

PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA SALAH SATU SUB-KELAS GRAF UNICYCLIC

Leo Fadriq Kostaroz¹, Rolan Pane², Aziskhan²

Leo_matem05@yahoo.com

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya Pekanbaru, 28293, Indonesia

ABSTRACT

Labeling of a graph is a theory that is often encountered in various fields such as graph decomposition, cryptology, radar kristalogi x-ray, coding theory, circuit design and communication networks. This study aims to demonstrate that the graph-like unicyclic cycle also make the magic total labeling super total labeling one side - super magical. The super magic total labeling will we associate with one type of graph is unicyclic graph. Unicyclic a graph is said to have the magical super if obtained from the settlement cycle on a two-dimensional grid by a set of row transformation side.

Key words: *Super Edge Magic Total Labeling, Cycle, Unicyclic Graph.*

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Berbagai macam pelabelan graf dikaji dan berkembang, baik konsep itu muncul untuk keperluan aplikasi maupun teoritis. Aplikasi pelabelan graf dapat dijumpai dalam berbagai bidang diantaranya dekomposisi graf, kriptografi, radar, kristalogi x-ray, teori koding, desain sirkuit dan desain jaringan komunikasi.

Pada tahun 1967, Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib pada graf $G(V, E)$ sebagai fungsi bijektif

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + E(G)\} \quad (1)$$

Yang memenuhi kondisi bahwa ;

$$f(u) + f(uv) + f(v) = k \quad (2)$$

Konstanta k disebut sebagai angka ajaib untuk pelabelan tersebut. Pelabelan ini kemudian diberi nama ulang menjadi pelabelan total sisi-ajaib oleh Wallis dkk (2000) untuk membedakan dengan konsep pelabelan ajaib lainnya.

2. DEFINISI GRAF

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan berpasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut dengan sisi.

3. PELABELAN PADA GRAF

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan biasanya bilangan bulat. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain dari fungsi adalah sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Dan jika domainnya titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

4. PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan sisi E . Banyaknya titik di G adalah $|V(G)|$, dan banyaknya sisi di G adalah $|E(G)|$.

Definisi 2.3.1[3] *Pelabelan total sisi-ajaib super pada graf G adalah fungsi bijektif f dari*

$$V(G) \cup E(G) \text{ ke } \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\} \quad (3)$$

sedemikian sehingga untuk sebarang sisi uv di G berlaku

$$f(u) + f(uv) + f(v) = k \quad (4)$$

Untuk suatu konstanta k .

Bukti : Bukti dari definisi ini dapat dilihat pada [3]

Definisi 2.3.2 Pelabelan total sisi-ajaib f pada graf G disebut pelabelan total sisi-ajaib jika

$$f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}. \quad (5)$$

Bukti : Bukti dari definisi ini dapat dilihat pada [3]

Teorema 2.3.3[4] Setiap cycle C_n adalah sisi-ajaib super jika dan hanya jika n ganjil.

Bukti : Bukti dari definisi ini dapat dilihat pada [4]

Lemma 2.3.4[3] Suatu graf G dengan n titik dan m sisi adalah graf sisi-ajaib super jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\} \quad (6)$$

Sedemikian sehingga himpunan

$$S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\} \quad (7)$$

terdiri dari j bilangan bulat terurut. Dalam kasus ini, f diperluas menjadi pelabelan total sisi-ajaib super dari G dengan konstanta ajaib

$$k = |V(G)| + |E(G)| + s \quad (8)$$

dimana $s = \min(S)$

dan

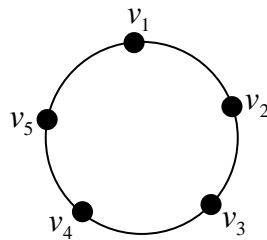
$$\begin{aligned} S &= \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\} \\ &= \{k - (|V(G)| + 1), k - (|V(G)| + 2), \dots, k - (|V(G)| + |E(G)|)\} \end{aligned} \quad (9)$$

Bukti : Bukti dari definisi ini dapat dilihat pada [3]

5. GRAF UNICYCLIC

Graf unicyclic adalah graf terhubung sederhana dimana jumlah sisi sama dengan jumlah titik. Suatu *unicyclic* C berorder n disebut *cycle-like* jika diperoleh dari penempelan *cycle* pada *grid* dua dimensi oleh suatu himpunan dari sebarisan transformasi sisi. Karena label-label titik dari C_n sama dengan label-label titik pada P_n maka transformasi sisi mempertahankan sifat pelabelan total sisi-ajaib super pada graf baru.

Contoh Gambar :



Gambar 1. *Cycle Unicyclic untuk C_5*

6. GRAF CYCLE-LIKE UNICYCLIC

Graf *cycle-like unicyclic* dikonstruksikan dengan memperumumkan ide dari *path-like tree* yaitu dengan menempelkan *cycle* pada *grid* dengan menggunakan pentransformasian sisi yaitu mengubah sisi uv menjadi $u'v'$.

Teorema 3.1[3] *Semua graf cycle-like unicyclic adalah graf total sisi-ajaib super*

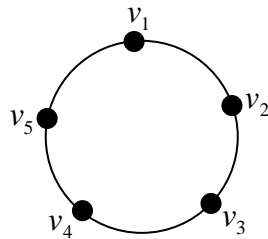
Bukti : Bukti dari definisi ini dapat dilihat pada [3]

7. CONTOH APLIKASI

Misalkan C adalah *cycle-like unicyclic* dengan order n , dapat kita tulis dengan C_n dengan $n=5$. Tentukan pelabelan total sisi-ajaib super dari *cycle* dan pelabelan total sisi-ajaib super dari *cycle-like unicyclic*.

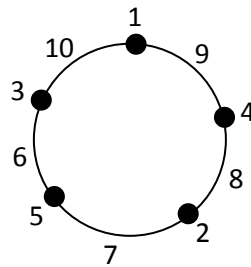
Penyelesaian :

Misalkan $C_n = C_5$, dimana himpunan titik $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



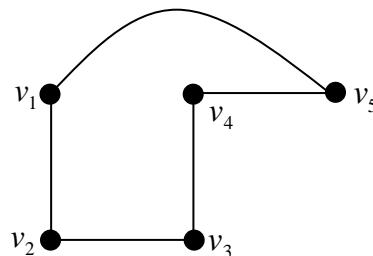
Gambar 2. Cycle Unicyclic untuk C_5

Untuk menentukan letak titik dan sisi pada graf G , gunakan **Teorema 3.1[3]** *Semua graf cycle-like unicyclic adalah graf total sisi-ajaib super.* Dari hasil **Teorema 3.1[3]**, Didapatkan pelabelan total-sisi ajaib super untuk C_5 adalah :



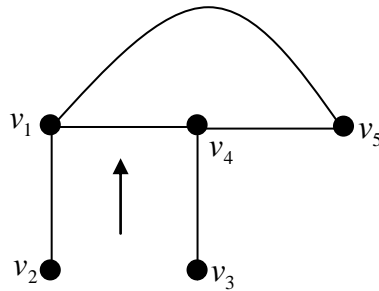
Gambar 3. Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super untuk C_5

Gambar 4 memperlihatkan penempelan *cycle* pada *grid*.



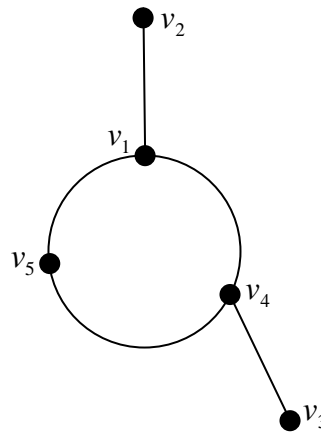
Gambar 4. Hasil Penempelan *Cycle* pada *Grid*

Gambar 5. memperlihatkan hasil pentransformasian sisi v_2v_3 ke sisi v_1v_4



Gambar 5. Hasil Transformasi Sisi pada Cycle

Sehingga diperoleh suatu *Cycle-like Unicyclic* dengan 5 Titik



Gambar 6. *Cycle-like Unicyclic* dengan 5 titik

Andaikan graf $U_{j+1}, j \in \{0,1,2,\dots,p\}$ adalah hasil dari proses pentransformasian sisi dengan mengubah sisi uv pada U_j menjadi sisi $u'v'$. Himpunan titik-titik pada U_j dapat dibagi menjadi dua sub-kelas yang saling lepas:

$$\begin{aligned} V_1^j &= \{v_i \in V(U_j) \mid i \text{ ganjil}\} \\ V_2^j &= \{v_i \in V(U_j) \mid i \text{ genap}\} \end{aligned} \tag{10}$$

Untuk dua kasus ini diperoleh $f(u) + f(v) = f(u') + f(v')$. Dengan menggunakan Lemma 2.3.4 dapat disimpulkan bahwa U_j adalah graf total sisi-ajaib super, dimana $j = 0,1,2,\dots,p$. Jadi semua graf *cycle-like unicyclic* adalah graf total sisi-ajaib super.