MODEL INVENTORI TINGKAT PERMINTAAN LINEAR, TINGKAT PRODUKSI TERBATAS DAN KEKURANGAN PERSEDIAAN YANG DIPENUHI SAAT PRODUKSI

Roni Hasudungan H[1], T.P Nababan[2], Endang lily[2]

email : roni_05986@yahoo.com

[1]Mahasiswa program S1 Matematika FMIPA-UR
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

ABSTRACT

This paper discussed about the formulation of the total cost of the average inventory on inventory models using linear functions, where the levels of demand and production are limited. In the model inventory, total cost of the average inventory was obtained from the derivatives of inventory model for time intervals to obtain the minimum value of an optimal solution at the time of production and on going demand. This paper is a review of the work done by C.K. Sahoo and S.K. Sahoo International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, 2010.

Keywords : Inventory Model, Finite Rate of Production

1. PENDAHULUAN

Persediaan adalah sumber daya menganggur (*idle resources*) yg menunggu proses lebih lanjut. Yang dimaksud dengan proses lebih lanjut tersebut adalah berupa kegiatan produksi pada system manufaktur, kegiatan pemasaran pada system distribusi ataupun kegiatan konsumsi pangan pada sistem rumah tangga. Persoalan persediaan muncul bila diperlukan untuk menyediakan atau pemesanan stok barang atau komoditas dengan tujuan untuk memenuhi permintaan sepanjang waktu tertentu atau tak berhingga, dimana sering juga muncul permasalahan tentang besarnya persediaan yang harus disiapkan dan dalam jangka waktu berapa lama persediaan itu harus disediakan.

Bila jumlah persediaan terlalu tinggi dapat memberikan resiko biaya penyimpanan (*holding cost*) terlalu tinggi. Bila tingkat persediaan terlalu rendah dapat mengakibatkan resiko biaya kekurangan barang (*shortage*) dan dapat menyebabkan interupsi yang mahal dalam sistem yang bersangkutan. Dalam artikel ini penulis mempelajari ulang dari artikel yang ditulis oleh Sahoo C.K. dan Sahoo S.K. [3] yang berjudul *"An Inventory Model with Linear Demand Rate, Finite Rate of Production with Shortages and Complete Backlogging"*.

2. MODEL INVENTORI TINGKAT PERMINTAAN LINEAR

Sistem model persediaan dalam satu periode :

$$\mathrm{R}(t) = \alpha\, t \qquad , \alpha > 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{K}(t) = \lambda\, \mathrm{R}(t) = \lambda\alpha t \qquad (\lambda>1) \tag{2}$$

Karena K(t) > R(t) maka tingkat kekurangan semakin lama menjadi turun. Pada waktu $t = t_2$ tingkat kekurangan menjadi P = 0, dan mulai $t = t_2$ tersebut terjadi penimbunan barang yang semakin lama semakin meningkat. Pada waktu $t = t_3$ saat tingkat persediaan mencapai S produksi dihentikan, tetapi permintaan tetap berjalan. Dengan demikian pada waktu $t = t_3$ tingkat persediaan mulai turun, hingga pada waktu $t = t_4$ tingkat persediaan menjadi S = 0. Selanjutnya sistem pada model persediaan tersebut dapat dirumuskan kedalam bentuk matematika sebagai berikut :

Misalkan lintasan tingkat persediaan dalam satu periode untuk setiap t adalah Q(t), maka diperoleh

$$\frac{dQ}{dt} = -\,\mathrm{R}(t) \qquad \text{untuk } 0 \le t \le t_1 \tag{3}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \mathrm{K}(t) - \mathrm{R}(t) \qquad \text{untuk } t_1 \le t \le t_2 \tag{4}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \mathrm{K}(t) - \mathrm{R}(t) \qquad \text{untuk } t_2 \le t \le t_3 \tag{5}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\,\mathrm{R}(t) \tag{6}$$

dengan syarat batas,

$$\mathrm{Q}(0) = 0,\ \mathrm{Q}(t_1) = -\,P,\ \mathrm{Q}(t_2) = 0,\ \mathrm{Q}(t_3) = S \text{ dan } \mathrm{Q}(t_4) = 0$$

Di bagian ini dengan mensubtitusikan R(t) = αt dan K(t) = $\lambda\alpha t$ kedalam persamaan (3) sampai dengan persamaan (6) dapat dirumuskan tingkat persediaan barang untuk masing-masing intervalnya :

$$\mathrm{Q}(t) = -\int_0^t \alpha t\ \mathrm{dt} = -\left.\frac{\alpha}{2}t^2\right]_0^t = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)t^2 \qquad \text{untuk } 0 \le t \le t_1 \tag{7}$$

$$\mathrm{Q}(t) = \int_t^{t_2} (\lambda-1)\alpha t\ \mathrm{dt} = \left.\frac{(\lambda-1)\alpha t^2}{2}\right]_t^{t_2}$$

$$= -\,\frac{\alpha(\lambda-1)\left(t^2 - t_2^2\right)}{2} \qquad \text{untuk } t_1 \le t \le t_2 \tag{8}$$

$$\mathrm{Q}(t) = \int_t^{t_3} (\lambda - 1)\alpha t \, \mathrm{d}t = \left. \frac{(\lambda-1)\alpha t^2}{2} \right]_0^{t_3}$$

$$= - \frac{\alpha(\lambda-1)(t^2 - t_3^2)}{2} \qquad \text{untuk } t_2 \le t \le t_3 \qquad (9)$$

$$\mathrm{Q}(t) = -\int_t^{t_4} \alpha t \;\; dt \;\; = -\left. \frac{\alpha t}{2} \right]_t^{t_4}$$

$$= - \frac{\alpha}{2}\left[t_4^2 - t^2\right] \qquad \text{untuk } t_2 \le t \le t_4 \qquad (10)$$

Karena diberikan syarat batas $Q(t_1) = -P$ maka pada persamaan (7) diperoleh

$$P = \left(\frac{\alpha}{2}\right)t_1^2 \qquad (11)$$

Begitu juga pada persamaan (8) diperoleh

$$P = -\left(\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\right)\left(t_1^2 - t_2^2\right) \qquad (12)$$

Untuk mencari t_1 diperoleh dari persamaan (11) dan persamaan (12)

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)t_1^2 = \left(\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\right)\left(t_1^2 - t_2^2\right)$$

$$\alpha\, t_1^2 = \alpha(\lambda-1)t_1^2 + \alpha(\lambda-1)t_2^2$$

$$0 = \alpha\lambda\, t_1^2 + \alpha(\lambda-1)t_2^2$$

$$t_1^2 = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)t_2^2$$

$$t_1^2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)t_2^2$$

$$t_1 = t_2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

Karena diketahui syarat batas Q(t_3) = S maka persamaan (10) menjadi

$$S = \frac{\alpha}{2}\left(t_4^2 - t_3^2\right) \qquad (14)$$

Demikian juga dengan persamaan (9) menjadi

$$S = \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\left(t_3^2 - t_2^2\right) \tag{15}$$

untuk menentukan nilai t_3 diperoleh dari persamaan (14) dan persamaan (15) yaitu :

$$\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\left(t_3^2 - t_2^2\right) = \frac{\alpha}{2}\left(t_4^2 - t_3^2\right)$$

$$\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}t_3^2 - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}t_2^2 = \frac{\alpha}{2}t_4^2 - \frac{\alpha}{2}t_3^2$$

$$\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}t_3^2 + \frac{\alpha}{2}t_3^2 = \frac{\alpha}{2}t_4^2 + \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}t_2^2$$

$$t_3^2\left(\frac{\alpha(\lambda-1)}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}t_4^2 + \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}t_2^2$$

$$t_3^2\left(\frac{\alpha}{2}\left((\lambda-1)+1\right)\right) = \frac{\alpha}{2}\left(t_4^2 + (\lambda-1)\right)t_2^2$$

$$t_3^2 = \frac{t_4^2 + (\lambda-1)t_2^2}{\lambda}$$

$$t_3 = \left(\frac{t_4^2 + t_2^2(\lambda-1)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

Dari persamaan (7) dan persamaan (8) adalah interval-interval waktu pada keadaan kekurangan barang. Oleh karena itu dapat dirumuskan total kekurangan barang pada interval tersebut sebagai berikut :

$$T_B = \int_0^{t_1} -Q(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} -Q(t)dt$$

$$= \int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2}t^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\left(t^2 - t_2^2\right)dt$$

$$= \frac{\alpha}{6}t_1^3 + \frac{\alpha(\lambda-1)}{6}t^3\Big]_{t_1}^{t_2} - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}t_2^2 t_1\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \frac{\alpha}{6}t_1^3 + \frac{\alpha(\lambda-1)}{6}\left(t_2^3 - t_1^3\right) - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\left(t_2^3 - t_2^2 t_1\right)$$

$$= \frac{\alpha}{6} t_1^3 - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left\{ \frac{t_2^3 - t_1^3}{3} - t_2^2 (t_2 - t_1) \right\}. \tag{17}$$

Jika biaya kekurangan c_2 unit uang untuk unit barang, maka diperoleh total biaya kekurangan yaitu

$$SC = c_2 \left[\frac{\alpha}{6} t_1^3 - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left\{ \frac{t_2^3 - t_1^3}{3} - t_2^2 (t_2 - t_1) \right\} \right] \tag{18}$$

Total penyimpanan dalam satu periode adalah

$$HC = \int_{t_2}^{t_3} Q(t)dt + \int_{t_3}^{t_4} Q(t)dt$$

$$= \int_{t_2}^{t_3} \frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left(t^2 - t_2^2\right) dt + \int_{t_3}^{t_4} \frac{\alpha}{2} \left(t_4^2 - t^2\right) dt$$

$$= \frac{\alpha(\lambda-1)}{6} t^3 \Big]_{t_2}^{t_3} - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2} t_2^2 t \Big]_{t_2}^{t_3} + \frac{\alpha}{2} t_4^2 t \Big]_{t_3}^{t_4} - \frac{\alpha}{6} t^3 \Big]_{t_3}^{t_4}$$

$$= \frac{\alpha(\lambda-1)}{6} \left(t_3^3 - t_2^3\right) - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left(t_2^2 t_3 - t_2^3\right) + \frac{\alpha}{2} \left(t_4^3 - t_4^2 t_3\right) - \frac{\alpha}{6} \left(t_4^3 - t_3^3\right)$$

$$= \left[\frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left\{ \frac{t_3^3 - t_2^2}{3} - t_2^2 (t_3 - t_2) \right\} + \frac{\alpha}{2} \left\{ t_4^2 (t_4 - t_3) - \frac{t_4^3 - t_3^3}{3} \right\} \right] \tag{19}$$

Jika biaya penyimpanan c_1 atau uang untuk setiap unit barang, maka diperoleh total resiko biaya penyimpanan. Total biaya dalam satu periode adalah sebagai berikut :

$$HC = c_1 \left[\frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left\{ \frac{t_3^2 - t_2^3}{3} - t_2^3 (t_3 - t_2^2) \right\} + \frac{\alpha}{2} \left\{ t_4^2 (t_4 - t_3) - \frac{t_4^3 - t_3^3}{3} \right\} \right] \tag{20}$$

Maka Total biaya persediaan rata-rata diperoleh dengan

$$C_r = \frac{1}{t_4} \left(SC + HC + c_3\right)$$

$$= \frac{1}{t_4} \left[c_2 \left[\frac{\alpha}{6} t_1^3 - \frac{\alpha(\lambda-1)}{2} \left\{ \frac{t_2^3 - t_1^3}{3} - t_2^2 (t_2 - t_1) \right\} \right] \right]$$

$$+c_1\left[\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}c_2\left\{\frac{t_3^3-t_2^2}{3}-t_2^2(t_3-t_2)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}\left\{t_4^2(t_4-t_2)-\frac{t_4^3-t_3^3}{3}\right\}\right]+c_3\Bigg] \tag{21}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (13) dan persamaan (16) kedalam persamaan (21) maka diperoleh

$$C_r=\frac{1}{t_4}\left[c_2\left[\frac{\alpha}{6}t_2^3\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}\left\{\frac{t_2^3-t_2^3\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-t_2^2\left(t_2-t_2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}\right]\right]$$

$$+c_1\left[\frac{\alpha(\lambda-1)}{2}-\left\{\frac{\frac{t_4^2+t_2^2(\lambda-1)^{\frac{3}{2}}}{\lambda}-t_2^2}{3}-t_2^2\left(\frac{\left(t_4^2+t_2^2(\lambda-1)^{\frac{1}{2}}\right)}{\lambda}-t_2\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}\left\{t_4^2(t_4-t_2)-\frac{t_4^3-\frac{\left(t_4^2+t_2^2(\lambda-1)^{\frac{1}{2}}\right)}{\lambda}}{3}\right\}\right]+c_3\Bigg] \tag{22}$$

Contoh Numerik

Dibawah ini dibahas contoh permasalahan dan pemecahan tentang model persediaan yang diambil dari jurnal [3] sebagai berikut:
Pada model persediaan (P) diketahui :

- Rata-rata permintaan barang yang berbentuk fungsi linear, $R(t)=200t$, t adalah waktu dalam jam.
- Rata-rata produksi, $K(t)=2{,}5\ R(t) = 500t$
- Biaya persiapan persediaan, $c_1 = 20\$$
- Biaya penyimpanan, $c_2 = 30\$$ untuk satu unit perjam

Biaya kekurangan barang, $c_3 = 40\$$ untuk satu unit perjam

Tentukan C_r^*, P^* dan S^*

Penyelesaian

Dengan mensubtitusikan nilai $\lambda = 2{,}5$, $\alpha = 200$, $c_1 = 20$, $c_2 = 30$ dan $c_3 = 40$ kedalam persamaan (21) dan persamaan (22), maka diperoleh nilai $t_2 = 0{,}399245$ dan $t_4 = 0{,}691232$ nilai t_2, t_4 dan $\lambda = 2{,}5$ disubtitusikan pada persamaan (16) maka diperoleh nilai $t_3 = 0{,}535498$, selanjutnya untuk mencari nilai t_1 maka nilai t_2 dan λ disubtitusikan kedalam persamaan (13).

Untuk mencari nilai total biaya minimum, maka nilai t_1, t_2, t_3, t_4, λ dan α. Disubtitusikan kedalam persamaan (22), sehinga diperoleh $C_r^* = 918032\$$. Kemudian untuk menentukan tingkat persedian optimal maka nilai t_1, t_2, λ dan α disubtutisikan kedalam persamaan (14) sehingga diperoleh $P^* = 9{,}5638$ dan kekurangan barang optimal adalah $S^* = 19{,}1044$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Goel, B.S & Mittal, S. K. 1979. *Operation Research*. Fourth Ertarge and Revised Edition. Pragati Prakhasan, India.

[2] Hiller, S. F. dan G. J. Liebermen. 1995. *Pengantar Riset Operasi Edisi ke lima:Jilid 1*. Terj. Dari Introduction to Operation Research, oleh Gunawan, E. S., Wirda, A.M. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[3] Sahoo, C.K & Sahoo, S.K. 2010. *An Inventory Model with Linear Demand Rate, Finite Rate of Production with Shortages and Complete Backlogging.* International Conference on Industrial Engineering and Operations Management.

[4] Shibsankar, S. 2004. *On a volume Flekxible Inventory Model* ; Advanced Modelling and Optimation. 6(2):1-12

[5] Taha, A. Hamdy. 1993. Operation Research : *An Introduction. Fifth Edition.* Prentice-Hall International Edition.