METODE ITERASI BARU DENGAN KONVERGENSI ORDE ENAM UNTUK MENEMUKAN AKAR DARI PERSAMAAN NONLINEAR

R. Hermiati[1*], M. Imran[2], E. Lily[2]

*ratna_hermiati@yahoo.com

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

ABSTRACT

This paper discusses a new Iterative method for finding a root of a nonlinear equation obtained by combining Newton, Cordero and Torregrosa, and Parhi and Gupta methods. It is shown analytically that the new iterative method is of six order. The numerical simulation result is in agreement with the analytic finding.

Keywords: *Cordero and Torregrosa Method, Newton Method, Parhi and Gupta Method, nonlinear equation*

1. PENDAHULUAN

Salah satu masalah penting yang sering muncul dalam matematika khususnya analisa numerik yaitu menemukan akar sederhana dari persamaan nonlinear yaitu $f(x) = 0$. Metode analitik dapat digunakan untuk menemukan akar sederhana dari persamaan nonlinear. Namun tidak semua persamaan nonlinear dapat diselesaikan dengan metode analitik, sebagai alternatif dapat digunakan metode numerik. Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan nonlinear, dan yang sering digunakan adalah metode Newton [2, h.68] dengan bentuk umum iterasinya yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \quad \text{dan} \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

yang memiliki kekonvergenan orde dua [2, h.68]. Akhir akhir ini banyak peneliti yang menggabungkan metode Newton, seperti yang dilakukan oleh Cordero dan Torregrosa [5], yang menggabungkan metode Newton dengan metode iterasi yang diturunkan berdasarkan metode Newton Cotes terbuka untuk tiga titik [1] yang menghasilkan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3f'(x_n)}{2f'\left(\frac{3x_n+y_n}{4}\right) + f'\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) + 2f'\left(\frac{x_n+3y_n}{4}\right)},$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Parhi dan Gupta [6] menyajikan metode iterasi tiga langkah-langkahnya terdiri dari metode Newton, metode iterasi yang diturunkan berdasarkan Aturan Trapesium, dan modifikasi metode Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)},$$

dengan

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{(f'(y_n) + f'(x_n))},$$

dan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Selanjutnya Rostam K. Saeed [7] menggabungkan iterasi yang dikemukakan oleh Cordero dan Torregrosa dan iterasi Parhi dan Gupta, yang menghasilkan bentuk iterasi tiga langkah:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1}$$

$$z_n = x_n - \frac{3f'(x_n)}{2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) + f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})}, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \tag{3}$$

Pada artikel ini metode iterasi tiga langkah dikembangkan menjadi metode iterasi baru. Kemudian ditunjukkan orde konvergensi [4, h.89] metode yang dikemukakan. Pembahasan ini merupakan kajian detail dari tulisan [7].

2. METODE ITERASI BARU DENGAN KONVERGENSI ORDE ENAM

Bila ditaksir $f'(z_n)$ dengan menggunakan interpolasi dua titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$, diperoleh

$$f'(x) = \frac{x - x_n}{y_n - x_n}f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n}f'(x_n), \tag{4}$$

dengan mengambil $x = z_n$ pada persamaan (4) diperoleh

$$f'(z_n) = \frac{z_n - x_n}{y_n - x_n}f'(y_n) + \frac{z_n - y_n}{x_n - y_n}f'(x_n). \tag{5}$$

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke persamaan (5) diperoleh

$$f'(z_n) = \frac{f'(x_n)\left(3f'(y_n) - 3f'(x_n) + \left(2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) - f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})\right)\right)}{2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) - f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})}. \tag{6}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (3) diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)\left\{2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) + f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})\right\}}{f'(x_n)\left\{3f'(y_n) - 3f'(y_n) + 2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) + f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})\right\}}, \quad (7)$$

dengan

$$z_n = x_n - \frac{3f'(x_n)}{2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) + f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})}, \quad (8)$$

dan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (9)$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa metode iterasi yang diberikan persamaan (7)–(9) mempunyai order konvergensi enam sebagaimana disajikan Teorema 1.

Teorema 1 Misalkan $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk interval terbuka D. Asumsikan fungsi f mempunyai turunan secukupnya yang kontinu untuk semua x di sekitar α dan asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$. Jika x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke α, maka persamaan (7)–(9) mempunyai orde konvergensi enam dengan persamaan tingkat kesalahan

$$e_{n+1} = (-3c_2^3c_3 + c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7).$$

dengan $c_j = (\frac{1}{j!})\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad j = 1, 2, 3.$

Bukti.
Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan asumsikan $f'(x) \neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor [3, h.183-184] untuk $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, dan memisalkan $e_n = x_n - \alpha$ diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7)), \quad (10)$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + 7c_7e_n^6). \quad (11)$$

dimana $c_j = (\frac{1}{j!})\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

Jika persamaan (10) dibagi dengan persamaan (11), dan dengan bantuan deret geometri

$$\frac{1}{1+r} \approx 1 - r + r^2 - r^3 + r^4... \quad (12)$$

maka sesudah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - [&e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + (-4c_2^3 + 7c_2c_3 - 3c_4)e_n^4\\ &+ (6c_3^2 - 4c_5 + 8c_2^4 + 10c_2c_4 - 20c_2^2c_3)e_n^5\\ &+ (52c_2^3c_3 - 5c_6 + 17c_3c_4 - 28c_2^2c_4 + 13c_2c_5\\ &- 33c_2c_3^2 - 16c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7)]. \quad (13)\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (13) ke persamaan (9) didapat:

$$\begin{aligned} y_n = \alpha &+ c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (-6c_3^2 + 4c_5 - 8c_2^4 \\ &- 10c_2c_4 + 20c_2^2c_3)e_n^5 + (-52c_2^3c_3 + 5c_6 - 17c_3c_4 + 28c_2^2c_4 - 13c_2c_5 \\ &+ 33c_2c_3^2 + 16c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{14}$$

Selanjutnya ditentukan Ekspansi Taylor $f(y_n)$ dan $f'(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$, sebagaimana prosedur untuk menemukan $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(y_n) = f'(\alpha)[&c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_2c_3 + 5c_2^3)e_n^4 \\ &+ (-10c_2c_4 - 6c_3^2 - 12c_2^4 + 24c_2^2c_3 + 4c_5)e_n^5 \\ &+ (5c_6 + 28c_2^5 - 17c_3c_4 - 13c_2c_5 + 34c_2^2c_4 \\ &+ 37c_2c_3^2 - 73c_2^3c_3)e_n^6 + O(e_n^7)]. \end{aligned} \tag{15}$$

dan

$$\begin{aligned} f'(y_n) = f'(\alpha)[&1 + 2c_2^2e_n^2 + (4c_2c_3 - 4c_n^3)e_n^3 + (6c_2c_4 - 11c_3c_2^2 + 8c_2^4)e_n^4 \\ &+ (28c_3c_2^3 - 20c_4c_2^2 + 8c_2c_5 - 16c_2^5)e_n^5 + (-16c_4c_3c_2 \\ &- 68c_3c_2^4 - 26c_2^2c_5 + 10c_2c_6 + 32c_2^6 + 60c_2^3c_4 + 12c_3^3)e_n^6 \\ &+ O(e_n^7)], \end{aligned} \tag{16}$$

dimana sebelum penyederhanaan digunakan terlebih dahulu persamaan (14).

Kemudian dihitung $f'(\frac{x_n+y_n}{2})$, $f'(\frac{3x_n+y_n}{4})$ dan $f'(\frac{x_n+3y_n}{4})$ dengan mengingat $x_n = \alpha + e_n$ dan persamaan (14) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{x_n + y_n}{2} = \alpha &+ \frac{e_n}{2} + \frac{1}{2}c_2e_n^2 + (c_3 - c_2^2)e_n^3 + (2c_2^3 + \frac{3}{2}c_4 - \frac{7}{2}c_2c_3)e_n^4 \\ &+ (-5c_2c_4 + 2c_5 + 4c_2^4 + 10c_2^2c_3 - 3c_3^2)e_n^5 + (e\frac{-17}{2}c_3c_4 \\ &+ \frac{33}{2}c_2c_3^2 + \frac{5}{2}c_6 - 26c_2^3c_3 + 8c_2^5 + 14c_2^2c_4 - \frac{13}{2}c_2c_5)e_n^6 \\ &+ O(e_n^7). \end{aligned} \tag{17}$$

Misalkan $\frac{x_n+y_n}{2} = v_n$. Kemudian ditentukan ekspansi Taylor untuk $f'(v_n)$ disekitar $v_n = \alpha$, dilanjutkan dengan mensubstitusikan persamaan (17) ke persamaan yang diperoleh dan mengingat $f(\alpha) = 0$, setelah penyederhanaan maka diperoleh

$$\begin{aligned} f'(\frac{x_n + y_n}{2}) = f'(\alpha)[&1 + c_2e_n + (c_2^2 + \frac{3}{4}c_3)e_n^2 + (-2c_2^3 + \frac{1}{2}c_4 + \frac{7}{2}c_2c_3)e_n^3 \\ &+ (3c_3^2 + \frac{9}{2}c_2c_4 + \frac{5}{16}c_5 + 4c_2^4 - \frac{37}{4}c_2^2c_3)e_n^4 \\ &+ (\frac{3}{16}c_6 - \frac{27}{2}c_2c_3^2 - \frac{21}{4}c_2c_5 - 8c_2^5 + 23c_2^3c_3 \\ &- \frac{23}{2}c_2^2c_4 + \frac{15}{2}c_3c_4)e_n^5 + (-6c_3^3 - 55c_2^4c_3 + \frac{17}{2}c_3c_5 \\ &+ 16c_2^6 + \frac{9}{2}c_4^2 + \frac{95}{16}c_2c_6 + \frac{7}{64}c_7 - 32c_2c_3c_4 \\ &- \frac{109}{8}c_2^2c_5 + \frac{93}{2}c_2^2c_3^2 + \frac{57}{2}c_2^3c_4)e_n^6 + O(e_n^7)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Kemudian dengan mengikuti prosedur yang sama dihitung $\frac{3x_n+y_n}{4}$, $f'\big(\frac{3x_n+y_n}{4}\big)$, $\frac{x_n+3y_n}{4}$, dan $f'\big(\frac{x_n+3y_n}{4}\big)$, dan berturut-turut diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{3x_n+y_n}{4} &= \alpha + \frac{3}{4}e_n + \frac{1}{4}c_2e_n^2 - \frac{1}{2}(c_2e_2^2) + (c_2^3 + \frac{3}{4}c_4 - \frac{7}{2}c_2c_3)e_n^4\\ &+ (-5c_2c_4 + c_5 - 2c_2^4 + 5c_2^2c_3 - 3c_3^2)e_n^5 + (\frac{-17}{4}c_3c_4\\ &+ \frac{33}{4}c_2c_3^2 + \frac{5}{4}c_6 - 13c_2^3c_3 + 4c_2^5 + 7c_2^2c_4 - \frac{13}{4}c_2c_5)e_n^6\\ &+ O(e_n^7),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) &= f'(\alpha)[1 + \frac{3}{2}c_2e_n + (\frac{1}{2}c_2^2 + \frac{27}{16}c_3)e_n^2 + (-c_2^3 + \frac{17}{8}c_2c_3\\ &+ \frac{27}{16}c_4)e_n^3 + (\frac{51}{16}c_2c_4 + \frac{9}{4}c_3^2 - \frac{89}{16}c_2^2c_3 + \frac{405}{256}c_5)e_n^4\\ &+ (\frac{263}{64}c_2c_5 - \frac{125}{16}c_2^2c_4 - \frac{81}{8}c_2c_3^2 + \frac{55}{4}c_2^3c_3 + \frac{27}{4}c_3c_4\\ &+ \frac{729}{512}c_6 - 4c_2^5)e_n^5 + (\frac{-131}{4}c_2^4c_3 + \frac{81}{16}c_4^2 + \frac{2495}{512}c_2c_6\\ &+ \frac{279}{32}c_3c_5 - \frac{1237}{128}c_2^2 + \frac{5103}{4096}c_7 + \frac{297}{16}c_2^3c_4 - 6c_3^3\\ &- \frac{451}{16}c_2c_3c_4 + \frac{279}{8}c_2^2c_3^2 + 8c_2^6)e_n^6 + O(e_n^7)],\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_n+3y_n}{4} &= \alpha + \frac{1}{4}e_n + \frac{3}{4}c_2e_n^2 - \frac{3}{4}(c_3 - c_2^2)e_n^3 + (3c_2^3 + \frac{9}{4}c_4 - \frac{21}{4}c_2c_3)e_n^4\\ &+ (-15c_2c_4 + 3c_5 - 6c_2^4 + 15c_2^2c_3 - 9c_3^2)e_n^5 + (\frac{-51}{4}c_3c_4 + \frac{99}{4}c_2c_3^2\\ &+ \frac{15}{4}c_6 - 39c_2^3c_3 + 12c_2^5 + 21c_2^2c_4 - \frac{39}{4}c_2c_5)e_n^6 + O(e_n^7).\end{aligned} \tag{21}$$

dan

$$\begin{aligned}f'(\frac{x_n+3y_n}{4}) &= f'(\alpha)[(1 + \frac{1}{2}c_2e_n + (\frac{3}{16}c_3 + \frac{3}{2}c_2^2)e_n^2 + (\frac{33}{8}c_2c_3 - 3c_2^3\\ &+ \frac{1}{16}c_4)e_n^3 + (\frac{81}{16}c_2c_4 + 6c_2^4 + \frac{15}{256}c_5 - \frac{177}{16}c_2^2c_3\\ &+ \frac{9}{4}c_3^2)e_n^4 + (\frac{399}{64}c_2c_5 + \frac{111}{4}c_2^3c_3 - \frac{81}{8}c_2c_3^2 + \frac{3}{512}c_6\\ &+ \frac{9}{2}c_3c_4 - \frac{231}{16}c_2^2c_4 - 12c_2^5)e_n^5 + (\frac{27}{16}c_4^2 + \frac{7}{4096}c_7\\ &- \frac{267}{4}c_2^4c_3 + \frac{159}{32}c_3c_5 - \frac{2421}{128}c_2^2c_5 + \frac{279}{8}c_2^2c_3^2\\ &+ \frac{627}{16}c_2^3c_4 + \frac{3885}{512}c_2c_6 - \frac{381}{16}c_2c_3c_4 + 24c_2^6)e_n^6 + O(e_n^7))].\end{aligned} \tag{22}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (10), (18), (20), dan (22) dihitung $3f(x_n)$ dan $2f'(\frac{3x_n+y_n}{4}) - f'(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})$ diperoleh

$$3f(x_n) = 3(f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7))), \tag{23}$$

dan

$$\begin{aligned}
&2f'(\frac{3x_n+y_n}{4})-f'(\frac{x_n+y_n}{2})+2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})\\
&\qquad=((\frac{151}{8}c_3c_5+93c_2^2c_3^2-6c_3^3+\frac{2443}{1024}c_7+48c_2^6+\frac{1215}{64}c_2c_6\\
&\qquad\quad-\frac{1393}{32}c_2^2c_5-72c_2c_3c_4+9c_4^2+87c_2^3c_4-144c_2^4c_3)e_n^6+(\frac{171}{64}c_6\\
&\qquad\quad+15c_3c_4-27c_2c_3^2+60c_2^3c_3-33c_2^2c_4-24c_2^5+\frac{247}{16}c_2c_5)e_n^5\\
&\qquad\quad+(\frac{185}{64}c_5-24c_2^2c_3+6c_3^2+12c_2c_4+12c_2^4)e_n^4+(-6c_2^3+3c_4\\
&\qquad\quad+9c_2c_3)e_n^3+(3c_2^2+3c_3)e_n^2+3c_2e_n+3)f'(\alpha). \qquad (24)
\end{aligned}$$

Bila persamaan (23) dibagi dengan persamaan (24) dan dengan bantuan deret geometri (12) setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}
&3f(x_n)\frac{1}{2f'(\frac{3x_n+y_n}{4})-f'(\frac{x_n+y_n}{2})+2f'(\frac{x_n+3y_n}{4})}\\
&=e_n-(\frac{995}{192}c_2c_5-\frac{7}{64}c_6+29c_2^3c_3+5c_3c_4-16c_2^2c_4-9c_2^5-14c_2c_3^2)e_n^6+(2c_3^2\\
&\quad-\frac{7}{192}c_5+4c_2c_4-12c_2^2c_3+6c_2^4)e_n^5+(-3c_2^3+3c_2c_3)e_n^4+c_2^2e_n^3. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (25) ke persamaan(8) didapat

$$\begin{aligned}
z_n=&(\frac{995}{192}c_2c_5-\frac{7}{64}c_6+29c_2^3c_3+5c_3c_4-16c_2^2c_4-9c_2^5-14c_2c_3^2)e_n^6+(2c_3^2\\
&-\frac{7}{192}c_5+4c_2c_4-12c_2^2c_3+6c_2^4)e_n^5+(-3c_2^3+3c_2c_3)e_n^4+c_2^2e_n^3+\alpha. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Dengan melakukan ekspansi Taylor dari $f(z_n)$ disekitar $z_n=\alpha$ dan menggunakan persamaan (26) serta mengingat $f(\alpha)=0$, setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}
f(z_n)=&c_2^2e_n^3+(-3c_2^3+3c_2c_3)e_n^4+(-\frac{7}{192}c_5+6c_2^4-12c_2^2c_3+4c_2c_4+2c_3^2)e_n^5\\
&+(-\frac{7}{64}c_6+\frac{995}{192}c_2c_5-8c_2^5+5c_3c_4-16c_2^2c_4-14c_2c_3^2+29c_2^3c_3)e_n^6\\
&+O(e_n^7). \qquad (27)
\end{aligned}$$

Jika persamaan (27) dikali dengan persamaan (24) didapat

$$\begin{aligned}
&f(z_n)(2f'(\frac{3x_n+y_n}{4})-f'(\frac{x_n+y_n}{2})+2f'(\frac{x_n+3y_n}{4}))=[(-9c_2c_3^2+20c_2^3c_3\\
&\quad+\frac{247}{48}c_2c_5-7c_2^5+5c_3c_4-11c_2^2c_4-\frac{7}{64}c_6)e_n^6+(4c_2^4-\frac{7}{192}c_5+2c_3^2\\
&\quad+4c_2c_4-8c_2^2c_3)e_n^5+(-2c_2^3+3c_2c_3)e_n^4+c_2^2e_n^3+O(e_n^7)]f'(\alpha)^2. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung $\left(3f^{'}(y_n) - 3f^{'}(x_n)\right)$ dengan menggunakan persamaan (11) dan (16), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\left(3f^{'}(y_n) - 3f^{'}(x_n)\right) =&(-78c_2^2c_5 + 180c_2^3c_4 - 204c_2^4c_3 - 48c_2c_3c_4 - 21c_7\\ &+ 36c_3^3 + 30c_2c_6 + 96c_2^6)e_n^6 + (24c_2c_5 - 60c_2^2c_4 + 84c_2^3c_3\\ &- 18c_6 - 48c_2^5)e_n^5 + (-15c_5 + 24c_2^4 + 18c_2c_2 - 33c_2^2c_3)e_n^4\\ &+ (-12c_4 - 12c_2^3 + 12c_2c_3)e_n^3 + (-9c_3 + 6c_2^2)e_n^2 - 6c_2e_n\\ &+ O(e_n^7)f'(\alpha). \end{aligned} \tag{29}$$

Bila persamaan (29) ditambah dengan persamaan (24) kemudian hasil yang diperoleh dikalikan dengan persamaan (11) didapat

$$\begin{aligned}&f'(x_n)\left(3f^{'}(y_n) - 3f^{'}(x_n) + 2f^{'}(\frac{3x_n+y_n}{4}) - f^{'}(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f^{'}(\frac{x_n+3y_n}{4})\right)\\ &\quad= [(-9c_4^2 + 16c_2^4c_3 + \frac{25}{32}c_2^2c_5 + 16c_3^3 + 28c_2c_3c_4 + \frac{7}{64}c_2c_6\\ &\quad- 44c_2^2c_3^2 + 3c_2^3c_4 - \frac{3037}{192}c_3c_5 + \frac{2443}{3072}c_7)e_n^6 + (-12c_3c_4\\ &\quad- 8c_2^3c_3 + \frac{57}{64}c_6 + c_2^2c_4 + 16c_2c_3^2 + \frac{7}{96}c_2c_5)e_n^5 + (\frac{185}{192}c_5\\ &\quad- 4c_3^2 + 4c_2^2c_3)e_n^4 + c_4e_n^3 + (c_3 + c_2^2)e_n^2 + c_2e_n + 1 + O(e_n^7)]f'(\alpha)^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Selanjutnya persamaan (28) dibagi dengan persamaan (30), dengan menggunakan formula (12), maka setelah penyederhanaan diperoleh

$$\begin{aligned}&f(z_n)\frac{(2f^{'}(\frac{3x_n+y_n}{4}) - f^{'}(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f^{'}(\frac{x_n+3y_n}{4}))}{f^{'}(x_n)\left(3f^{'}(y_n) - 3f^{'}(x_n)\right) + \left(2f^{'}(\frac{3x_n+y_n}{4}) - f^{'}(\frac{x_n+y_n}{2}) + 2f^{'}(\frac{x_n+3y_n}{4})\right)}\\ &\quad=(3c_2c_3 - 3c_2^3)e_n^4 + (-12c_2^2c_3 - \frac{7}{192}c_5 + 4c_2c_4 + 6c_2^4 + 2c_3^2)e_n^5 + (-16c_2^2c_4\\ &\quad+ 32c_2^3c3 + \frac{995}{192}c_2c_5 - \frac{7}{64}c_6 + 5c_3c_4 - 14c_2c_3^2 - 10c_2^5)e_n^6 + c_2^2e_n^3 + O(e_n^7). \end{aligned} \tag{31}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (25), (31) ke persamaan (3.5) didapat

$$\begin{aligned}x_{n+1} =&((\frac{995}{192}c_2c_5 - \frac{7}{64}c_6 + 29c_2^3c_3 + 5c_3c_4 - 16c_2^2c_4 - 9c_2^5 - 14c_2c_3^2)e_n^6 + (2c_3^2\\ &- \frac{7}{192}c_5 + 4c_2c_4 - 12c_2^2c_3 + 6c_2^4)e_n^5 + (-3c_2^3 + 3c_2c_3)e_n^4 + c_2^2e_n^3 + \alpha)\\ &- ((3c_2c_3 - 3c_2^3)e_n^4 + (-12c_2^2c_3 - \frac{7}{192}c_5 + 4c_2c_4 + 6c_2^4 + 2c_3^2)e_n^5\\ &+ (-16c_2^2c_4 + 32c_2^3c3 + \frac{995}{192}c_2c_5 - \frac{7}{64}c_6 + 5c_3c_4 - 14c_2c_3^2 - 10c_2^5)e_n^6\\ &+ c_2^2e_n^3) + O(e_n^7), \end{aligned}$$

atau

$$x_{n+1} = \alpha + (-3c_2^3c_3 + c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7). \tag{32}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ maka persamaan (32) menjadi

$$e_{n+1} = (-3c_2^3c_3 + c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7).$$

Maka metode Iterasi Baru terbukti memiliki orde konvergensi enam. □

4. SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan untuk melakukan perbandingan komputasi metode Iterasi Baru dengan metode iterasi Newton, Corderro dan Torregrosa dan metode Iterasi Parhi dan Gupta. Persamaan nonlinear yang digunakan dalam perbandingan adalah:

1. Fungsi Polinomial: $f_1(x) = x^3 - 4x^2 - 10$
2. Fungsi Trigonometri: $f_2(x) = (\sin(x))^2 - x^2 + 1$
3. Fungsi Eksponensial: $f_3(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2$
4. Fungsi Polinomial: $f_4(x) = x^3 - 10$

Kriteria penghentian iterasi (*stopping criteria*) adalah $error = |x_n - x_{n-1}| < toleransi$ dengan $toleransi = 1.5 \times 10^{-14}$ dan jumlah iterasi maksimum yang diizinkan adalah 100 iterasi. Semua komputasi dilakukan dengan menggunakan program Matlab 7.0.1.

Tabel 1 menunjukkan Hasil simulasi numerik dengan pemilihan tebakan awal yang berbeda untuk ke empat fungsi yang diberikan. Dari Tabel 1, berdasarkan iterasi yang dihasilkan keempat metode dalam mendekati akar persamaan nonlinear dapat dilihat bahwa Metode Iterasi Baru memiliki jumlah iterasi yang lebih kecil dibandingkan dengan Metode Newton, Metode Iterasi Cordero dan Torregrosa, Metode Iterasi Parhi dan Gupta. Pada Tabel 1 juga terlihat bahwa pada semua tebakan awal yang diambil, Metode Iterasi Baru selalu konvergen sedangkan metode pembanding ada yang tidak konvergen.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abramowitz, M & Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formula, Graphs, and Mathematical Table. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series.* 887.

[2] Atkinson, K. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2rd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Bartle, R. G. & D. R. Shebert. 1999. *Introduction to Real Analysis, 3rd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[4] Conte, S. D. 1980. *Dasar-Dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma, 3rd Ed.* Erlangga, Jakarta.

[5] Cordero, A & Torregrosa, J. R. 2007. Variants of Newton's Method Using Fifth-Order Quadrature Formulas. *Applied Mathematics and Computation*, 190: 686-698.

[6] Parhi, S. K. & Gupta, D. K. 2008. Six Order Method for Nonlinear Equation. *Applied Mathematics and Computation.* 1393-1397.

[7] Saeed, R. K. 2010. Six Order Iterative for Solving Nonlinear Equation. *World Applied Sciences Journal. 11(11)*: 1393-1397.

Tabel 1: Hasil Komputasi Perbandingan Metode Iterasi Newton, Metode Iterasi Cordero dan Torregrosa, Metode Iterasi Parhi dan Gupta, dan Metode Iterasi Baru

Fungsi	x_0	Metode	n	Akar	$\|x_{n+1} - x_n\|$
1	-5.3	MN	41	1.36523001341410	3.33067e-015
		MICTO3	$n > 100$	-2.66674082591624	6.94836e-007
		MIPGO6	49	1.36523001341410	0.00000e+000
		MIBO6	14	1.36523001341410	0.00000e+000
	-1.1	MN	46	1.36523001341410	0.00000e+000
		MICTO3	23	1.36523001341410	1.33227e-015
		MIPGO6	11	1.36523001341410	0.00000e+000
		MIBO6	6	1.36523001341410	0.00000e+000
2	0.1	MN	16	1.40449164821534	2.22045e-016
		MICTO3	46	1.40449164821534	2.22045e-016
		MIPGO6	7	1.40449164821534	0.00000e+000
		MIBO6	7	1.40449164821534	0.00000e+000
	1.0	MN	7	1.40449164821534	2.22045e-016
		MICTO3	5	1.40449164821534	2.22045e-016
		MIPGO6	3	1.40449164821534	2.22045e-016
		MIBO6	3	1.40449164821534	0.00000e+000
3	-4.1	MN	7	0.25753028543986	0.00000e+000
		MICTO3	5	0.25753028543986	0.00000e+000
		MIPGO6	4	0.25753028543986	0.00000e+000
		MIBO6	3	0.25753028543986	9.99201e-015
	2.7	MN	6	0.25753028543986	1.99840e-015
		MICTO3	5	0.25753028543986	0.00000e+000
		MIPGO6	3	0.25753028543986	2.22045e-016
		MIBO6	3	0.25753028543986	2.22045e-016
4	-2.0	MN	12	2.15443469003188	0.00000e+000
		MICTO3	6	2.15443469003188	0.00000e+000
		MIPGO6	7	2.15443469003188	0.00000e+000
		MIBO6	5	2.15443469003188	0.00000e+000
	0.1	MN	19	2.15443469003188	0.00000e+000
		MICTO3	$n > 100$	0.11101908478973	1.35904e-004
		MIPGO6	7	2.15443469003188	4.44089e-016
		MIBO6	7	2.15443469003188	0.00000e+000