PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI MENGGUNAKAN SAMPLING ACAK SEDERHANA DAN SAMPLING BERPERINGKAT

Ryan Ariesta Ramli Suroso[1], Arisman Adnan[2], Rustam Efendi[2]

r_yand17045@yahoo.com

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Kampus Binawidya Pekanbaru,28293,Indonesia

ABSTRACT

Ratio estimators of the population mean using simple random sampling and ranked set sampling that suggested here are two ratio estimators involving the first and the third quartiles parameters. These estimators are biased estimators, so that the Mean Square Error is calculated for each estimators to obtain the efficient estimators. Therefore, the simulation using the first and third quartiles parameters is carried out. The simulation showed that the first quartiles parameters are more efficient than the third quartile.

Key words: *Biased , Quartile, Simple Random Sampling, Ranked Set Sampling.*

1. PENDAHULUAN

Bentuk umum penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi μ_Y dari variabel yang diteliti $\bar{Y}$ didefenisikan dengan

$$\hat{\mu}_{YSRS} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \mu_X \tag{1}$$

dengan asumsi bahwa rata-rata populasi μ_X dari variabel tambahan $\bar{X}$ diketahui. Disini $\bar{Y}$ adalah rata-rata sampel dari variabel yang diteliti dan $\bar{X}$ adalah rata-rata dari variabel tambahan. Dari penaksir rasio sederhana Al-Omari, Jemain dan Ibrahim [1] mengajukan menjadi sebuah penaksir rasio dengan menggunakan parameter kuartil 1 dan kuartil 3 seperti

$$\hat{\mu}_{YSRSh} = \bar{Y}_{SRS} \frac{\mu_X + q_h}{\bar{X}_{SRS} + q_h} \tag{2}$$

Dari kedua penaksir rasio acak sederhana tersebut Al-Omari, Jemain dan Ibrahim [1] mengadaptasi kembali menjadi penaksir rasio pada sampling berperingkat. Penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling berperingkat didefenisikan dengan

$$\hat{\mu}_{YRSSh} = \overline{Y}_{RSS}\,\frac{\mu_X + q_h}{\overline{X}_{RSS} + q_h} \qquad (3)$$

Dari ketiga penaksir rasio untuk rata-rata populasi tersebut masing-masing merupakan penaksir bias. Maka untuk mendapatkan penaksir rasio yang efisien adalah dengan menghitung *MSE* untuk masing-masing penaksir. Semakin kecil *MSE* yang diperoleh maka akan semakin efisien.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Salah satu materi pendukung yang digunakan untuk menentukan penaksir rasio yang efisien untuk rata-rata populasi adalah ekspektasi matematika dan sifat-sifat ekspektasi dari variabel random yang dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.1 [4 : h. 119] Misalkan X adalah variabel random dengan fungsi kepadatan peluang $P(x)$, maka ekpektasi dari X yang dinotasikan dengan $E(X)$ didefinisikan dengan

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i)$$

Definisi 2.2 [2 : h. 302] Penaksir $\hat{\theta}$ merupakan penaksir tak bias untuk θ jika $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Definisi 2.3 [2 : h. 309] Penaksir $\hat{\theta}$ merupakan penaksir bias untuk θ jika $E(\hat{\theta}) = \theta + B(\hat{\theta})$.

dengan $B(\hat{\theta})$ adalah bias dari penaksir $\hat{\theta}$, sehingga $B(\hat{\theta})$ dapat dinyatakan dengan $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

Definisi 2.4 [2 : h. 73] Variansi $\hat{\theta}$ dengan notasi $Var(\hat{\theta})$ didefinisikan dengan

$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2$.

Kemudian akan diberikan definisi kovariansi yang menyatakan hubungan antara dua variabel random. Definisi kovariansi akan digunakan untuk menentukan kovariansi dari rata-rata sampel.

Definisi 2.5 [2 : h. 174] Misalkan X dan Y sepasang variabel random dengan $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$ adalah rata-rata dari masing-masing variabel acak, maka kovariansi yang dinotasikan dengan notasikan $Cov(X,Y)$ didefinisikan dengan

$$Cov(X,Y) = E(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}).$$

Salah satu kriteria yang digunakan untuk membandingkan efisiensi dari beberapa penaksir bias adalah *Mean Square Error* (MSE), yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.6 [6 : h. 271] Misalkan $\hat{\theta}$ merupakan penaksir bias untuk θ, maka Mean Square Error dari $\hat{\theta}$ yang dinotasikan dengan $MSE(\hat{\theta})$ adalah

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}-\theta)^2.$$

3. SAMPLING BERPERINGKAT

Sampling berperingkat pertama kali diajukan oleh McIntyre [5]. Prosedur sampling berperingkat dilakukan dengan memilih secara acak sampel berukuran n dan peringkat dari populasi berukuran N. Sampel berukuran n dibagi kedalam sejumlah m set secara acak dengan ukuran yang sama, kemudian pengukuran diambil dari peringkat terkecil untuk set pertama, set kedua diambil dari peringkat terkecil kedua, dan prosedur dilanjutkan sampai dengan peringkat terbesar dipilih untuk pengukuran dari sampel ke-n. Siklus ini dapat diulangi sebanyak r waktu sampai mr unsur yang diukur selama proses sampling berperingkat. Sampel yang telah terpilih tidak dikembalikan pada populasinya untuk seluruh penarikan berikutnya, maka cara ini dinamakan sampling berperingkat tanpa pengembalian.

Untuk menyederhanakan penulisan digunakan notasi-notasi yang akan diperlukan dalam sampling berperingkat, yaitu:

$$\mu_Y = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_{i[i]}}{N},\ \bar{Y}_{RSS} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{i[i]},\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_{i[i]}-\mu_Y\right)^2}{N}$$

Variansi dari rata-rata $\bar{Y}$ untuk sampling berperingkat [1]

$$Var(\bar{Y}_{RSS}) = \frac{\sigma_Y^2}{m} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\mu_{Y(i)}-\mu_Y\right)^2. \tag{4}$$

Hal ini dapat ditunjukkan :

$$Var(\bar{Y}_{RSS}) = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m} Var\left(h\left(Y_{i[i]}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(E\left[h\left(Y_{i[i]}\right)\right]^2 - \left[Eh\left(Y_{[r]}\right)\right]^2\right)\right)$$

atau

$$Var(\overline{Y}_{RSS}) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{N}P\left(h\left(Y_{i[i]}\right)-\mu_Y\right)\left(h\left(Y_{i[i]}\right)-\mu_Y\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\mu_{Y[i]}-\mu_Y\right)\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_{i[i]}-\mu_Y\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\mu_{Y[i]}-\mu_Y\right)\right)^2\right)$$

$$Var(\overline{Y}_{RSS}) = \frac{\sigma_Y^2}{m} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\mu_{Y(i)}-\mu_Y\right)^2$$

Jika $X_{i(i)}, Y_{i[i]}$ adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan $\overline{X}_{RSS}, \overline{Y}_{RSS}$ adalah rata-rata dari sampling berperingkat berukuran m, maka kovariansinya dinotasikan dengan

$$\operatorname{cov}\left(\overline{X}_{RSS}, \overline{Y}_{RSS}\right) = \frac{1}{m}\left(\sigma_{XY} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}T_{XY(i)}\right) \quad (5)$$

Hal ini dapat ditunjukkan :

Gunakan persamaan (4) untuk variasinya $u_{i[i]} = X_{i(i)} + Y_{i[i]}$. Rata – rata populasi dari $u_{i[i]}$ adalah $\overline{U} = \mu_X + \mu_Y$, dan persamaan (4) memberikan

$$E\left(u_{i[i]} - \overline{U}\right)^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\left(u_{i[i]} - \overline{U}\right)^2$$

Disederhanakan, sehingga diperoleh:

$$E\left[\left(\overline{X}_{RSS}-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_{RSS}-\mu_Y\right)\right] = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_{i(i)}-\mu_X\right)\left(Y_{i[i]}-\mu_Y\right)\right] \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (4) maka:

$$E\left(\overline{X}_{RSS}-\mu_X\right) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\left(X_{i(i)}-\mu_X\right) \quad (7)$$

dan

$$E\left(\overline{Y}_{RSS}-\mu_Y\right) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_{i(i)}-\mu_Y\right) \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7) dan persamaan (8) ke persamaan (6), sehingga terbukti bahwa:

$$Cov\left(\bar{X}_{RSS},\bar{Y}_{RSS}\right)=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\left(X_{i(i)}-\mu_X\right)\left(Y_{i[i]}-\mu_Y\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\left((\sigma_X)-\left(\frac{1}{m}\sum T_{X(i)}\right)\right)\left((\sigma_Y)-\left(\frac{1}{m}\sum T_{Y(i)}\right)\right)\right)$$

$$Cov\left(\bar{X}_{RSS},\bar{Y}_{RSS}\right)=\frac{\sigma_{XY}}{m}-\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}T_{XY(i)}$$

4. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana $\hat{\mu}_{YSRS}$ adalah

$$B\left(\hat{\mu}_{YSRS}\right)\approx\frac{1-f}{m}\mu_Y C_X^2\alpha\left(\alpha-D\right)$$

dengan $\alpha=\dfrac{\mu_X}{\mu_X+q}$.

$$\text{MSE }\left(\hat{\mu}_{YSRS}\right)\approx\left(K_h-\beta\right)^2\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{m}\left(1-\rho^2\right)$$

dengan

$$K_h=\frac{\mu_Y}{\mu_X+q_h}$$

dan

$$\beta=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling berperingkat $\hat{\mu}_{YRSS}$ adalah

$$B\left(\hat{\mu}_{YRSS}\right)\approx\frac{1-f}{m}\mu_Y C_X^2\delta\left(\delta-D\right)$$

dengan $\delta=\dfrac{\mu_X}{\mu_X+q}$

$$\text{MSE }\left(\hat{\mu}_{YRSS}\right) \approx \left(K_h - \beta\right)^2 \left(\frac{\sigma_X^2}{m} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_{X(i)} - \mu_X\right)^2 \right) + \frac{1}{m} \sigma_Y^2 \left(1 - \rho^2\right)$$

dengan

$$K_h = \frac{\mu_Y}{\mu_X + q_h}$$

dan

$$\beta = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$

5. SIMULASI

Tabel 1. Efisiensi Sampling Berperingkat terhadap Sampling Acak Sederhana pada Kuartil 1 dengan menggunakan ρ positif untuk $m = 7,8,9$

	ρ	m = 7	m = 8	m = 9
Efisiensi	0,99	1,2850870	1,8608640	2,4752850
	0,90	1,2069450	1,3298710	1,7556510
	0,80	1,1734630	1,3216780	1,6966530
	0,70	1,1712990	1,2860710	1,6869850
	0,50	1,1205460	1,1622890	1,6351680

Tabel 2. Efisiensi Sampling Berperingkat terhadap Sampling Acak Sederhana pada Kuartil 1 dengan menggunakan ρ negatif untuk $m = 7,8,9$

	ρ	m = 7	m = 8	m = 9
Efisiensi	-0,99	1,7254770	2,8348410	3,0454430
	-0,90	1,2302540	1,3872370	2,2490400
	-0,80	1,1981970	1,3672930	2,1556620
	-0,70	1,1862030	1,3213580	2,1478240
	-0,50	1,1694670	1,2146800	2,0024550

Tabel 3. Efisiensi Sampling Berperingkat terhadap Sampling Acak Sederhana pada Kuartil 3 dengan menggunakan ρ positif untuk $m = 7,8,9$

	ρ	m = 7	m = 8	m = 9
Efisiensi	0,99	1,2519510	1,7208530	2,3101230
	0,90	1,0155980	1,0249930	1,0283490
	0,80	1,0014040	1,0022860	1,0029530
	0,70	1,0012480	1,0020325	1,0026895
	0,50	1,0010456	1,0019235	1,0024752

Tabel 4. Efisiensi Sampling Berperingkat terhadap Sampling Acak Sederhana pada Kuartil 3 dengan menggunakan ρ negatif untuk $m = 7,8,9$

	ρ	m = 7	m = 8	m = 9
Efisiensi	-0,99	1,5311930	2,0789470	2,4986130
	-0,90	1,2027820	1,2380270	1,9664460
	-0,80	1,1710520	1,1910520	1,6613770
	-0,70	1,1509540	1,1790870	1,3506120
	-0,50	1,0906850	1,1006310	1,2285540

6.KESIMPULAN

Dari artikel ini dapat disimpulkan bahwa sampling berperingkat μ_{YRSS} lebih efisien dari pada sampling acak sederhana μ_{YSRS} berdasarkan jumlah ukuran sampel yang sama dari data yang diukur dan berdasarkan simulasi bahwa terlihat jelas parameter kuartil 1 lebih efisien dari pada parameter kuartil 3.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Omari, AI & Dkk. 2009. New Ratio Estimators of the Mean Using Simple Random Sampling and Ranked Set Sampling Methods, *Revista Investigacion Operacional*. 30, 97-108.

[2] Bain, L. J and M. Engelhard. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. *Second Edition*. Duxbury Press, California.

[3] Cochran, W.G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel*, *Edisi ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E.R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.

[4] Hogg, R.V and E. A. Tanis. 2001. *Probability and Statistical Inference*. *Sixth Edition*. Upper Saddle River, New Jersey.

[5] Mcintyre, G. A. 1952. A Method for Unbiased Selective Sampling Using Ranked Sets. *Australian Journal*. 3, 385-390.

[6] Montgomery, D.C & G. C. Runger. 1999. *Applied Statistics and Probability for Engineers, Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc, New York.