METODE *FINITE DIFFERENCE* INTERVAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN PANAS

Mardhika W.A [1*], Syamsudhuha[2], Aziskhan[2]

*mardhika.wirahadi@unri.ac.id

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Komputasi
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

ABSTRACT

The aim of this paper is to solve a heat equation by using Interval Finite Difference method. The method is the modified form of Finite Difference Method which includes the error terms of the corresponding conventional method. It gives a solution in interval form which consists all of the possible numerical error.

Keywords: *Heat equation, Finite Difference Method, Finite Difference Interval Method*

1. PENDAHULUAN

Persamaan panas merupakan persamaan diferensial parsial orde dua dengan bentuk umum sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad a \le x \le b, \qquad t \ge 0 \tag{1}$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x), \qquad a \le x \le b \tag{2}$$

dan syarat batas

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

dengan konstanta α merupakan koefisien difusi. Penyelesaian dari persamaan (1) merupakan temperatur u pada titik x disepanjang batang homogen yang panjangnya $(b-a)$ pada waktu t.

Untuk memperoleh solusi dari persamaan panas tersebut dapat diselesaikan secara numerik, salah satunya dengan metode *Finite Difference.* Tetapi pada penggunaannya metode tersebut mengabaikan galat pemotongan *(truncation error).* Dalam penelitian ini, penulis ingin mengetahui bagaimana jika metode tersebut dikembangkan dengan penerapan analisis interval sehingga tidak mengabaikan galat pemotongan.

2. METODE *FINITE DIFFERENCE*

Untuk mendapatkan bentuk diskrit persamaan panas pada persamaan (1) dengan syarat awal (2) dan syarat batas (3) dengan interval waktu $[0, T]$, pilih bilangan bulat n dan m sebagai partisi dari x dan t. Kemudian akan diperolah *mesh constant* h dan k dengan $h = L/n$ dan $k = T/m$. Maka diperoleh titik grid (x_i, t_j), dimana $x_i = ih$ untuk $i = 0, 1, ..., n$ dan $t_j = jk$ untuk $j = 0, 1, ..., m$.

Dengan menggunakan Teorema Taylor Dua Variabel [6], diperoleh formula *Backward Difference* turunan pertama berorde $O(k)$ pada langkah ke j dalam t sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j), \tag{4}$$

dengan $\mu_i \in (t_{j-1}, t_j)$. Karena galat pemotongan diabaikan yaitu $\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j)$ dan Pendekatan $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_i, t_j}$ akan dibentuk dalam notasi indeks ganda $u_{i,j}$ pendekatan untuk $u(x_i, t_j)$ dengan $x_i = x_0 + ih, t_i = t_0 + jk$. Maka dalam indeks ganda persamaan (4) dapat ditulis sebagai pendekatan diskrit untuk turunan pertama orde $O(k)$ menjadi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}. \tag{5}$$

Formula *Forward Difference* turunan pertama berorde $O(k)$ pada langkah ke j dalam t sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j), \tag{6}$$

dengan $\mu_i \in (t_j, t_{j+1})$ dan karena galat pemotongan diabaikan yaitu $\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j)$, maka dalam indeks ganda persamaan (6) dapat ditulis sebagai pendekatan diskrit untuk turunan pertama orde $O(k)$ menjadi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}. \tag{7}$$

Dan formula *Central Difference* turunan kedua orde $O(k^2)$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{8}$$

dimana $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Karena galat pemotongan yang diabaikan yaitu $\dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$, pendekatan diskrit $u_{i,j}$ untuk persamaan (8) yaitu

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}. \tag{9}$$

2.1 Metode *Backward Difference* untuk Persamaan Panas

Dengan mensubtitusi persamaan (5) dan persamaan (9) ke persamaan panas pada persamaan (1), diperoleh

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}-\alpha^2\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}=0, \tag{10}$$

serta Memisalkan $\lambda=\alpha^2\dfrac{k}{h^2}$, maka akan diperoleh

$$-\lambda u_{i-1,j}+(1+2\lambda)u_{i,j}-\lambda u_{i+1,j}=u_{i,j-1}, \tag{11}$$

untuk $i=1,2,\cdots,n-1,\ j=1,2,3,\cdots,m$ dengan syarat awal

$$u_{i,0}=f(x_i), \tag{12}$$

dan syarat batas

$$u_{0,j}=u_{n,j}=0, j=1,2,\cdots,m. \tag{13}$$

Persamaan (11) merupakan formula metode *Backward Difference* yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas.

2.2 Metode *Forward Difference* untuk Persamaan Panas

Subtitusi persamaan (7) dan persamaan (9) ke persamaan panas pada persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-\alpha^2\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}=0, \tag{14}$$

serta Memisalkan $\lambda=\alpha^2\dfrac{k}{h^2}$, maka akan diperoleh

$$u_{i,j+1}=\lambda u_{i-1,j}+(1-2\lambda)u_{i,j}+\lambda u_{i+1,j}, \tag{15}$$

untuk $i=1,2,\cdots,n-1,\ j=1,2,3,\cdots,m$ dengan syarat awal

$$u_{i,0}=f(x_i), \tag{16}$$

dan syarat batas

$$u_{0,j}=u_{n,j}=0. \tag{17}$$

Persamaan (15) merupakan formula metode *Forward Difference* yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas.

3. METODE *FINITE DIFFERENCE* INTERVAL

3.1 Metode *Backward Difference* Interval untuk Persamaan Panas

Perhatikan persamaan (4) dan (8), karena galat pemotongan akan dirubah kedalam bentuk interval maka perlu didapatkan interval yang memuat $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j)$ dan $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$, dengan $\mu_i \in (t_{j-1}, t_j)$ dan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Dari persamaan (1) diperolah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x,t) \tag{18}$$

dan

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x,t). \tag{19}$$

Dengan mengasumsikan

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x,t)\right| \leq M, 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T, \tag{20}$$

maka akan diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \in \alpha^2 \left[-M, M\right] \tag{21}$$

dengan $\mu_i \in (t_{j-1}, t_j)$ dan

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \in \frac{1}{\alpha^2}\left[-M, M\right] \tag{22}$$

dengan $\xi_j \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Kemudian subtitusi persamaan (4 dan persamaan (8) ke persamaan (1) serta memisalkan $\lambda = \alpha^2 \dfrac{k}{h^2}$ akan diperoleh

$$(1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i-1,j} - \lambda u_{i+1,j} = u_{i,j-1} - \alpha^2 \frac{kh^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) - \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j). \tag{23}$$

dengan $u_{i,j}$ pendekatan untuk $u(x_i, y_j)$. Kemudian subtitsi persamaan (21) dan (22) ke persamaan (23) maka diperoleh

$$(1+2\lambda)U_{i,j} - \lambda U_{i-1,j} - \lambda U_{i+1,j} = U_{i,j-1} - \frac{kh^2}{12}\left[-M, M\right] - \alpha^2 \frac{k^2}{2}\left[-M, M\right] \tag{24}$$

dimana $U_{i,j} = \left[\underline{u}_{i,j}, \overline{u}_{i,j}\right]$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $j = 1, 2, 3, \cdots, m$, dengan syarat awal

$$U_{i,0} = F([ih, ih]), i = 0, 1, \cdots, n, \tag{25}$$

dan syarat batas

$$U_{0,j} = U_{n,j} = \left[0, 0\right], j = 1, 2, \cdots, m. \tag{26}$$

Persamaan (24) merupakan formula metode *Backward Difference* Interval yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas. Dalam bentuk matrik, persamaan (24) dapat dituliskan sebagai berikut

$$AU^{(j)} = U^{(j-1)}, j = 1, 2, \cdots, m, \tag{27}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

$$U^{(j)} = \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ U_{3,j} \\ \vdots \\ U_{n-1,j} \end{bmatrix} \text{dan } U^{(j-1)} = \begin{bmatrix} U_{1,j-1}+R \\ U_{2,j-1}+R \\ U_{3,j-1}+R \\ \vdots \\ U_{n-1,j-1}+R \end{bmatrix}$$

dan

$$R = -\frac{kh^2}{12}\left[-M, M\right] - \alpha^2 \frac{k^2}{2}\left[-M, M\right]. \tag{28}$$

Dengan nilai M adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} M \approx \frac{1.5}{kh^2} maks_{i=1,\ldots,n-1, j=1,\ldots,m-1} |u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1} \\ - 2u_{i,j} - u_{i,j-1} \\ + u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}|. \end{aligned} \tag{29}$$

3.2 Metode *Forward Difference* Interval untuk Persamaan Panas

Perhatikan persamaan (6) dan (8), karena galat pemotongan akan dirubah kedalam bentuk interval maka perlu didapatkan interval yang memuat $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j)$ dan $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$, dengan $\mu_i \in (t_j, t_{j+1})$ dan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Dari persamaan (1) diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x,t) \tag{30}$$

dan

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x,t). \tag{31}$$

Dengan mengasumsikan

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x,t)\right| \leq M, 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T. \tag{32}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \in \alpha^2 \left[-M, M\right] \tag{33}$$

dengan $\mu_i \in (t_j, t_{j+1})$ dan

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \in \frac{1}{\alpha^2}\left[-M, M\right] \tag{34}$$

dengan $\xi_j \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Kemudian subtitusi persamaan (6) dan (8) ke persamaan (1) serta dengan Memisalkan $\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$ akan diperoleh

$$u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i+1,j} - \alpha^2 \frac{kh^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x_i, \mu_j). \quad (35)$$

dengan $u_{i,j}$ pendekatan untuk $u(x_i, y_j)$. Kemudian subtitusi persamaan (33) dan (34) ke persamaan (35)maka diperoleh

$$U_{i,j+1} = (1-2\lambda)U_{i,j} + \lambda U_{i-1,j} + \lambda U_{i+1,j} - \frac{kh^2}{12}[-M, M] + \alpha^2 \frac{k^2}{2}[-M, M] \quad (36)$$

dimana $U_{i,j} = \left[\underline{u}_{i,j}, \overline{u}_{i,j}\right]$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $j = 1, 2, 3, \cdots, m$,dengan syarat awal

$$U_{i,0} = F([ih, ih]), i = 0, 1, \cdots, n, \quad (37)$$

dan syarat batas

$$U_{0,j} = U_{n,j} = [0, 0], j = 1, 2, \cdots, m. \quad (38)$$

Persamaan (36) merupakan formula metode *Forward Difference* Interval yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas. Dalam bentuk matrik, persamaan (36) dapat dituliskan sebagai berikut

$$U^{(j)} = AU^{(j-1)} + r, j = 1, 2, \cdots, m-1, \quad (39)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix},$$

$$U^{(j)} = \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ U_{3,j} \\ \vdots \\ U_{n-1,j} \end{bmatrix}, U^{(j-1)} = \begin{bmatrix} U_{1,j-1} \\ U_{2,j-1} \\ U_{3,j-1} \\ \vdots \\ U_{n-1,j-1} \end{bmatrix} \text{dan } r = \begin{bmatrix} R \\ R \\ R \\ \vdots \\ R \end{bmatrix}$$

dan

$$R = \alpha^2 \frac{k^2}{2}[-M, M] - \frac{kh^2}{12}[-M, M]. \quad (40)$$

Dengan nilai M adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} M \approx \frac{1.5}{kh^2} maks_{i=1,\ldots,n-1, j=0,\ldots,m-2} |u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j} \\ - 2u_{i,j+1} - u_{i,j} \\ + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}|. \end{aligned} \quad (41)$$

4. Contoh Numerik

Misalkan sebatang kawat berukuran 1 meter yang diberi aliran panas disepanjang sumbu x selama 0,05 detik. Bentuk umum persamaan panas, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < 1, \qquad t \geq 0 \tag{42}$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = sin(\pi x), \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{43}$$

dan syarat batas

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{44}$$

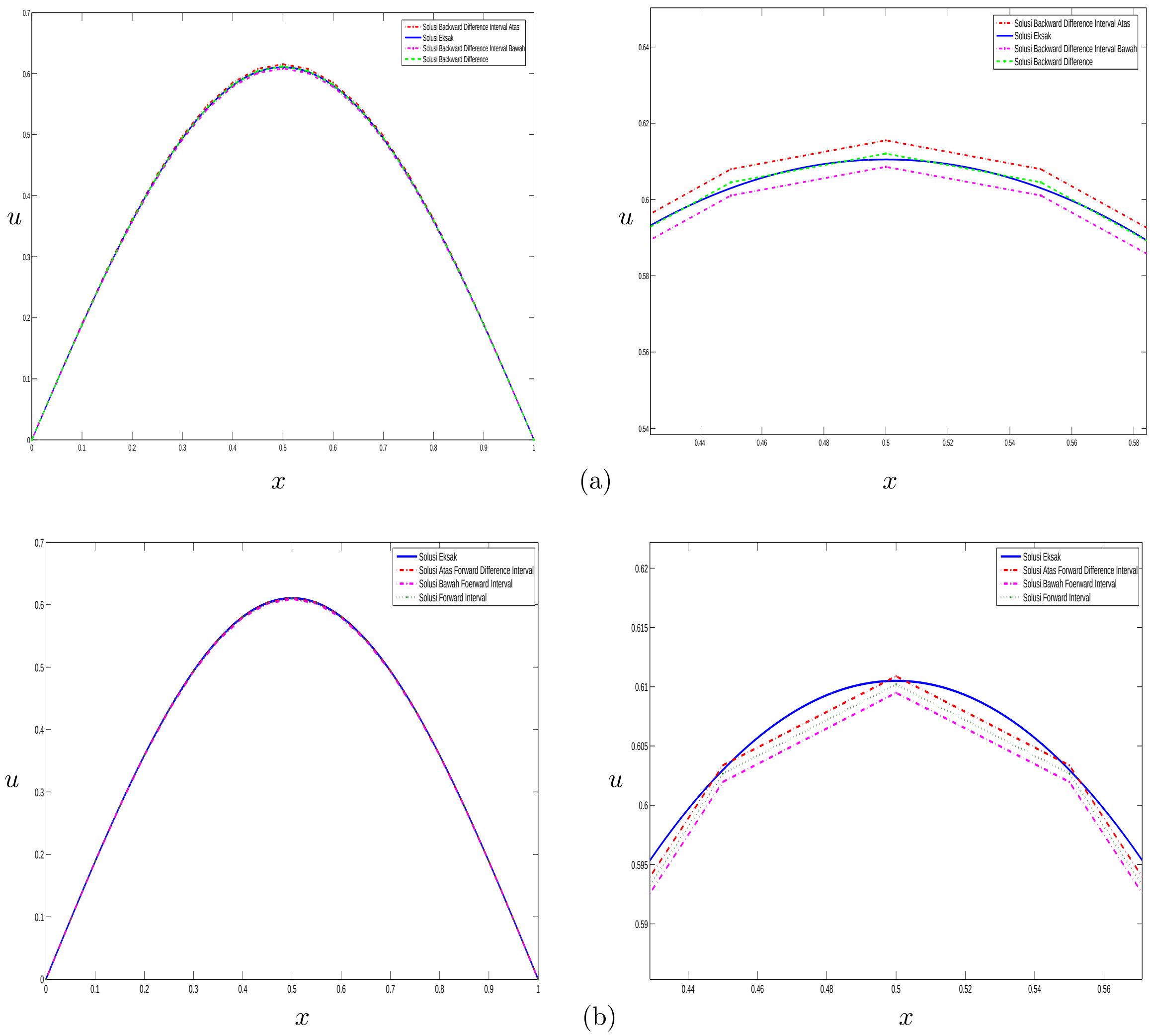
Permasalahan diatas akan diselesaikan secara numerik yaitu menggunakan metode *Finite Difference* dan metode *Finite Difference* Interval. Dengan memilih $n = 20, m = 80$, karena telah didefinisikan $h = (b-a)/n = (1-0)/20$ sehingga diperoleh $h = 0,05$ dan $k = T/m = 0,05/80$ maka diperoleh $k = 0,000625$. Kemudian nilai $M = 145$ untuk metode *Backward Difference* Interval yang diperoleh dari persamaan (29) serta $M = 97$ untuk metode *Forward Difference* Interval yang diperoleh dari persamaan (41). Hasil komputasi numerik dapat dilihat pada tabel berikut :

Tabel 1: Solusi numerik dengan menggunakan metode *Backward Difference* dan metode *Backward Difference* Interval dengan nilai $M = 145$, serta solusi numerik dengan menggunakan metode *Forward Difference* dan metode *Forward Difference* Interval dengan nilai $M = 97$.

i	x_i	$u(x_i,t_j)$	$u_{i,j}$	$[W_{i,j}, U_{i,j}]$	$v_{i,j}$	$[Z_{i,j}, V_{i,j}]$
0	0.0000	0.0000	0.0000	[0.0000, 0.0000]	0.00000	[0.00000, 0.00000]
1	0.0500	0.0955	0.0957	[0.0949, 0.0966]	0.09545	[0.09528, 0.09562]
2	0.1000	0.1887	0.1891	[0.1876, 0.1907]	0.18856	[0.18825, 0.18887]
3	0.1500	0.2772	0.2779	[0.2758, 0.2800]	0.27702	[0.27660, 0.27744]
4	0.2000	0.3588	0.3597	[0.3572, 0.3623]	0.35866	[0.35815, 0.35917]
5	0.2500	0.4317	0.4328	[0.4299, 0.4356]	0.43147	[0.43089, 0.43205]
6	0.3000	0.4939	0.4952	[0.4921, 0.4982]	0.49365	[0.49303, 0.49427]
7	0.3500	0.5440	0.5453	[0.5421, 0.5486]	0.54368	[0.54302, 0.54434]
8	0.4000	0.5806	0.5821	[0.5787, 0.5855]	0.58032	[0.57964, 0.58100]
9	0.4500	0.6030	0.6045	[0.6011, 0.6080]	0.60268	[0.60198, 0.60338]
10	0.5000	0.6105	0.6120	[0.6086, 0.6155]	0.61019	[0.60949, 0.61089]
11	0.5500	0.6030	0.6045	[0.6011, 0.6080]	0.60268	[0.60198, 0.60338]
12	0.6000	0.5806	0.5821	[0.5787, 0.5855]	0.58032	[0.57964, 0.58100]
13	0.6500	0.5440	0.5453	[0.5421, 0.5486]	0.54368	[0.54302, 0.54434]
14	0.7000	0.4939	0.4952	[0.4921, 0.4982]	0.49365	[0.49303, 0.49427]
15	0.7500	0.4317	0.4328	[0.4299, 0.4356]	0.43147	[0.43089, 0.43205]
16	0.8000	0.3588	0.3597	[0.3572, 0.3623]	0.35866	[0.35815, 0.35917]
17	0.8500	0.2772	0.2779	[0.2758, 0.2800]	0.27702	[0.27660, 0.27744]
18	0.9000	0.1887	0.1891	[0.1876, 0.1907]	0.18856	[0.18825, 0.18887]
19	0.9500	0.0955	0.0957	[0.0949, 0.0966]	0.09545	[0.09528, 0.09562]
20	1.0000	0.0000	0.0000	[0.0000, 0.0000]	0.00000	[0.00000, 0.00000]

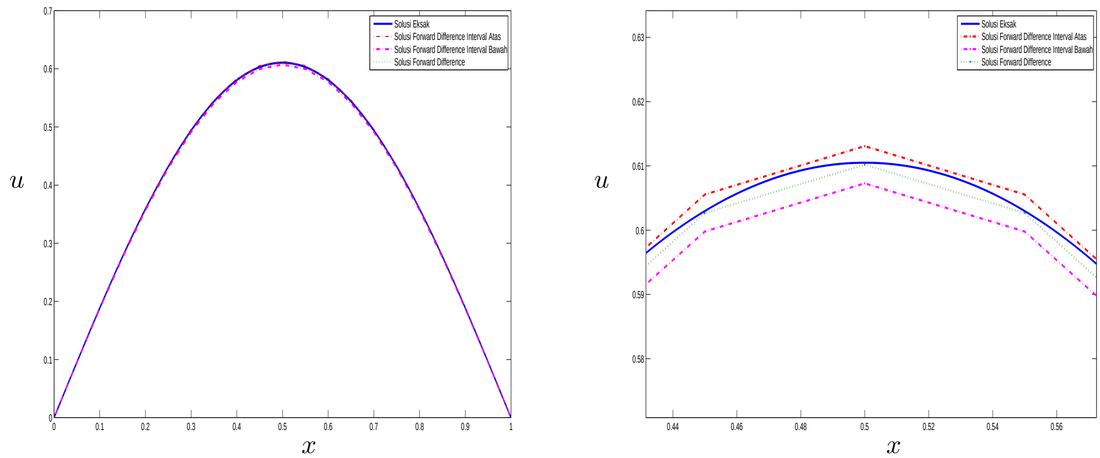
Pada Tabel 1, kolom $u(x_i, t_j)$ menyatakan solusi eksak. Kolom $u_{i,j}$ merupakan solusi numerik dengan metode *Backward Difference*. Sedangkan pada kolom $[W_{i,j}, U_{i,j}]$

merupakan solusi numerik dengan metode *Backward Difference* Interval, $U_{i,j}$ merupakan solusi interval atas dan $W_{i,j}$ merupakan interval bawah. Kolom $v_{i,j}$ merupakan solusi numerik yang dengan metode *Forward Difference*. Sedangkan kolom $[Z_{i,j}, V_{i,j}]$ merupakan solusi numerik dengan metode *Forward Difference* Interval, $V_{i,j}$ merupakan interval atas sedangkan $Z_{i,j}$ merupakan interval bawah.



Gambar 1: (a) Grafik Solusi Numerik Metode *Backward Difference* Interval dengan $M = 145$, Solusi Numerik Metode *Backward Difference* dan Solusi Eksak dalam x_i dan t_j pada $t = 0.05$, (b) Grafik Solusi Numerik Metode *Forward Difference* Interval dengan nilai $M = 97$, Solusi Numerik Metode *Forward Difference* dan Solusi Eksak dalam x_i dan t_j pada $t = 0.05$

Berdasarkan Gambar 1(a) dapat dilihat bahwa metode *Backward Difference* dan solusi eksak berada di dalam grafik metode *Backward Difference* Interval, hal ini menunjukkan bahwa metode *Backward Difference* Interval memberikan solusi dalam bentuk interval yang memuat semua kemungkinan galat numerik. Selanjutnya, berdasarkan Gambar 1(b) dapat dilihat bahwa hanya pada titik (x_i, t_j) saja solusi eksak berada di dalam grafik metode *Forward Difference* Interval, hal ini menunjukkan nilai M yang diperoleh dari hasil rumusan persamaan (41) hanya menjamin keberadaan sokusi eksak di dalam solusi *Forward Difference* Interval pada titik (x_i, t_j) saja. Untuk itu dilakukan komputasi numerik metode *Forward Difference* Interval dengan pengambilan nilai M yang berbeda dari 97, pada komputasi berikut ini diambil nilai $M = 600$.



Gambar 2: Grafik Solusi Numerik Metode *Forward Difference* dan Metode *Forward Difference* Interval dengan nilai $M = 600$ serta Solusi Eksak dalam x_i dan t_j pada $t = 0.05$

Dari Grafik 2 terlihat bahwa solusi eksak berada di dalam grafik solusi metode *Forward Difference* Interval, ini menunjukkan bahwa metode *Forward Difference* Interval dengan nilai $M = 600$ memberikan solusi yang memuat semua kemungkinan galat numerik.

Dari hasil eksperimen tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa bahwa Metode *Finite Difference* Interval mempunyai keunggulan dari Metode *Finite Difference* dalam memberikan solusi yang mendekati solusi sebenarnya (solusi eksak). Solusi yang diperoleh dengan Metode *Finite Difference* Interval yaitu dalam bentuk interval yang berisi semua kemungkinan galat numerik dengan pemilihan nilai M yang tepat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, New York.

[2] Bartle, R. G. & D. R. Shebert. 1999. *Introduction to Real Analysis, Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] Faires, JD & R. Burden. 1993. *Numerical Analysis Fifth Edition*. PWS Publishing Company, Boston.

[4] Jankowska, M.A. 2009. An Interval Finite Difference Method for Solving the One-Dimensional Heat Equation: 4 hal. http://para08.idi.ntnu.no/docs/submission-107.pdf, 25 Desember 2011. Pk. 17.00,

[5] Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Erlangga, Bandung.

[6] Patel, V.A 1994. *Numerical Analysis*. Saunders College Publishing, Orlando.

[7] Sauer, T. 2006. *Numerical Analysis*. Addison Wesley, Boston.