompertz $G(x|\mu, \sigma)$ dengan rata-rata μ dan standar deviasi σ didefinisikan oleh

$$G(x|\mu, \sigma) = W\left(\frac{x-a}{b}\right),$$

dengan $W(x) = 1 - e^{-e^x}$ dan konstanta a dan b memenuhi

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}b \quad \text{dan} \quad \mu = a - b\gamma. \quad (8)$$

Dari [8], $G(x|\mu, \sigma)$ dinamai distribusi Gompertz, dengan

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} \quad \text{dan} \quad c = e^{\frac{1}{b}}. \quad (9)$$

Dari percepatan mortalita berdasarkan distribusi Gompertz ini akan ditentukan banyaknya orang yang berusia x (l_x). Dengan menggunakan persamaan (2) dan (7), diperoleh banyaknya orang yang hidup pada usia x berdasarkan distribusi Gompertz [6]

$$l_x = kg^{c^x}, \quad (10)$$

sedangkan banyaknya orang yang berusia $x + t$ berdasarkan distribusi Gompertz dinyatakan dengan

$$l_{x+t} = kg^{c^{x+t}}. \quad (11)$$

Dari persamaan (1),(10) dan (11) diperoleh peluang hidup perorangan berdasarkan distribusi Gompertz yaitu

$${}_t p_x = g^{c^x(c^t-1)}. \quad (12)$$

Dari persamaan (4) dan (12), diperoleh peluang hidup gabungan berdasarkan distribusi Gompertz

$${}_t p_{xy} = g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}, \quad (13)$$

dengan mensubstitusikan (13) ke persamaan (5), maka diperoleh nilai tunai anuitas awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Gompertz

$$\ddot{a}_{xy:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}. \quad (14)$$

Selanjutnya dibahas nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Makeham. Dari [6], distribusi Makeham diperkenalkan pada tahun 1860, dari [6] percepatan mortalita berdasarkan distribusi Makeham yaitu

$$\mu_x = A + Bc^x.$$

Dari [6] dan dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh banyaknya orang berusia x berdasarkan distribusi Makeham sebagai berikut:

$$l_x = ks^x g^{c^x}, \quad (15)$$

sedangkan banyaknya orang yang berusia $x + t$ dinyatakan dengan

$$l_{x+t} = ks^{x+t} g^{c^{x+t}}. \quad (16)$$

Dari persamaan (1),(15) dan (16) diperoleh peluang hidup perorangan berdasarkan distribusi Makeham yaitu

$${}_t p_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}. \quad (17)$$

Dari persamaan (4) dan (17), diperoleh peluang hidup gabungan berdasarkan distribusi Makeham sebagai berikut:

$${}_t p_{xy} = s^{2t} g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}, \quad (18)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (18) kedalam persamaan (5), diperoleh nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Makeham sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{xy:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t s^{2t} g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}. \quad (19)$$

4. CONTOH NILAI TUNAI ANUITAS HIDUP AWAL

Sepasang suami istri bekerja dalam suatu perusahaan yang sama, keduanya mengikuti suatu program asuransi jiwa berjangka selama 10 tahun. Dengan mengambil data dari TMI 1999, untuk usia suami 50 tahun dan usia istri 51 tahun dan besar pembayaran setiap periode sebesar Rp.500.000,00. Jika tingkat bunga 5% untuk setiap periode, dan diasumsikan konstanta makeham dari keduanya sebesar 0.0005. Akan ditentukan nilai tunai anuitas hidup awal berdasarkan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham untuk status gabungan.

Untuk menyelesaikan persoalan diatas terlebih dahulu akan ditentukan besarnya konstanta Gompertz untuk TMI 1999 baik untuk pria maupun untuk wanita.

Langkah 1. Menentukan konstanta-konstanta Gompertz.

Dengan menggunakan Definisi 1 ditentukan konstanta Gompertz untuk TMI 1999 Pria, dengan terlebih dahulu menentukan σ dan μ , dengan menggunakan program Excel diperoleh $\sigma = 29,15475947$ dan $\mu = 50$ dengan mensubstitusikan nilai σ dan μ ke dalam persamaan (8) diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi}{\sqrt{6}} b & \text{dan} & \quad \mu = a - b\gamma \\ b &= 22,74340 & \text{dan} & \quad a = 36,87215235, \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan nilai a dan b ke persamaan (9) diperoleh

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} = 0,820651646 \quad \text{dan} \quad c = e^{\frac{1}{b}} = 1,044949746,$$

dengan $\ln g = \frac{-B}{\ln c}$ (lihat[6]), sehingga diperoleh $B = 0,008690$. Dengan cara yang sama diperoleh konstanta Gompertz untuk TMI 1999 wanita sebesar $B = 0,0026589$ dan $c = 1,0436251$. Selanjutnya dengan tingkat bunga 5%, dari persamaan (6) diperoleh faktor diskon

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,05} = 0,952381.$$

Langkah 2. Menentukan nilai tunai anuitas hidup awal.

Dari langkah 1, diperoleh konstanta Gompertz untuk pria sebesar $B = 0,00869$ dan $c = 1,044949746$ sedangkan konstanta Gompertz untuk wanita sebesar $B = 0,0026589$ dan $c = 1,0436251$, dan faktor diskon sebesar $v = 0,952381$.

1. Nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Gompertz.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh dalam Langkah 1, kedalam persamaan (14) diperoleh

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{50,51:\overline{10}|} &= \sum_{t=0}^9 v^t g^{(c^{50+c^{51}})(c^t-1)} \\ &= v^0 g^{(c^{50+c^{51}})(c^0-1)} + v^1 g^{(c^{50+c^{51}})(c^1-1)} + \dots + v^9 g^{(c^{50+c^{51}})(c^9-1)} \\ &= (1 \times 1) + (0,9524 \times 0,8976) + \dots + (0,6446 \times 0,1862) \\ &= 4,846759, \end{aligned}$$

dengan besar pembayaran Rp.500.000,00 setiap periode. Nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Gompertz sebesar

$$(\text{Rp}500.000) \ddot{a}_{50,51:\overline{10}|} = \text{Rp}2.423.379,00.$$

Perhitungan nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Gompertz, disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1: Nilai Tunai Anuitas untuk Status Gabungan berdasarkan Distribusi Gompertz dengan Tingkat Suku Bunga 5%

x	y	t	v^t	$g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}$	$v^t \cdot g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}$
50	51	0	1	1	1
51	52	1	0,952381	0,89761	0,854871
52	53	2	0,90703	0,79406	0,720238
53	54	3	0,863838	0,69124	0,597119
54	55	4	0,822703	0,58448	0,480852
55	56	5	0,783526	0,48827	0,382575
56	57	6	0,746216	0,39899	0,297733
57	58	7	0,710682	0,31819	0,226132
58	59	8	0,67684	0,24704	0,167205
59	60	9	0,644609	0,18621	0,120035
Total					4,846759

2. Nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Makeham.

Dari soal diketahui konstanta $A = 0,0005$ dengan $A = -\ln s$ (lihat[6]) sehingga diperoleh $s = 0.999500125$. Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh dalam Langkah 1 dan $s = 0.999500125$, kedalam persamaan (19) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{50,51:\overline{10}|} &= \sum_{t=0}^9 v^t s^{2t} g^{(c^{50}+c^{51})(c^t-1)} \\
 &= v^0 s^{2(0)} g^{(c^{50}+c^{51})(c^0-1)} + v^1 s^{2(1)} g^{(c^{50}+c^{51})(c^1-1)} + \dots + v^9 s^{2(9)} g^{(c^{50}+c^{51})(c^9-1)} \\
 &= (1 \times 1 \times 1) + (0,9523 \times 0,999 \times 0,898) + \dots + (0,6446 \times 0,9910 \times 0,1862) \\
 &= 4,83308,
 \end{aligned}$$

dengan besar pembayaran Rp.500.000,00 setiap periode. Nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Makeham sebesar

$$(\text{Rp}500.000)\ddot{a}_{50,51:\overline{10}|} = \text{Rp}2.416.541,00.$$

Perhitungan nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Makeham, disajikan dalam Tabel 2.

Tabel 2: Nilai Tunai Anuitas untuk Status Gabungan berdasarkan Distribusi Makeham dengan Tingkat Suku Bunga 5%

x	y	t	v^t	$s^{2t}g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}$	$v^t \cdot s^{2t}g^{(c^x+c^y)(c^t-1)}$
50	51	0	1	1	1
51	52	1	0,952381	0,89672	0,85402
52	53	2	0,90703	0,79248	0,71879
53	54	3	0,863838	0,68917	0,59533
54	55	4	0,822703	0,58215	0,47893
55	56	5	0,783526	0,48584	0,38067
56	57	6	0,746216	0,39660	0,29595
57	58	7	0,710682	0,31597	0,22455
58	59	8	0,67684	0,24506	0,16587
59	60	9	0,644609	0,18455	0,11896
Total					4,83308

5. KESIMPULAN

Perhitungan nilai tunai anuitas hidup awal dengan menggunakan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham memperhatikan peluang hidup dari peserta asuransi jiwa berjangka. Besarnya peluang hidup berdasarkan distribusi Gompertz dan distribusi Makeham, bergantung pada besarnya konstanta distribusi Gompertz dan distribusi Makeham. Berdasarkan contoh sebelumnya, nilai tunai anuitas hidup awal untuk status gabungan berdasarkan distribusi Gompertz lebih besar jika dibandingkan dengan menggunakan distribusi Makeham.

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. M. D. H. Gamal yang telah membantu dalam penyajian artikel ini dan memberikan banyak masukan baik dari aspek matematis maupun aspek komputasi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bowers Jr, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, & C. J. Nesbitt. 1997. *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries. Illinois.
- [2] Dellinger, J. K. 2006. *The Handbook of Variable Income Annuities*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [3] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I*, Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Jokan ('92 Revision)*, oleh G. Herliyanto, Incorporated Foundation, Tokyo, Japan.

- [4] Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian II*, Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Gekan ("92 Revision)*, oleh G. Herliyanto, Incorporated Foundation, Tokyo, Japan.
- [5] Harmoni, A. 2007. Perhitungan Bunga dan Nilai Uang. Universitas Gunadarma. <http://www.google.com/url?sa=t&source=web&cd=2&ved=occ4qja&url=http%3A%2F%2Fati.staff.gunadarma.ac.id>, 20 November 2012. pk. 12.43.
- [6] Jordan Jr, C. W. 1991. *Society of Actuaries' Textbook On Life Contingencies*. The society of actuaries. Chicago, Illinois.
- [7] Rietz, H. L. 1921. On Certain Properties of Makeham's Laws of Mortality with Applications. *The American Mathematical Monthly*, 28:pp: 158-165.
- [8] Willemse, W. J. & Koppelaar, H. 2000. Knowledge Elicitation of Gompertz' Law of Mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2: 168-179.