ANUITAS AKHIR MENGGUNAKAN FORMULA WOOLHOUSE UNTUK STATUS HIDUP GABUNGAN

Reni Humairah[1], Hasriati[2], Harison[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*reni_humairah@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses Woolhouse's formula developed from a book by Dickson, Hardy and Waters [1]. Woolhouse's formula derived from the Euler-Maclaurin formula approach. Woolhouse's formula used to determine the cash value of annuity with payments *m* times a year. Cash values of annuity determined are cash value of life annuity and cash value of deposit annuity with payment at the end of the period for joint life status.

Keywords: *Cash value of annuity, joint life status, Woolhouse's formula*

ABSTRAK

Kertas kerja ini membahas tentang formula Woolhouse yang diperoleh dari buku karangan Dickson, Hardy dan Waters [1]. Formula Woolhouse diperoleh dari pendekatan formula Euler-Maclaurin. Formula Woolhouse digunakan untuk menentukan nilai tunai anuitas dengan *m* kali pembayaran dalam setahun. Nilai tunai anuitas yang ditentukan adalah nilai tunai anuitas seumur hidup dan nilai tunai anuitas berjangka dengan pembayaran di akhir periode untuk status hidup gabungan.

1. PENDAHULUAN

Anuitas merupakan suatu pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan setiap selang waktu dan lama tertentu, secara berkelanjutan [2]. Pada mulanya istilah anuitas hanya digunakan untuk pembayaran yang dilakukan tiap tahun, akan tetapi dengan seiring berjalannya waktu, anuitas juga mencakup pembayaran yang dilakukan tiap bulan, kuartal, semester ataupun interval waktu lainnya, Dalam menentukan besarnya anuitas dapat digunakan berbagai macam formula atau metode, salah satunya dengan menggunakan formula Woolhouse yang diperoleh dari buku karangan Dickson, Hardy dan Waters [1]. Formula Woolhouse merupakan formula yang digunakan untuk menentukan anuitas yang dibayarkan selama interval waktu tertentu berdasarkan pendekatan Formula Euler-Maclaurin. Dengan menggunakan Formula Woolhouse dapat menghasilkan pendekatan nilai tunai anuitas dari peserta asuransi jiwa hingga usia yang lebih tua.

Pada umumnya, usia peserta asuransi jiwa berbeda-beda. Oleh karena itu, adakalanya perusahaan asuransi jiwa mengadakan penggabungan untuk peserta asuransi jiwa tersebut. Penggabungan peserta asuransi jiwa ini bisa dilakukan untuk dua orang atau lebih yang disebut dengan status hidup gabungan *(joint life status).*

2. NILAI TUNAI ANUITAS UNTUK STATUS GABUNGAN

Pada bagian ini dibahas mengenai nilai tunai anuitas seumur hidup dan nilai tunai anuitas berjangka untuk status gabungan yang diberikan oleh [3].

Nilai tunai anuitas yang pembayarannya dilakukan seumur hidup dan akan berakhir bila peserta asuransi tersebut telah meninggal dunia disebut nilai tunai anuitas seumur hidup. Pembayaran anuitas seumur hidup dapat dilakukan di awal atau di akhir periode pembayaran. Untuk pembayaran yang dilakukan di awal periode, nilai tunai anuitasnya disebut nilai tunai anuitas awal seumur hidup yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_{xy}. \tag{1}$$

Sementara untuk pembayaran yang dilakukan di akhir periode, nilai tunai anuitasnya disebut nilai tunai anuitas akhir seumur hidup yang dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{xy}.$$

Berdasarkan banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam setahun, peserta asuransi jiwa dapat melakukan pembayaran satu kali dalam setahun ataupun melakukan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun. Untuk pembayaran yang dilakukan di awal periode, nilai tunai anuitas awal seumur hidup dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun dinyatakan sebagai berikut :

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} v^{t/m} \, {}_{t/m} p_{xy}. \tag{2}$$

Selanjutnya, untuk pembayaran yang dilakukan di akhir periode, nilai tunai anuitas akhir seumur hidup untuk status gabungan dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{xy}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m}\ {}_{t/m}p_{xy}.$$

Suatu anuitas yang pembayarannya dilakukan selama jangka waktu tertentu disebut anuitas hidup berjangka. Pembayaran anuitas hidup berjangka berlangsung selama jangka waktu tertentu yang telah disepakati oleh kedua belah pihak yaitu antara pihak peserta asuransi dan pihak perusahaan asuransi. Untuk pembayaran yang dilakukan di awal periode pembayaran, nilai tunai anuitasnya disebut nilai tunai anuitas awal berjangka yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t}\ {}_{t}p_{xy}. \qquad (3)$$

Untuk pembayaran yang dilakukan di akhir periode pembayaran, nilai tunai anuitasnya disebut nilai tunai anuitas akhir berjangka yang dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^{t}\ {}_{t}p_{xy}. \qquad (4)$$

Selanjutnya, untuk pembayaran yang dilakukan sebanyak *m* kali dalam setahun dan dilakukan di awal periode, nilai tunai anuitas awal berjangka dinyatakan sebagai berikut :

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{nm-1} v^{t/m}\ {}_{t/m}p_{xy}.$$

Untuk pembayaran yang dilakukan di akhir periode pembayaran**,** nilai tunai anuitas akhir seumur hidup untuk status gabungan dengan pembayaran *m* kali dalam setahun dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{xy:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{nm} v^{t/m}\ {}_{t/m}p_{xy}.$$

3. NILAI TUNAI ANUITAS MENGGUNAKAN FORMULA WOOLHOUSE

Formula Woolhouse merupakan suatu formula untuk menentukan nilai tunai anuitas dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun. Formula Woolhouse diperoleh dari pendekatan formula Euler-Maclaurin [1]. Untuk suatu integral fungsi *g* dengan interval $[a,b]$, formula Euler-Maclaurin dinyatakan sebagai berikut :

$$\int_a^b g(x)dx = h\left(\sum_{t=0}^{N} g(a+th) - \frac{1}{2}\left(g(a)+g(b)\right)\right) + \frac{h^2}{12}\left(g'(a)-g'(b)\right) - \frac{h^4}{720}\left(g''(a)-g''(b)\right) + \ldots \qquad (5)$$

dengan $h = \dfrac{(b-a)}{N}$, N adalah bilangan bulat.

Untuk menentukan nilai tunai anuitas dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun, berdasarkan pendekatan formula Euler-Maclaurin, maka persamaan (5) dinyatakan sebagai berikut :

$$\int_a^b g(x)dx \approx h\left(\sum_{t=0}^{N} g(a+th) - \frac{1}{2}\left(g(a)+g(b)\right)\right) + \frac{h^2}{12}\left(g'(a)-g'(b)\right). \qquad (6)$$

Misalkan interval $[a,b]$ menyatakan batas waktu pembayaran anuitas yang dilakukan oleh peserta asuransi jiwa, *N* menyatakan banyaknya periode pembayaran dan *h* menyatakan besar pembayaran tiap periode sehingga dengan menggunakan garis waktu dapat diilustrasikan sebagai berikut :

Waktu	a	$a+h$	$a+2h$	$\ldots$	$a+(N-1)h$	b
Jumlah Pembayaran	0	h	$2h$	$\ldots$	$(N-1)h$	Nh

Kemudian berdasarkan persamaan (6), ditentukan nilai tunai anuitas dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Pertama, untuk nilai tunai anuitas dengan pembayaran sekali dalam setahun, ambil $a = 0$ dan $b = N = n$ maka $h = \dfrac{b-a}{N} = \dfrac{n-0}{n} = 1$, sehingga diperoleh

$$\int_0^n g(x)dx \approx \sum_{t=0}^{n} g(t) - \frac{1}{2}\left(g(0)+g(n)\right) + \frac{1}{12}\left(g'(0)-g'(n)\right). \qquad (7)$$

Kedua, untuk nilai tunai anuitas dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun, ambil $a = 0$, $b = n$, dan $N = mn$ untuk $m > 1$ maka $h = \dfrac{1}{m}$, sehingga diperoleh

$$\int_0^n g(x)dx \approx \frac{1}{m}\left(\sum_{t=0}^{mn} g\left(\frac{t}{m}\right) - \frac{1}{2}\left(g(0)+g(n)\right)\right) + \frac{1}{12m^2}\left(g'(0)-g'(n)\right). \qquad (8)$$

Kemudian, substitusikan ruas kanan persamaan (7) ke persamaan (8), maka diperoleh

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{mn} g\left(\frac{t}{m}\right) \approx \sum_{t=0}^{n} g(t) - \frac{m-1}{2m}(1) + \frac{m^2-1}{12m^2}\left(-\left(\delta + \mu_{xy}\right)\right). \qquad (9)$$

Untuk menyatakan nilai tunai anuitas seumur hidup dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun, maka persamaan (9) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{t/m}\, {}_{t/m}p_{xy} \approx \sum_{t=0}^{\infty} v^{t}\, {}_{t}p_{xy} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy}\right). \qquad (10)$$

Misalkan terdapat suatu fungsi $g(t)$ yang berkaitan dengan nilai tunai anuitas untuk pembayaran sekali dalam setahun dan dinyatakan dengan

$$g(t) = v^t\, {}_t p_{xy}. \qquad (11)$$

Berdasarkan persamaan (11), substitusikan persamaan (1) dan (2) ke persamaan (10) sehingga diperoleh

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} \approx \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy}\right). \qquad (12)$$

Ruas kanan pada persamaan (12) merupakan nilai tunai anuitas awal seumur hidup untuk status gabungan dari peserta asuransi yang berusia *x* tahun dan *y* tahun dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun berdasarkan formula Woolhouse.

Berdasarkan persamaan (12), diperoleh nilai tunai anuitas akhir seumur hidup dengan pembayaran *m* kali per tahun untuk status gabungan menggunakan formula Woolhouse yang dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{xy}^{(m)} \approx \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy}\right) - \frac{1}{m}$$

$$a_{xy}^{(m)} \approx a_{xy} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy}\right).$$

Selanjutnya, percepatan mortalita dari peserta asuransi jiwa yang berusia *x* tahun berdasarkan formula Woolhouse dinyatakan dengan

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}\left(\log\left(p_{x-1}\right) + \log\left(p_x\right)\right). \qquad (13)$$

Dan percepatan mortalita dari peserta asuransi jiwa yang berusia *y* tahun berdasarkan formula Woolhouse dinyatakan dengan

$$\mu_y \approx -\frac{1}{2}\left(\log\left(p_{y-1}\right) + \log\left(p_y\right)\right). \qquad (14)$$

Berdasarkan persamaan (13) dan (14), diperoleh percepatan mortalita gabungan dari peserta asuransi jiwa yang berusia *x* tahun dan *y* tahun sebagai berikut :

$$\mu_{xy} \approx -\frac{1}{2}\left(\log\left(p_{x-1}\right) + \log\left(p_x\right) + \log\left(p_{y-1}\right) + \log\left(p_y\right)\right). \qquad (15)$$

Nilai tunai anuitas awal berjangka dengan pembayaran sebanyak *m* kali dalam setahun untuk status gabungan berdasarkan formula Woolhouse dinyatakan sebagai berikut :

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - v^n\,{}_n p_{xy}\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy} - v^n\,{}_n p_{xy}\left(\delta + \mu_{x+n,y+n}\right)\right) \qquad (16)$$

Kemudian berdasarkan persamaan (16), diperoleh nilai tunai anuitas akhir berjangka untuk status gabungan dengan pembayaran *m* kali per tahun selama *n* tahun menggunakan formula Woolhouse yang dinyatakan sebagai berikut :

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - v^n\,{}_n p_{xy}\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy} - v^n\,{}_n p_{xy}\left(\delta + \mu_{x+n,y+n}\right)\right) - \frac{1}{m}\left(1 - v^n\,{}_n p_{xy}\right)$$

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} \approx \left(a_{xy:\overline{n}|} + 1 - v^n\,{}_n p_{xy}\right) - \frac{m+1}{2m}\left(1 - v^n\,{}_n p_{xy}\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy} - v^n\,{}_n p_{xy}\left(\delta + \mu_{x+n,y+n}\right)\right)$$

$$a_{xy:\overline{n}|}^{(m)} \approx a_{xy:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - v^n\,{}_n p_{xy}\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_{xy} - v^n\,{}_n p_{xy}\left(\delta + \mu_{x+n,y+n}\right)\right) \qquad (17)$$

Dalam menentukan nilai tunai anuitas menggunakan formula Woolhouse diperlukan percepatan pembungaan dan percepatan mortalita dari peserta asuransi jiwa. Untuk menentukan nilai tunai anuitas akhir menggunakan formula Woolhouse, ditentukan terlebih dahulu nilai tunai anuitas awal menggunakan formula Woolhouse.

4. CONTOH

Misalkan sepasang suami istri, suami berusia 50 tahun dan istri berusia 45 tahun, mengikuti program asuransi jiwa untuk status gabungan dengan tingkat bunga sebesar 10% dan besar pembayaran tiap tahun adalah Rp 300.000. Mereka mengikuti program asuransi jiwa dengan jangka waktu tanggungan selama 20 tahun. Dari data tersebut tentukan :

a. Nilai tunai anuitas awal berjangka untuk status gabungan dengan pembayaran dilakukan setiap 3 bulan di awal periode menggunakan formula Woolhouse.
b. Nilai tunai anuitas akhir berjangka untuk status gabungan dengan pembayaran dilakukan setiap 3 bulan di akhir periode menggunakan formula Woolhouse.

Misalkan *x* menyatakan usia suami dan *y* menyatakan usia istri.

Diketahui $x = 50$ dan $y = 45$, pembayaran dilakukan setiap 3 bulan maka banyaknya pembayaran dalam setahun adalah $m = 4$, tingkat bunga sebesar

$i = 10\%$, berdasarkan [2] maka diperoleh faktor diskon sebesar $v = \frac{1}{1+0,1} = 0,9090$.

a. Sebelum menentukan nilai tunai anuitas awal berjangka untuk status gabungan menggunakan formula Woolhouse, akan ditentukan terlebih dahulu nilai tunai anuitas awal berjangka untuk status gabungan dengan pembayaran sekali dalam setahun, berdasarkan persamaan (3) diperoleh

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|} = \sum_{t=0}^{19} v^t \, {}_t p_{50,45}.$$

Berdasarkan data pada Tabel Mortalita Indonesia Tahun 1999, maka diperoleh

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|} = \sum_{t=0}^{19} v^t \left(\frac{l_{50+t}}{l_{50}} \cdot \frac{l_{45+t}}{l_{45}} \right)$$

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|} = 8,568784.$$

Perhitungan lebih lengkapnya dari anuitas awal berjangka dengan pembayaran sekali dalam setahun untuk status gabungan, dengan menggunakan program Microsoft Excel disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Anuitas Awal Berjangka Untuk Status Hidup Gabungan Dengan Pembayaran Sekali Dalam Satu Tahun

t	v^t	${}_t p_{50,45}$	$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}$	t	v^t	${}_t p_{50,45}$	$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}$
0	1	1	1	10	0.385543	0.8771	0.33816
1	0.909091	0.991468	0.901335	11	0.350494	0.858536	0.300911
2	0.826446	0.982227	0.811758	12	0.318631	0.838587	0.2672
3	0.751315	0.972264	0.730477	13	0.289664	0.817361	0.23676
4	0.683013	0.961626	0.656803	14	0.263331	0.794729	0.209277
5	0.620921	0.950258	0.590036	15	0.239392	0.770555	0.184465
6	0.564474	0.93807	0.529516	16	0.217629	0.744693	0.162067
7	0.513158	0.924827	0.474582	17	0.197845	0.708838	0.14024
8	0.466507	0.910341	0.424681	18	0.179859	0.687941	0.123732
9	0.424098	0.894432	0.379327	19	0.163508	0.6572	0.107457
Jumlah							8.568784

Dengan pembayaran setiap tahun sebesar Rp.300.000, maka nilai tunai anuitas awal dengan pembayaran sekali dalam setahun adalah

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|} = 8,568784 \times Rp.300.000$$
$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|} = Rp2.570.635.$$

Selanjutnya, dapat ditentukan nilai tunai anuitas awal dengan menggunakan formula Woolhouse untuk status gabungan. Berdasarkan persamaan (16), maka diperoleh

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}^{(4)} \approx \ddot{a}_{50,45:\overline{20}|} - \frac{4-1}{2\cdot 4}\left(1 - v^{20}{}_{20}p_{50,45}\right) - \frac{4^2-1}{12\cdot 4^2}\left(\delta + \mu_{50:45} - v^{20}{}_{20}p_{xy}\left(\delta + \mu_{70,65}\right)\right).$$

Sebelumnya, ditentukan terlebih dahulu percepatan pembungaan, berdasarkan [4] maka diperoleh

$$\delta = \log(i+1) = 0{,}041393.$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (15) ditentukan percepatan mortalita gabungan untuk peserta asuransi jiwa yang berusia 50 tahun dan 45 tahun dengan menggunakan formula Woolhouse, berdasarkan data pada Tabel Mortalita Indonesia Tahun 1999, maka diperoleh

$$\mu_{50,45} \approx -\frac{1}{2}\left(\log(p_{49}) + \log(p_{50}) + \log(p_{44}) + \log(p_{45})\right)$$

$$\mu_{50,45} \approx 0{,}003546.$$

Dan percepatan mortalita gabungan hingga 20 tahun berikutnya adalah

$$\mu_{70,65} \approx -\frac{1}{2}\left(\log(p_{69}) + \log(p_{70}) + \log(p_{64}) + \log(p_{65})\right)$$

$$\mu_{70,65} \approx 0{,}022948.$$

Kemudian dapat ditentukan nilai tunai anuitas awal dengan pembayaran 4 kali dalam setahun untuk status gabungan menggunakan formula Woolhouse yaitu

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}^{(4)} \approx 8{,}568784 - 0{,}340164 - 0{,}001545$$

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}^{(4)} \approx 8{,}227075.$$

Dengan pembayaran setiap tahun sebesar Rp.300.000, maka nilai tunai anuitas awal menggunakan formula Woolhouse dengan pembayaran 4 kali dalam setahun adalah

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}^{(4)} \approx 8{,}227075 \times Rp.300.000$$

$$\ddot{a}_{50,45:\overline{20}|}^{(4)} \approx Rp.2.468.123.$$

b. Sebelum menentukan nilai tunai anuitas akhir menggunakan formula Woolhouse, akan ditentukan terlebih dahulu nilai tunai anuitas akhir berjangka untuk status gabungan dengan pembayaran sekali dalam setahun, berdasarkan persamaan (4) maka diperoleh

$$a_{50,45:\overline{20}|} = \sum_{t=1}^{20} v^t \,{}_t p_{50,45}.$$

Kemudian berdasarkan data pada Tabel Mortalita Indonesia Tahun 1999, maka diperoleh

$$a_{50,45:\overline{20}|} = \sum_{t=1}^{20} v^t \left(\frac{l_{50+t}}{l_{50}} \cdot \frac{l_{45+t}}{l_{45}} \right)$$

$$a_{50,45:\overline{20}|} = 7{,}661679.$$

Perhitungan lebih lengkapnya dari anuitas akhir berjangka dengan pembayaran sekali dalam setahun untuk status gabungan, dengan menggunakan program Microsoft Excel disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Anuitas Akhir Berjangka Untuk Status Hidup Gabungan Dengan Pembayaran Sekali Dalam Satu Tahun

t	v^t	${}_t p_{50,45}$	$a_{50,45:\overline{20}|}$	t	v^t	${}_t p_{50,45}$	$a_{50,45:\overline{20}|}$
1	0.909091	0.991468	0.901335	11	0.350494	0.858536	0.300911
2	0.826446	0.982227	0.811758	12	0.318631	0.838587	0.2672
3	0.751315	0.972264	0.730477	13	0.289664	0.817361	0.23676
4	0.683013	0.961626	0.656803	14	0.263331	0.794729	0.209277
5	0.620921	0.950258	0.590036	15	0.239392	0.770555	0.184465
6	0.564474	0.93807	0.529516	16	0.217629	0.744693	0.162067
7	0.513158	0.924827	0.474582	17	0.197845	0.708838	0.14024
8	0.466507	0.910341	0.424681	18	0.179859	0.687941	0.123732
9	0.424098	0.894432	0.379327	19	0.163508	0.6572	0.107457
10	0.385543	0.8771	0.33816	20	0.148644	0.624957	0.092896
Jumlah							7.661679

Dengan pembayaran setiap tahun sebesar Rp.300.000, maka nilai tunai anuitas akhir dengan pembayaran sekali dalam setahun adalah

$$a_{50,45:\overline{20}|} = 7{,}661679 \times Rp.300.000$$

$$a_{50,45:\overline{20}|} = Rp.2.298.504.$$

Selanjutnya, dapat ditentukan nilai tunai anuitas akhir dengan menggunakan formula Woolhouse untuk status gabungan. Berdasarkan persamaan (17), maka diperoleh

$$a_{50,45:\overline{20|}}^{(4)} \approx a_{50,45:\overline{20|}} + \frac{4-1}{2\cdot 4}\left(1 - v^{20}{}_{20}p_{50,45}\right) - \frac{4^2-1}{12\cdot 4^2}\left(\delta + \mu_{50:45} - v^{20}{}_{20}p_{xy}\left(\delta + \mu_{70,65}\right)\right).$$

$$a_{50,45:\overline{20|}}^{(4)} \approx 8{,}000298.$$

Dengan pembayaran setiap tahun sebesar Rp.300.000, maka nilai tunai anuitas akhir menggunakan formula Woolhouse dengan pembayaran 4 kali dalam setahun adalah

$$a_{50,45:\overline{20|}}^{(4)} \approx 8{,}000298 \times Rp.300.000$$

$$a_{50,45:\overline{20|}}^{(4)} \approx Rp.2.400.098.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dickson, D. C. M., M. R. Hardy & H.R. Waters. 2009. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.* Cambridge University Press, New York.

[2] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa*, *Bagian 1*, Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku*, *Jokan ("92 Revision)*, oleh G. Herliyanto. Incorporated Foundation, Tokyo, Japan.

[3] Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa*, *Bagian 2*, Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku*, *Gekan ("92 Revision)*, oleh G. Herliyanto. Incorporated Foundation, Tokyo, Japan.

[4] Kellison, S. G. 1970. *The Theory of Interest*. Richard D. Irwin Inc. Illinois, United State of America.