TAKSIRAN PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MOMEN DAN METODE KUADRAT TERKECIL

Hesty Fanila[1), Arisman Adnan[2), Bustami[2)
hestyfanila@ymail.com

[1)Mahasiswa Program S1 Matematika FMIPA-UR
[2)Dosen Matematika FMIPA-UR
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

ABSTRACT

The methods of moments and least square for estimating parameters of the Weibull distribution that proposed by Razali, et al [6] have been reviewed. Since the estimator of parameters are biased then Mean Square Error for comparing these two estimators was used. Simulation has been conducted using several sample sizes and different parameters. Our study support Razali's result that the method of moments is more efficient than that least square method.

Keywords: *Weibull Distribution, Moments method, Least Square method.*

1. PENDAHULUAN

Statistika inferensi berkaitan dengan pengambilan kesimpulan tentang parameter populasi yang didasarkan pada informasi data sampel dari populasi yang menjadi perhatian. Parameter yang menjadi perhatian dapat berupa rata-rata, variansi dan parameter lainya. Model data sampel dinyatakan dalam bentuk fungsi densitas yang distribusinya tergantung pada parameter yang nilainya tidak diketahui. Metode yang digunakan dalam pendekatan klasik adalah metode momen dan metode kuadrat terkecil.

Penaksir yang baik apabila rata-rata penaksir sama dengan parameter sebenarnya, dinamakan penaksir tak bias, sebaliknya disebut penaksir bias. Untuk penaksir tak bias, penaksir terbaik adalah yang mempunyai variansi terkecil dan untuk penaksir bias, penaksir terbaik adalah yang mempunyai MSE terkecil [2].

Distribusi yang dibahas adalah distribusi Weibull yang sering digunakan dalam pembahasan data uji hidup. Data uji hidup merupakan topik dalam bebagai bidang biomedik dan industri [6]. Fungsi densitas distribusi Weibull [4] dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \left(\beta \frac{x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}}\right) e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad \alpha, \beta > 0 \text{ dan } x \geq 0 \tag{1}$$

dengan x adalah variabel random, α adalah parameter skala dan β adalah parameter bentuk. Parameter α dan β adalah parameter yang akan ditaksir.

Fungsi densitas Weibull pada persamaan (1) memiliki rata-rata $\mu = \alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$ dan variansi $Var(X) = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \right\}$ (lihat [3]) .

Selanjutnya akan dibahas taksiran parameter dengan menggunakan metode momen dan metode kuadrat terkecil disertai dengan MSE nya.

2. PENAKSIR METODE MOMEN

Untuk mendapatkan penaksir distribusi Weibull dengan menggunakan metode momen, diperlukan *mean* dan variansi yang selanjutnya akan ditentukan taksiran parameter α dan β. Dengan mendapatkan momen pusat pertama, selanjutnya akan dilakukan penaksiran terhadap parameter α sebagai berikut [4]:

$$\mu = E(X) = \bar{x} = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

Penaksir untuk parameter α menggunakan metode momen adalah

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)} \tag{2}$$

Selanjutnya, untuk taksiran parameter β akan didapatkan melalui variansi dari distribusi Weibull yang akan dilakukan dengan langkah sebagai berikut:

$$Var(X) = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \right\}$$

$$= \left(\frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \right)^2 \left\{ \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \right\}$$

$$Var(x) = \bar{x}^2 \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} - 1 \right) \tag{3}$$

Untuk mendapatkan taksiran parameter β yaitu dengan membandingkan variansi sampel dengan rata-rata sampel dikuadratkan, sehingga dapat ditulis

$$\frac{S^2}{\bar{x}^2} = \hat{\beta} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)} - 1 \tag{4}$$

dengan

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n-1} \quad \text{dan} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

3. PENAKSIR METODE KUADRAT TERKECIL

Taksiran parameter α dan parameter β ini juga dapat dilakukan dengan metode regresi linear sederhana karena distribusi Weibull dapat ditransformasi dalam bentuk persamaan garis lurus berikut [4]:

$$y = \beta x - \beta \ln(x) \tag{5}$$

Untuk mendapatkan hubungan antara fungsi kumulatif dan parameter, maka akan diambil logaritma natural untuk fungsi distribusi kumulatif,

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$\ln(1 - F(x)) = \ln e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$\ln(1 - F(x)) = -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$$

$$\ln(-\ln(1 - F(x))) = \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$$

$$\ln\left(\ln \frac{1}{1 - F(x)}\right) = \beta(\ln(x) - \ln(\alpha)) \tag{6}$$

Di sini digunakan pendekatan tingkat rata-rata (the mean rank approach) untuk waktu gagal (failure time) dalam bentuk

$$F(x_i) = \frac{i}{n+1} \tag{7}$$

Sehingga dari persamaan (6) dan (7) didapat model regresi linear untuk distribusi Weibull yaitu

$$\ln\left(\ln\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}}\right)=\beta(\ln(x)-\ln(\alpha)) \tag{8}$$

Taksiran koefisien regresi $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ dapat dicari dengan meminimumkan jumlah kuadrat sisa.

Bila diketahui sampel $\{(x_i, y_i); i=1,2,...,n\}$ maka taksiran kuadrat terkecil $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ untuk distribusi Weibull dari koefisien regresi α dan β dihitung .

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, maka nilai taksiran parameter β adalah

$$\hat{\beta}=\frac{\left\{n.\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i).\left(\ln\left\{\ln\left[\frac{1}{\left(1-\frac{i}{n+1}\right)}\right]\right\}\right)\right\}-\left\{\sum_{i=1}^{n}\ln\left\{\ln\left[\frac{1}{\left(1-\frac{i}{n+1}\right)}\right]\right\}.\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right\}}{n\left\{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2\right\}-\left\{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)\right\}^2}. \tag{9}$$

dan nilai taksiran parameter α yaitu:

$$\hat{\alpha}=e^{\frac{\bar{y}}{\hat{\beta}}-\bar{x}} \tag{10}$$

4. MEAN SQUARE ERROR (MSE)

Dalam mengkontruksi mean square error diperlukan teorema berikut ini.

Teorema 1 [2: hal. 309] Jika $\hat{\theta}$ merupakan penaksir dari θ, maka

$$MSE(\hat{\beta})=Var(\hat{\beta})+(bias\hat{\beta})^2.$$

A. Mean Square Error (MSE) pada Penaksir Metode Momen

Karena penaksir pada persamaan (2) bersifat tak bias, maka MSE sama dengan Variansi [2]. Sehingga MSE untuk penaksir pada persamaan (2) adalah

$$MSE(\hat{\alpha})=Var(\hat{\alpha})$$

$$= Var\left(\frac{\overline{\mathrm{x}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\right)$$

$$= \frac{\alpha^2}{n\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}$$

Karena penaksir pada persamaan (4) bersifat bias, berdasarkan teorema 2 maka MSE dari penaksir metode momen adalah

$$MSE\left(\hat{\beta}\right) = Var\left(\hat{\beta}\right) + \left(bias\hat{\beta}\right)^2$$

$$MSE(\hat{\beta}) = Var\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}-1\right) + \left(E\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}-1\right)-\beta\right)^2$$

$$= \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\right)^2 - 2\beta\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\right) - 2\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\right) - \beta^2 + 1$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)} - 2\beta - 2\right\} - \beta^2 + 1$$

B. Mean Square Error (MSE) pada Metode Kuadrat Terkecil

Karena penaksir pada persamaan (10) bersifat bias, berdasarkan teorema 2 maka MSE dari penaksir metode kuadrat terkecil adalah

$$MSE(\hat{\alpha}) = Var(\hat{\alpha}) + (bias\hat{\alpha})^2$$

$$MSE(\hat{\alpha}) = Var\left(\exp\left\{\frac{1}{\hat{\beta}}\ln\left\{\ln\left[\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}}\right]\right\}-\ln(x_i)\right\}\right) + \left(E\left(\exp\left\{\frac{1}{\hat{\beta}}\ln\left\{\ln\left[\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}}\right]\right\}-\ln(x_i)\right\}\right)-\alpha\right)^2$$

$$MSE(\hat{\alpha}) = \left(\exp\left\{ \frac{1}{\hat{\beta}} \ln\left\{ \ln\left[\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}} \right] \right\} - \ln(x_i) \right\} \right)^2 - 2\alpha \left(\exp\left\{ \frac{1}{\hat{\beta}} \ln\left\{ \ln\left[\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}} \right] \right\} - \ln(x_i) \right\} \right) + \alpha^2$$

Karena penaksir pada persamaan (9) bersifat bias, berdasarkan teorema 2 maka MSE dari penaksir metode kuadrat terkecil adalah

$$MSE(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}) + (bias\hat{\beta})^2$$

$$MSE(\hat{\beta}) = Var\left(\frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}} \right) \right] \right)}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)^2} \right)$$

$$+ \left(E\left(\frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\frac{i}{n+1}} \right) \right] \right)}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)^2} \right) - \beta \right)^2$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \left(\frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{n+1}} \right) \right] \right)}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)^2} \right)^2$$

$$- 2\beta \frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{n+1}} \right) \right] \right)}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)^2} + \beta^2$$

untuk membandingkan estimator terbaik untuk distribusi Weibull, maka akan digunakan perhitungan MSE secara numeric yang dapat dituliskan sebagai berikut [1]:

$$MSE = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \hat{F}(x_i) - F(x_i) \right\}^2$$

dengan :

$\hat{F}(x_i) = 1 - e^{\left(-x_i / \hat{\alpha} \right)^{\hat{\beta}}}$, merupakan fungsi kumulatif distribusi Weibull.

$F(x_i) = \dfrac{i}{n+1}$ merupakan pendekatan peringkat waktu gagal (failure time) dari distribusi Weibull.

5. STUDI SIMULASI

Dalam simulasi ini akan ditunjukan nilai MSE antara metode momen dan metode kuadrat terkecil. Dengan mengambil ukuran sampel tetap yaitu $n = 20$. Nilai parameter skala (α) dan parameter bentuk (β) yang berbeda-beda yaitu $\alpha = 1,2,5,15,30,50$ dan nilai parameter $\beta = 3,5,10,25,50,100$ berturut-turut dengan menggunakan Matlab 7.0.1 diperoleh hasil dari studi simulasi dirangkum dan ditabulasikan pada Tabel 1

Tabel 1 Nilai MSE dari taksiran untuk 2-parameter Distribusi Weibull

α	β	Metode Momen			Metode Kuadrat Terkecil		
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	*MSEmm*	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	*MSEmkt*

1	3	0.8333	2.5222	1.9071	0.7192	1.2421	2.0254
2	5	2.0211	5.2761	2.7806	0.2624	0.6456	5.6871
5	10	4.9701	10.7977	2.3633	0.1876	1.3703	6.5079
15	25	15.2717	30.4788	2.1859	0.4649	11.1735	6.5079
30	50	30.0709	60.0103	3.0031	0.2745	4.4093	6.5079
50	100	49.8164	113.6838	2.6742	0.2629	4.8079	6.5079

Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa untuk berbagai nilai α dan β menghasilkan nilai *MSE* yang lebih kecil untuk metode momen dibandingkan *MSE* pada metode kuadrat terkecil. Hal ini jelas terlihat, pada data yang ada di tabel 1 metode momen mempunyai nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode kuadrat terkecil. Sehingga metode momen merupakan penaksir yang lebih efisien dibandingkan penaksir metode kuadrat terkecil.

6. KESIMPULAN

Dapat disimpulkan bahwa metode momen lebih baik dibandingkan metode kuadrat terkecil untuk mengestimasi parameter pada distribusi Weibull. Hasil ini mendukung hasil studi yang diperoleh dari Razali, et al [4].

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Fauzan, M.A., 2000. *Methods for Estimating the parameters of the Weibull Distribution*, King Abdulaziz City for Science and Technology, Riyadh, Saudi Arabia.

[2] Bain, L.J. & Engelhardt, Max. 1991. *Introduction to Probability and Mathematic Statistics. 2nd*. Duxbury Press. Belmont, California.

[3] Montgomery, D. C. & G.C. Runger. 1999. *Applied Statistics and Probability for Engineers.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[4] Razali, A. M, A.A,Shalih & A.A, Mahdi. 2009. Estimation Accuracy of Weibull Distribution Parameters, *Journal of Applied Sciences Research* **5**(7), Universiti Kebangsaan Malaysia, pp: 790-795.

[5] Walpole, R. E., H. R.Myers. , L.S. Myers. & Keying Ye. 2007. *Probability & Statistics for Engineers & Scientist Eighth Edition.* Pearson Prentice Hall, London.