PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LANE-EMDEN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

Ahmad Sya'roni[1], M. Natsir[2], Endang Lily[2]

E-mail: Aron.lativa@yahoo.com

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya Pekanbaru, 28293, Indonesia

ABSTRACT

This paper described characteristics and use of differential transformation method. Finite Taylor series was used for solving second order of nonlinear Lane-Emden equation at singular initial value problems.

Keywords: *Lane-Emden Equation, Nonlinier Differential Equation, Differential Transform Method, Taylor Series.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial Lane-Emden adalah jenis persamaan diferensial linier maupun nonlinier berorde dua yang banyak ditemukan pada pemodelan fisika-matematika dan pertama kali dipelajari oleh ahli fisika berkebangsaan jerman bernama Robert Emden (1907) dengan bentuk

$$u''(x)+\frac{n}{x}u'(x)+f(x,u)\quad g(x),\ \ 0<x\leq 1, n\geq 0. \tag{1}$$

Dengan nilai $U(0)\quad A, U'(0)\quad B$ dimana nilai A dan B adalah konstan, $f(x,u)$ adalah fungsi real kontinu dan $g(x)\in c[0,1]$ sehingga persamaan Lane-Emden tersebut dapat dibawa kedalam masalah nilai awal singular.

Untuk mengatasi permasalahan, Eturk, V.S [3] mengembangkan metode transformasi diferensial dengan turunan ke-k dari fungsi $u(x)$ sebagai berikut

$$U(k)\quad \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x\quad x_0}. \tag{2}$$

Dengan invers transformasi diferensial dari $U(k)$ adalah

$$u(x)\quad \sum_{k\quad 0}^{\infty}U(k)(x-x_0)^k. \tag{3}$$

Selanjutnya $u(x)$ ditulis dalam bentuk deret terbatas menjadi

$$u(x)\quad \sum_{k\quad 0}^{n}U(k)(x-x_0)^k. \tag{4}$$

Metode transformasi diferensial berdasarkan deret terbatas digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal singular suatu persamaan diferensial Lane-Emden nonlinear orde dua.

2. TEOREMA TAYLOR

Transformasi diferensial diperoleh dari koefisien suku-suku dari deret Taylor yang mempunyai nilai berhingga. Setiap suku transformasi diferensial adalah bentuk transformasi dari suku-suku asal persamaan deret Taylor.

Teorema 2.1 Teorema Taylor [1:h.216] Misalkan $n \in N$, misalkan $I = [a,b]$ dan misalkan $u : I \to R$ sedemikian hingga u dan $u', u'', ..., u^n$ kontinu pada I dan $u^{(n+1)}$ ada pada (a,b). Jika $x_0 \in I$ maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat suatu titik c di antara x dan x_0 sehingga

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x-x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{u^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (5)$$

Bukti. Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada **[1].**

Teorema 2.2 Teorema Nilai Antara (TNA) [5:h.63] Jika fungsi u kontinu pada $[a,b]$, dan k terletak di antara $m = \min_{a \le x \le b} u(x)$ dan $M = \max_{a \le x \le b} u(x)$ maka terdapat c di antara a dan b sehingga $u(x) = k$.

Bukti. Bukti Dari teorema ini dapat dilihat pada [5].

Teorema 2.3 Teorema Rolle [5:h.125] Misalkan fungsi u kontinu pada $[a,b]$, terdiferensialkan pada (a,b), dan $u(a) = u(b)$. Maka terdapat suatu $c \in (a,b)$ sehingga $u'(c) = 0$.

Bukti. Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [5].

3. BENTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL LANE-EMDEN

Persamaan diferensial Lane-Emden merupakan bentuk khusus dari persamaan diferensial nonlinier orde dua, yaitu [2:hal 381]:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{du}{dx} + f(u) = 0. \qquad (6)$$

dengan syarat nilai awal

$$u(0) = A, \; u'(0) = 0.$$

Contoh lain bentuk persamaan $f(u)$ diantaranya $f(u) = u^m$, $f(u) = (u^2 - C)^{3/2}$, $f(u) = e^u$, $f(u) = e^{-u}$, $f(u) = \pm\sin u$, $f(u) = \pm\cos u$, $f(u) = \pm\sinh u$ atau $f(u) = \pm\cosh u$.

4. SIFAT DAN PERLUASAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LANE-EMDEN

Berdasarkan bentuknya, persamaan diferensial Lane-Emden pada persamaan (6) mempunyai penyelesaian untuk x disekitar $x \quad 0$. Oleh karena itu, maka diberikan syarat $u(0) \quad A$ dan $u'(0) \quad 0$. A adalah konstanta. Persamaan (6) juga dibatas pada interval [0,1] dan nilai $f(u)$ dapat dibentuk menjadi $f(x,u)$.

Persamaan (6) dapat juga dibentuk nilai $g(x)$ kontinu pada $0 < x \le 1$, sehingga persamaan diferensial Lane-Emden dapat dibentuk menjadi

$$u'' + \frac{2}{x}u' + f(x,u) \quad g(x). \qquad 0 < x \le 1. \tag{7}$$

dengan syarat

$$u(0) \quad A \text{ dan } u'(0) \quad B.$$

Selanjutnya secara lengkap, bentuk persamaan diferensial Lane-Emden dapat diubah menjadi

$$u'' + \frac{2}{x}u' + f(x,u) \quad g(x), \ 0 \le x \le 1. \tag{8}$$

Pada persamaan (8) diperoleh pada ruas kanan adalah fungsi terhadap x, yaitu $g(x)$ sehingga terlihat bentuk persamaan (8) adalah persamaan diferensial Lane-Emden nonhomogen.

Pada uraian pokok skripsi persamaan diferensial Lane-Emden yang diurai adalah persamaan diferensial Lane-Emden nonhomogen. Bentuknya dapat diusulkan menjadi

$$\frac{d}{dx}(xu') + u' \quad xg(x) - xf(u,x). \tag{9}$$

Bentuk persamaan diferensial Lane-Emden $\frac{2}{x}$ oleh $\frac{n}{x}$, untuk $n \ge 0$. Sehingga terbentuklah perluasannya, yaitu

$$u'' + \frac{2}{x}u' + f(x,u) \quad g(x). \tag{10}$$

untuk $n \ge 0$ syarat awalnya $u(0) \quad A$ dan $u'(0) \quad B$.

Selanjutnya persamaan (10) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{d}{dx}(xu') + (n-1)u' + xf(x,u) \quad xg(x). \tag{11}$$

5. SIFAT-SIFAT METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

Pada persamaan (5), jika koefisien suku-suku deret ditulis

$$U(0) = u(x_0), \qquad U(1) = \frac{d}{dx}u(x_0), \qquad U(2) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}u(x_0),$$

$$U(3) = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}u(x_0), \ldots, U(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}u(x_0).$$

Maka masing-masing koefisien suku-suku deret disebut transformasi diferensial ke-0,1,2,3,…,n

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]. \tag{12}$$

Selanjutnya dari persamaan (12) invers transformasi $U(k)$ adalah

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k. \tag{13}$$

Persamaan (13) adalah deret tak hingga, sedangkan untuk pemakaiannya dibatasi sebagai deret berhingga

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} U(k)(x - x_0)^k. \tag{14}$$

yang berarti untuk

$$u(x) = \sum_{k=n+1}^{n} U(k)(x - x_0)^k \text{ diabaikan, karena nilainya cukup kecil.}$$

Dibawah ini diuraikan sifat-sifat transformasi diferensial fungsi $u(x)$.

Teorema 5.1 [3:hal.136] Jika $u(x) = y(x) + z(x)$, maka transformasi diferensial ke- k adalah

$$U(k) = Y(k) + Z(k). \tag{15}$$

Bukti. Bukti teorema ini dapat dilihat pada [3].

Teorema 5.2 [3:hal.136] jika $u(x) = ay(x)$, a konstanta, maka transformasi diferential ke- k fungsi $u(x)$

$$U(k) = aY(k). \tag{16}$$

Bukti. Bukti teorema ini dapat dilihat pada [3].

Teorema 5.3 [3:hal.136] Jika $u(x) = \dfrac{d^m y(x)}{dx^m}$ maka

$$U(k) = \frac{(m+k)!}{k!} Y(k+m). \tag{17}$$

Bukti. Bukti teorema ini dapat dilihat pada [3].

Teorema 5.4 [3:hal.136] Jika $u(x) = y(x)z(x)$, maka

$$u(k) = \sum_{r=0}^{k} Z(r)Y(k-r). \tag{18}$$

Bukti. Bukti teorema ini dapat dilihat pada [3].

Teorema 5.5 [3:hal.136] Jika $u(x) = x^n$, maka

$$U(k) = \delta(k-n), \qquad (k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}. \tag{19}$$

Bukti. Bukti teorema ini dapat dilihat pada [3].

6. CONTOH APLIKASI

Contoh 3.1 Tentukan penyelesaian persamaan diferensial Lane-Emden

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) + u(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3, \quad 0 < x \leq 1. \tag{20}$$

dengan syarat awal $u(0) = 0, u'(0) = 0.$

Solusi. Dengan mengalikan x pada ruas kiri dan kanan dari persamaan (20) diperoleh

$$xu''(x) + xu'(x) + xu'(x) = 6x + 12x^2 + x^3 + x^4,$$

dapat dibentuk menjadi

$$xu''(x) + xu'(x) = 6x + 12x^2 + x^3 + x^4 - xu'(x). \tag{21}$$

karena

$$\frac{d}{dx}(xu'(x)) = u'(x) + xu''(x),$$

maka persamaan (21) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{d}{dx}(xu'(x)+u'(x)) \quad 6x+12x^2+x^3+x^4-xu'(x).$$

Dibentuk transformasi diferensial ke-k, maka diperoleh

(i) Dari $u_1(x) \quad \frac{d}{dx}(xu'(x)$ diperoleh

$$U_1(k) \quad \frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)+k\frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)$$

$$(k+1)U(k+1)+k(k+1)U(k+1).$$

(ii) Dari $u_2(x) \quad u'(x)$ diperoleh

$$U_2(k) \quad \frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)$$

$$(k+1)U(k+1).$$

(iii) Dari $u_3(x) \quad 6x+12x^2+x^3+x^4$ diperoleh

$$U_3(x) \quad \delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)+\delta(k-4).$$

(iv) Dari $u_4(x) \quad xu'x)$ diperoleh

$$U_4(k) \quad \sum_{k\ 0}^{k}\delta(l-1)U(k-l).$$

Dari i,ii,iii dan iv diperoleh transformasi pada persamaan (21)

$$k(k+1)U(k+1)+(k+1)U(k+1)+(k+1)U(k+1) \quad \delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)$$

$$+\delta(k-4)-\sum_{k\ 0}^{k}\delta(l-1)U(k-l)$$

Sehingga diperoleh

$$(k+2)(k+1)U(k+1) \quad \delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)+\delta(k-4)-\sum_{k\ 0}^{k}\delta(l-1)U(k-l).$$

$$U(k+1) \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big\{\, 6\delta(k-1)+12\delta(k-2)+\delta(k-3)+\delta(k-4)$$

$$-\sum_{k\ \ 0}^{k}\delta(l-1)U(k-l)\ \Big\}. \qquad (22)$$

Karena $u(0) \quad 0$ dan $u'(0) \quad 0,$ maka diperoleh transformasi diferential ke-0 dan ke-1 masing-masing

$$U(0) \quad 0 \text{ dan } U(1) \quad 0. \qquad (23)$$

Selanjutnya untuk *k* = 1 maka diperoleh transformasi ke-2

$$U(2) \quad \frac{1}{6}\left(6+0+0+0-0\right) \quad 1.$$

Untuk *k* = 2, maka diperoleh transformasi diferensial ke -3

$$U(3) \quad \frac{1}{12}\left(0+12+0+0-0\right) \quad 1.$$

Untuk *k* = 3,4,…,*n* diperoleh

$$U(k) \quad 0.$$

Dari $U(0), U(1), U(2), \ldots, U(k)$ diperoleh invers transformasi diferensial

$$u(x) \quad U(2)x^2 + U(3)x^3$$

$$x^2 + x^3.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R.G & D.R. Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis, Second Edition*. John Wiley and Son, Singapore.

[2] Davis, H.T. 1960. *Introduction to Nonlinier Differetial And Integral* Equations. Dover, New York.

[3] Erturk, V.S. 2007. Differential transformation method for solving differential equations of Lane-Emden, *Math. Apply. Comput.* **12:** 135- 139.

[4] Liao, S. 2003. A new analytic algorithm of Lane-Emden type equations, *Math. Apply. Comput*. **142**: 1-16

[5] Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Penerbit Erlangga. Jakarta.

[6] Ross, S.L. 1984. *Differential Equations*, John Wiley & Son, New York