TAKSIRAN PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MOMEN DAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

Eka Meri Kristin[1], Arisman Adnan[2], Sigit Sugiarto[2]
ekameri_tross@ymail.com

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika FMIPA-UR
[2]Dosen Jurusan Matematika FMIPA-UR
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

ABSTRACT

In this paper, the methods of moment and maximum likelihood for estimating parameters of the Weibull distribution that proposed by Razali, et al [4] have been reviewed. Since the estimator of parameters are biased then Mean Square Error are used for comparing these two estimators. Simulation has been conducted using fix sample sizes, several scale and shape parameter. Our study support Razali's result that the methods of moment is more efficient than methods of maximum likelihood.

Keywords: *Weibull Distribution, methods of moment, methods of maximum likelihood.*

1. PENDAHULUAN

Satu aspek yang penting dalam statistika inferensi adalah menaksir parameter dari suatu populasi melalui analisis data yang telah dikumpulkan dari populasi tersebut. Setelah diperoleh taksiran dari parameter yang menjadi perhatian, dilakukan pengambilan kesimpulan tentang parameter populasi yang didasarkan pada informasi data sampel dari populasi tersebut. Parameter yang menjadi perhatian dapat berupa rata-rata, variansi dan parameter lainya. Penaksiran terhadap parameter ini bertujuan untuk mendapatkan nilai taksiran dari parameter berdasarkan pada data. Penaksir yang diharapkan adalah penaksir yang efisien dalam arti nilai taksiran itu cukup dekat dengan nilai parameter yang sebenarnya.

Penaksir yang baik apabila rata-rata penaksir sama dengan parameter sebenarnya, dinamakan penaksir tak bias. Penaksir yang memiliki variansi minimum merupakan penaksir yang baik untuk penaksir tak bias sebaliknya apabila rata-rata penaksir tidak sama dengan parameter sebenarnya dinamakan penaksir bias. Sehingga penaksir bias yang efisien adalah penaksir yang memiliki Mean Square Error (MSE) minimum [2].

Distribusi yang dibahas dalam kertas kerja ini adalah distribusi kontinu, yaitu distribusi Weibull. Distribusi Weibull biasanya digunakan dalam pembahasan data uji hidup. Data uji hidup merupakan topik dalam bebagai bidang biomedik dan industri [5]. Fungsi densitas distribusi Weibull [4] dapat dinyatakan sebagai :

$$f(x)=\left(\beta\frac{x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}}\right)e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad ,x\geq 0,\alpha>0,\beta>0 \tag{1}$$

dengan x adalah variabel random, α adalah parameter skala dan β adalah parameter bentuk. Parameter α dan β adalah parameter yang akan ditaksir. Fungsi densitas Weibull pada persamaan (1) memiliki rata-rata $\mu=\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ dan variansi

$$Var(X)=\alpha^{2}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{2}\right\}.$$

Akan dibahas taksiran parameter menggunakan metode momen dan metode maksimum likelihood disertai MSE nya.

2. PENAKSIR METODE MOMEN

Untuk mendapatkan penaksir distribusi Weibull dengan menggunakan metode momen, diperlukan rata-rata dan variansi distribusi Weibull. Selanjutnya akan ditentukan taksiran parameter α dan parameter β.

Dengan mendapatkan rata-rata distribusi Weibull yang juga merupakan momen pusat pertama, dilakukan penaksiran terhadap parameter α sebagai berikut [4]:

$$\mu=E(X)=\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

Penaksir untuk parameter α menggunakan metode momen adalah

$$\hat{\alpha}=\frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\ . \tag{2}$$

Untuk mendapatkan taksiran parameter β diperoleh dari fungsi parameter β yang diperoleh dengan cara membandingkan variansi dengan rata-rata dikuadratkan [1], sehingga dapat ditulis

$$f(\beta)=\frac{Var(X)}{(\mu)^{2}} \tag{3}$$

$$f(\beta)=\frac{\alpha^{2}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{2}\right\}}{\left\{\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^{2}}$$

Sehingga fungsi parameter β diperoleh sebagai berikut:

$$f\left(\hat{\beta}\right)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)}{\Gamma^{2}\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}-1 \tag{4}$$

yang akan digunakan untuk menaksir parameter β. Hal ini dapat dipenuhi dengan menggunakan metode iterasi numerik.

3. PENAKSIR METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

Misalkan $X_1, X_2,..., X_n$ adalah sampel random berukuran *n* yang berasal dari distribusi Weibull dengan fungsi densitas pada persamaan (1). Berdasarkan sampel random $X_1, X_2,..., X_n$ ditaksir parameter dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Ambil vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, asumsikan $x_1, x_2,..., x_n$ adalah saling bebas dalam distribusi Weibull. Maka fungsi likelihood adalah

$$L(\boldsymbol{x};\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta)$$

$$L(\boldsymbol{x};\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha^{\beta}}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}\right)^{\beta}} \tag{2}$$

Diasumsikan parameter parameter α dan parameter β tidak diketahui, maka penaksir maksimum likelihood dari parameter α adalah dengan mencari turunan pertama $\ln L(\hat{\theta}; x_1, x_2,.., x_n)$ pada persamaan (2) terhadap α dan samakan dengan nol,

$$\frac{d(\ln(L(x_1, x_2,..., x_n;\alpha)))}{d\alpha}=0.$$

Maka

$$\frac{d}{d\alpha}\ln[L(\boldsymbol{x};\alpha,\beta)]=-\frac{n\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}\right)^{\beta}=0 \tag{3}$$

$$\hat{\alpha}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}}{n}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

Sehingga penaksir untuk parameter α menggunakan metode maksimum likelihood adalah

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \tag{4}$$

Fungsi parameter β diperoleh dengan mencari turunan pertama $\ln L(\hat{\theta}; x_1, x_2, .., x_n)$ pada persamaan (2) terhadap β dan samakan dengan nol,

$$\frac{d(\ln(L(x_1, x_2, ..., x_n; \beta)))}{d\beta} = 0.$$

Maka

$$\frac{d}{d\beta} \ln[L(\boldsymbol{x}; \alpha, \beta)] = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{\alpha} + \left(-\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right) = 0 \tag{5}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3) dan (5) dengan cara mengeliminasi α maka fungsi parameter β diperoleh sebagai berikut

$$g(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{\hat{\beta}} \ln x_i \right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{\hat{\beta}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \tag{6}$$

yang selanjutnya digunakan untuk menaksir parameter β. Hal ini dapat dipenuhi dengan menggunakan metode iterasi numerik seperti metode Secant.

4. Mean Square Error (MSE)

Penaksir yang telah diperoleh dari metode momen dan metode maksimum likelihood akan menghasilkan penaksir yang berbeda. Penaksir terbaik memenuhi sifat tertentu, sifat tak bias dan sifat bias. Dalam mengkontruksi MSE diperlukan teorema berikut ini.

Teorema 2 [3: hal. 265] Jika $\hat{\theta}$ merupakan penaksir dari θ, maka

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + [b(\hat{\theta})]^2.$$

Untuk keperluan efisiensi pada simulasi digunakan perumusan MSE berikut ini [1:Hal.7].

$$MSE = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \hat{F}(x_i) - F(x_i) \right\}^2$$

dengan :

$\hat{F}(x_i) = 1 - e^{-\left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}}}$, merupakan fungsi kumulatif distribusi Weibull.

$F(x_i)=\frac{i}{n+1}$ merupakan pendekatan peringkat waktu gagal dari distribusi Weibull.

A. Mean Square Error (MSE) pada Penaksir Metode Momen

Karena penaksir pada persamaan (2) bersifat tak bias, maka MSE sama dengan Variansi [2]. Sehingga MSE untuk penaksir pada persamaan (2) adalah

$$MSE(\hat{\alpha})=Var(\hat{\alpha})$$

$$MSE(\hat{\alpha})=Var\left(\frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\right)$$

$$MSE(\hat{\alpha})=\left(\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}\right)^2 Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)$$

$$MSE(\hat{\alpha})=\frac{\alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)\right]}{n\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}$$

MSE untuk taksiran parameter β tidak dicari dikarenakan taksiran parameter β berada didalam fungsi parameter $f(\beta)$.

B. Mean Square Error (MSE) pada Penaksir Metode Maksimum Likelihood

Karena penaksir pada persamaan (4) bersifat tak bias, maka MSE sama dengan Variansi [2]. Sehingga MSE untuk penaksir pada persamaan (4) adalah

$$MSE(\hat{\alpha})=Var(\hat{\alpha})$$

$$MSE(\hat{\alpha}) = Var\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\hat{\beta}}}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

$$MSE(\hat{\alpha}) = Var\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\hat{\beta}} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \right]$$

$$MSE(\hat{\alpha}) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{\hat{\beta}}} n \left\{ \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{\beta}}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right)\right)^2 \right] \right\}$$

$$MSE\ (\hat{\alpha}) = \frac{n\alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{\beta}}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right)\right)^2 \right]}{(n)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}}$$

MSE untuk taksiran parameter β tidak dicari dikarenakan taksiran parameter β berada didalam fungsi parameter $g(\beta)$.

5. Studi Simulasi dan Pembahasan

Dalam simulasi ini akan ditunjukan nilai MSE antara metode momen dan metode maksimum likelihood. Dengan mengambil ukuran sampel $n = 20$, nilai parameter skala (α) dan nilai parameter bentuk (β) yang berbeda-beda yaitu nilai parameter $\alpha = 1,2,5,10,30,40,50$ dan nilai parameter $\beta = 3,5,9,20,50,80,100$ berturut-turut. Hitung nilai MSE dari kedua metode yang telah ditaksir dan bandingkan MSE kedua metode tersebut, dimana

$$MSE = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \hat{F}(x_i) - F(x_i) \right\}^2$$

Dengan menggunakan simulasi program Matlab 7.6.0, hasil simulasi dirangkum dan ditabulasikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Nilai Mean Square Error dari taksiran 2-parameter distribusi Weibull

α	β	Metode Momen			Metode Maksimum Likelihood		
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$MSE(1)$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$MSE(2)$
1	3	0.9684	4.1630	2.3234	0.9290	2.6670	2.7087
2	5	1.7217	6.3220	4.4481	1.8848	4.8186	5.1113
5	9	4.9812	13.8582	3.2252	5.7775	9.2724	3.2440
10	20	9.9080	28.5418	3.1429	11.4937	18.7982	5.3401
30	50	30.0522	72.0755	3.5500	37.3650	46.9987	6.5072
40	80	39.9180	117.897	4.1070	44.1675	77.8434	6.5016
50	100	49.9801	142.734	1.5454	73.1496	91.1044	6.5079

Dapat dilihat bahwa untuk berbagai nilai α dan β menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk metode momen dibandingkan MSE pada metode maksimum likelihood. Hal ini terlihat jelas pada data yang ada pada Tabel 1. Metode momen mempunyai nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode maksimum likelihood. Sehingga penaksir metode momen merupakan penaksir yang lebih baik dibandingkan penaksir metode maksimum likelihood. Dapat disimpulkan bahwa metode momen lebih baik dibandingkan metode maksimum likelihood untuk mengestimasi parameter dari distribusi Weibull. Hasil ini mendukung hasil studi yang diajukan oleh Razali, et al [4].

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Fawzan, M.A., 2000. Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution, *Report* ; King Abdulaziz City for Science and Technology, Riyadh, Saudi Arabia.

[2] Bain, L.J. and Engelhard. M., 1991. *Introduction to Probability Mathematical Statistics, Second Edition*. Duxbury Press. Belmont, California.

[3] Hines, W.W. and Montgomery, D.C., 1972. *Probability and Statistics in Engineering and Management Science, Second Edition.* John Willey & Son, Inc. New York.

[4] Razali, A.M., Salih, A.A and Mahdi A.A., 2009. Estimation Accuracy of Weibull Distribution Parameters, *Journal of Applied Sciences Research, 5(7):790 – 795*

[5] Wallpole, R.E. & Myers, R.H., 2007. *Probability and Statistics for Engineers and Scientist, Eight Edition.* Pearson Education International.