SIFAT-SIFAT SEMIGRUP SIMETRIS INTERVAL

Rizan Febri Yusman[1], Sri Gemawati[2], Asli Sirait[2]

*rizan_febri@yahoo.com

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya, 28293, Indonesia

ABSTRACT

Interval set is a set from an object whose elements consist of intervals. A set of all one-to-one and onto mappings from interval set to the other for all with composition operation which from a semigrup is called interval semigroup. In this paper some symmetric semigroup on certain intervals were discused. Some of the properties discused were isomorphic, S-interval symmetric semigroup, S-weakly cyclic interval symmetric semigroup and S-weakly commutative interval symmetric semigroup which are expressed in some theorems.

Keywords: *Interval, Himpunan Interval, Semigrup Interval, Smarandache*

1. PENDAHULUAN

Struktur Aljabar adalah suatu bidang ilmu dalam bidang matematika yang sangat penting, karena ilmu ini sangat erat hubungannya dengan ilmu yang lain. Struktur aljabar merupakan suatu himpunan dengan satu atau lebih operasi-operasi pada himpunan. Himpunan tersebut disebut himpunan dasar dari struktur aljabar.

Himpunan merupakan kumpulan dari suatu objek. Yang masing-masing objek disebut elemen atau anggota atau unsur dari himpunan. Operasi biner merupakan suatu fungsi dari $S \times S$ ke S, yang membawa setiap $(a,b) \in S \times S$ ke $a * b \in S$ yang tunggal.

Suatu himpunan S dengan operasi biner dan bersifat assosiatif disebut semigrup. Jika semigrup memiliki identitas maka disebut dengan monoid, dan jika setiap unsur monoid mempunyai invers disebut dengan grup. Semigrup interval adalah himpunan semua pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan interval ke himpunan interval untuk semua dengan operasi komposisi membentuk semigrup. Dalam tulisan ini dibahas “ Sifat-Sifat Semigrup Simetris Interval “ yang diambil dari buku yang berjudul *“ Interval Semigroup ”* karangan W.B. Vasantha Kandasamy dan Florentin Smarandache.

2. INTERVAL DAN SEMIGRUP INTERVAL

Konsep-konsep yang akan dibahas dalam karya tulis ini merupakan materi-materi pendukung yang diambil dari beberapa referensi yaitu [1] , [2] , [3], [4] dan [5].

Definisi 1 Himpunan

Himpunan merupakan kumpulan dari suatu objek. Yang masing-masing objek disebut elemen atau anggota atau unsur dari himpunan.

Definisi 2 Operasi Biner

Operasi biner merupakan suatu fungsi dari $S \times S$ ke S, yang membawa setiap $(a,b) \in S \times S$ ke $a * b \in S$ yang tunggal. Dalam hal ini biasanya operasi biner ditandai dengan $*$. Jadi terdapat pemetaan $* : S \times S \to S$. Untuk sepasang (a,b) di $S \times S$.

Definisi 3 Interval

Jika $a,b \in \Re$ memenuhi $a < b,$ maka dapat ditulis didalam himpunan

$$(a,b) \ = \{x \in \ \Re \ : \ a < x < b\}$$

Titik *a* dan *b* disebut titik ujung pada interval, tetapi tidak termasuk di interval terbuka. Jika titik ujung termauk didalam interval terbuka, maka diperoleh interval tertutup yang ditentukan oleh *a* dan *b*, yakni di himpunan

$$[a,b] \ = \{x \in \Re \ : a \leq x \leq b\}$$

Misalkan I adalah suatu interval dan sifat yang jelas dari interval adalah bahwa jika dua titik x dan y dengan $x < y \in I$, maka setiap titik diantara selang tersebut juga termasuk dalam *I*, yaitu $x, y \in I$.

Definisi 4 Semigrup

Suatu himpunan S dengan operasi biner $*$ dan bersifat asosiatif disebut semigrup.
S dikatakan asosiatif terhadap operasi biner * jika $x*(y*z) = (x*y)*z \ \forall \ x,y,z \in S$

Definisi 5 Grup Simetris

Misalkan A adalah himpunan tak hingga $\{1,2,...,n\}$. Semua permutasi grup dari A adalah grup simetris di n dan ditandai dengan S_n. S_n mempunyai elemen $n!$ dimana $n! = n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$

Definisi 6 Siklik

Suatu grup $(G,\cdot)$ disebut siklik jika terdapat elemen $g \in G$ menunjukkan bahwa $G = \{g^n \mid n \in Z\}$. Elemen g disebut pembangun dari grup siklik.

Definisi 7 Bijektif

Misalkan $\phi : A \to B$, jika $B = \phi(A)$ maka ϕ disebut surjektif atau onto. Jika $\phi : A \to B$, jika $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$ mengakibatkan $a_1 \neq a_2$ maka ϕ disebut injektif atau satu-satu. Jika $\phi : A \to B$ adalah keduanya surjektif dan injektif maka disebut bijektif.

Definisi 8 Isomorphis

Pemetaan $\phi : G \to G'$ adalah isomorpis jika

1. ϕ adalah bijektif, dan
2. $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$

Jika ϕ isomorpis dari $G \to G'$ maka G adalah isomorpis ke G'.

Definisi 9 Permutasi

Suatu permutasi dari himpunan A adalah fungsi pemetaan dari A ke A satu-satu dan pada. Dengan kata lain, permutasi dari A adalah fungsi satu-satu dari A pada A.

Contoh 1 : Misalkan himpunan $A = \{1,2,3\}$, $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1) = (2) = (3)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (2,3)$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (1,2)$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (1,2,3)$$

$$\sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1,3,2)$$

$$\sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1,3)$$

Jadi banyaknya permutasi adalah $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Dengan operasi komposisi didapat :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_2 \in S_3, \text{ tertutup}$$

Untuk menentukan tertutup selanjutnya dengan cara yang sama dapat dilihat pada Tabel 2.1.

$$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\circ\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\right)\circ\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}=\sigma_5,\ \text{asosiatif.}$$

Maka S_3 adalah semigrup. Untuk menentukan asosiatif selanjutnya dengan cara yang sama dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1

$\circ$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_1	σ_5	σ_6	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_6	σ_1	σ_5	σ_4	σ_2
σ_4	σ_4	σ_5	σ_6	σ_1	σ_2	σ_3
σ_5	σ_5	σ_4	σ_2	σ_3	σ_6	σ_1
σ_6	σ_6	σ_3	σ_4	σ_2	σ_1	σ_5

Definisi 10 Semigrup Interval

Misalkan $S=\{[0,a_i]\,|\,a_i\in Z_n;+\}$. S adalah semigrup operasi penjumlahan modulo n. S adalah semigrup interval penjumlahan modulo n.

Contoh 2 : Misalkan $S=\{[0,0],[0,1],[0,2]\}$, S adalah semigrup interval penjumlahan.

1). Tertutup

Tabel 2.2

+	[0,0]	[0,1]	[0,2]
[0,0]	[0,0]	[0,1]	[0,2]

$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,2]$	$[0,0]$
$[0,2]$	$[0,2]$	$[0,0]$	$[0,1]$

2). Asosiatif

$$x*(y*z)=(x*y)*z$$
$$[0,0]+([0,1]+[0,2])=([0,0]+[0,1])+[0,2]$$
$$[0,3]=[0,3]$$
$$[0,0]=[0,0]$$

Dari tabel 2.2 dan pembuktian asosiatif didapat bahwa S adalah semigrup interval terhadap operasi penjumlahan.

Didalam buku karangan W.B Vasantha Kandasamy dan Florentin Smarandache, tidak ada definisi mengenai Smarandache tetapi ada penjelasannya. Maka dari penjelasan itu akan dibuat pengertian tentang Smarandache yang tidak mengubah arti dari yang ada dibuku.

Semigrup S dikatakan Smarandache semigrup (S-semigrup) jika S mempunyai subgrup sejati dari subsemigrup S dengan menggunakan operasi dan juga S membentuk grup. Jika setiap subgrup simetris interval dibangun oleh satu unsur maka disebut S-semigrup simetris interval siklik dan jika terdapat satu subgrup simetris interval yang tidak siklik maka disebut S-semigrup simetris interval siklik lemah. Jika paling sedikit hanya satu komutatif dari subgrup simetris interval maka disebut S-semigrup simetris interval komutatif lemah [5].

3. SIFAT-SIFAT SEMIGRUP SIMETRIS INTERVAL

Pada bagian ini akan dibahas mengenai beberapa sifat-sifat semigrup simetris interval yang terdapat didalam buku yang berjudul " *Interval Semigrup* " karangan W.B. Vasantha Kandasamy dan Florentin Smarandache.

Definisi 11 Semigrup Simetris Interval

Misalkan $X=\{[0,a_1],[0,a_2],\ldots,[0,a_n]\}$ adalah himpunan interval untuk setiap n buah interval berbeda. $\eta : X \rightarrow X$adalah pemetaan interval jika $\eta\ [0,a_i]=[0,a_j];\ 1\le i,j\le n$.

Misalkan $S(X)$ adalah koleksi dari semuapemetaan intervaldari $X\rightarrow X$ atau $S(X)=\{\ \eta : X\rightarrow X \mid \eta \text{ pemetaan interval}\}$. $S(X)$ dengan operasi komposisi dari pemetaan adalah semigrup yang disebut dengan semigrup simetris interval. Dapat diilustrasikan dengan contoh.

Contoh 3 : Misalkan $X=\{[0,a_1],[0,a_2]\}$ adalah himpunan interval dengan $a_1\neq a_2$, himpunan semua pemetaan dari $X\rightarrow X$ adalah :

$\eta_1 : X\rightarrow X$dengan, $\eta_1([0,a_1])\ =\ [0,a_1]$ dan $\eta_1([0,a_2])=[0,a_2]$,

$\eta_2 : X \to X$ dengan, $\eta_2([0, a_1]) = [0, a_2]$ dan $\eta_2([0, a_2]) = [0, a_1]$,

$\eta_3 : X \to X$ dengan, $\eta_3([0, a_1]) = [0, a_1]$ dan $\eta_3([0, a_2]) = [0, a_1]$,

$\eta_4 : X \to X$dengan, $\eta_4([0, a_1]) = [0, a_2]$ dan $\eta_4([0, a_2]) = [0, a_2]$,

sehingga diperoleh $S(X) = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$, dan $S(X)$ dengan operasi komposisi pada pemetaan semigrup simetris interval. Maka banyaknya anggota $S(X)$ adalah $2^2 = 4$.

Dalam skripsi ini $S(X)$ adalah semigrup simetris interval dengan $X = \{[0, a_1], [0, a_2], ... [0, a_n]\}$ dengan $a_i \neq a_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ yang banyak anggotanya n^n.

Teorema 1. Misalkan $S(n)$ adalah semigrup simetris di himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan $S(X)$semigrup simetris interval di himpunan $X = \{[0, a_1], [0, a_2] \ldots., [0, a_n]\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $a_i > 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Maka $S(n)$ adalah isomorfis dengan $S(X)$.

Bukti: Semigrup simetris $S(n)$ mempunyai anggota n^n. Banyaknya anggota dari semigrup simetris interval $S(X)$ dengan $X = \{[0, a_1], [0, a_2] \ldots., [0, a_n]\}$ juga n^n. $[0, a_i] = x_i$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $S(n)$ adalah himpunan semua pemetaan dari $(1, 2, \ldots, n)$ kedirinya sendiri yang asosiatif pada setiap i untuk X_i ; $1 \leq i \leq n$. Karena banyak anggota dari $S(n)$ adalah n^n dan $S(X)$ adalah n^n maka dapat dibuat pemetaan atau koresponden satu-satu antara $S(n)$ dan $S(X)$, sehingga $S(n)$ isomorfis dengan $S(X)$.

Teorema 2. Misalkan $S(X)$ adalah semigrup simetris interval dengan $X = \{[0, a_1], [0, a_2], \ldots., [0, a_n]\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 < i, j < n$. Maka $S(X)$ adalah S-semigrup simetris interval.

Bukti : Bentuk : $P(X) = \{\eta : X \to X \mid n \text{ bijektif}\}$, maka $P(X)$ adalah subgrup dari subsemigrup sejati $S(X)$ dan dengan operasi komposisi berdasarkan Definisi 3.4.2 $P(X)$ disebut grup simetris maka $S(X)$ adalah S- semigrup simetris interval.

Teorema 3. Misalkan $S(X)$ adalah semigrup simetris interval dengan $X = \{[0, a_1], [0, a_2], \ldots., [0, a_n]\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 < i, j < n$. Maka $S(X)$ adalah S-semigrup simetris interval siklik lemah.

Bukti : Dengan menggunakan Teorema 2 maka diperoleh $S(X)$ adalah S-semigrup simetris interval.

Jika $n = 1$, $X = \{[0, a_1]\}$ maka $S(X) = \{\eta_1\}$ yaitu $\eta_1 = [0, a_1] \to [0, a_1]$ dan dengan operasi komposisi maka tidak dapat menentukan siklik lemahnya.

Jika $n = 2$, $X = \{[0, a_1], [0, a_2]\}$ maka $S(X) = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ yaitu $\eta_1 = [0, a_1] \to [0, a_1]$,
$\eta_1 = [0, a_2] \to [0, a_2]$,

$\eta_2 = [0, a_1] \rightarrow [0, a_2]$, $\eta_2 = [0, a_2] \rightarrow [0, a_1]$,

$\eta_3 = [0, a_1] \rightarrow [0, a_1]$, $\eta_3 = [0, a_1] \rightarrow [0, a_2]$,

$\eta_4 = [0, a_1] \rightarrow [0, a_2]$, $\eta_4 = [0, a_2] \rightarrow [0, a_2]$,

dengan operasi komposisi maka $P = \{\eta_1, \eta_2\}$ adalah siklik.

$$\eta_1 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_2] \end{cases} \qquad \eta_2 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_1] \end{cases}$$

jika $n = 3$, $X = \{[0, a_1], [0, a_2], [0, a_3]\}$ maka $S(X) = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{27}\}$, dengan operasi komposisi maka $P_1 = \{\eta_1, \eta_2\}$ adalah siklik.

$$\eta_1 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_3] \end{cases} \qquad \eta_2 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_3] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_2] \end{cases}$$

dengan cara yang sama maka $P_2 = \{\eta_1, \eta_3\}$, $P_3 = \{\eta_1, \eta_4\}$ dan $P_4 = \{\eta_1, \eta_5, \eta_6\}$ adalah siklik.

$P_2 = \{\eta_1, \eta_3\}$,

$$\eta_1 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_3] \end{cases} \qquad \eta_3 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_3] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_1] \end{cases}$$

$P_3 = \{\eta_1, \eta_4\}$,

$$\eta_1 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_3] \end{cases} \qquad \eta_4 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_3] \end{cases}$$

$P_4 = \{\eta_1, \eta_5, \eta_6\}$,

$$\eta_1 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_3] \end{cases} \qquad \eta_5 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_2] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_3] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_1] \end{cases}$$

$$\eta_6 : \begin{cases} [0, a_1] & \rightarrow & [0, a_3] \\ [0, a_2] & \rightarrow & [0, a_1] \\ [0, a_3] & \rightarrow & [0, a_2] \end{cases}$$

dengan cara yang sama $P_5 = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6\}$ tidak siklik, karena terdapat unsur dari P_5 yang tidak siklik maka $S(X)$ merupakan S-semigrup simetris interval siklik lemah.

Jika $n = 4$, $X = \{[0,a_1],[0,a_2],[0,a_3],[0,a_4]\}$ maka $S(X) = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{256}\}$ dengan operasi komposisi maka $P_1 = \{\eta_1, \eta_2\}$ adalah siklik.

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_3] \\ [0,a_4] \to [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_2 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_4] \\ [0,a_4] \to [0,a_3] \end{cases}$$

dengan cara yang sama maka $P_2 = \{\eta_1, \eta_3\}, P_3 = \{\eta_1, \eta_4\}, P_4 = \{\eta_1, \eta_5, \eta_6\}, P_5 = \{\eta_1, \eta_7, \eta_8\}$, $P_6 = \{\eta_1, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11}\}, P_7 = \{\eta_1, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}, \eta_{15}\}$ adalah siklik.

$P_2 = \{\eta_1, \eta_3\}$,

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_3] \\ [0,a_4] \to [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_3 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_4] \\ [0,a_3] \to [0,a_3] \\ [0,a_4] \to [0,a_2] \end{cases}$$

$P_3 = \{\eta_1, \eta_4\}$,

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_3] \\ [0,a_4] \to [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_4 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_3] \\ [0,a_3] \to [0,a_2] \\ [0,a_4] \to [0,a_4] \end{cases}$$

$P_4 = \{\eta_1, \eta_5, \eta_6\}$

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_1] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_3] \\ [0,a_4] \to [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_5 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_4] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_3] \\ [0,a_4] \to [0,a_1] \end{cases}$$

$$\eta_6 = \begin{cases} [0,a_1] \to [0,a_3] \\ [0,a_2] \to [0,a_2] \\ [0,a_3] \to [0,a_1] \\ [0,a_4] \to [0,a_4] \end{cases}$$

$P_5 = \{\eta_1, \eta_7, \eta_8\}$,

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_7 = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_4] \end{cases}$$

$$\eta_8 = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_4] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_2] \end{cases}$$

$P_6 = \{\eta_1, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11}\}$,

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_9 = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_4] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_3] \end{cases}$$

$$\eta_{10} = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_4] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_1] \end{cases} \qquad \eta_{11} = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_4] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_3] \end{cases}$$

$P_7 = \{\eta_1, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}, \eta_{15}\}$,

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_{12} = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_4] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_1] \end{cases}$$

$$\eta_{13} = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_4] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_2] \end{cases} \qquad \eta_{14} = \begin{cases} [0,a_1] & \to & [0,a_2] \\ [0,a_2] & \to & [0,a_3] \\ [0,a_3] & \to & [0,a_1] \\ [0,a_4] & \to & [0,a_4] \end{cases}$$

$$\eta_{15} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_4] \end{cases}$$

dengan cara yang sama $P_8 = \{\eta_1, \eta_{16}, \eta_{17}, \eta_{18}, \eta_{19}, \eta_{20}, \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}\}$ dan $P_9 = \{\eta_1, ..., \eta_{24}\}$ tidak siklik, karena terdapat unsur dari P_8 dan P_9 yang tidak siklik maka $S(X)$ merupakan S-semigrup simetris interval siklik lemah.

$P_8 = \{\eta_1, \eta_{16}, \eta_{17}, \eta_{18}, \eta_{19}, \eta_{20}, \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}\}$

$$\eta_1 = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_4] \end{cases} \qquad \eta_{16} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_3] \end{cases}$$

$$\eta_{17} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_1] \end{cases} \qquad \eta_{18} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_2] \end{cases}$$

$$\eta_{19} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_1] \end{cases} \qquad \eta_{20} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_3] \end{cases}$$

$$\eta_{21} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_2] \end{cases} \qquad \eta_{22} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_1] \end{cases}$$

$$\eta_{23} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_3] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_2] \end{cases} \qquad \eta_{24} = \begin{cases} [0,a_1] & \rightarrow & [0,a_2] \\ [0,a_2] & \rightarrow & [0,a_4] \\ [0,a_3] & \rightarrow & [0,a_1] \\ [0,a_4] & \rightarrow & [0,a_3] \end{cases}$$

$P_9 = \{\eta_1, ..., \eta_{24}\}$,

jika diteruskan maka diperoleh $S(X)$ yang S-semigrup simetris interval siklik lemah untuk n yang lainnya.

Teorema 4. Misalkan $S(X)$ adalah semigrup simetris interval dengan $X = \{[0, a_1], [0, a_2], \ldots, [0, a_n]\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, jika $a_i > 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Maka $S(X)$ adalah hanya Smarandache semigrup simetris interval komutatif lemah.

Bukti : Seperti yang telah diuraikan dalam bukti Teorema 2 diperoleh :

Untuk $n=1$ dan dengan operasi komposisi maka tidak dapat menentukan komutatif lemahnya.
Untuk $n=2$ dan dengan cara yang sama diperoleh P adalah komutatif.
Untuk $n=3$ dan dengan cara yang sama diperoleh P_1, P_2, P_3, P_4 adalah komutatif tetapi P_5 tidak komutatif maka $S(X)$ hanya Smarandache semigrup simetris interval komutatif lemah. Jika diteruskan maka diperoleh $S(X)$ hanya Smarandache semigrup simetris interval komutatif lemah untuk n yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, Robert G dan Donald R. Shrebert . 1999 . *Real Analysis* . John Wiley & ons, Inc. New York

[2] Dornhoff, Larry L . 1977 . *Applied Modern Algebra* . acmillan Publishing CO Inc. New York

[3] Fraleigh, John B . *A First Course In Abstarct Algebra* . Addison Wesley Publishing Company. Columbia

[4] Gilbert, Jimmie dan Linda Gilbert. 1991. *Elements of Modern Algebra*. PWS-KENT Publishing Company. Boston

[5] Kandasamy, W.B Vasantha dan Smarandache, Florentin. 2011. *Interval Semigrup.*