

**KOMBINASI PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI
PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA MENGGUNAKAN KOEFISIEN
REGRESI, KOEFISIEN KURTOSIS DAN KOEFISIEN VARIASI**

Defil Ardhi¹, Firdaus², Haposan Sirait²

defil_math@yahoo.com

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya Pekanbaru, 28293, Indonesia

ABSTRACT

This paper discussed combining ratio estimators in simple random sampling using coefficient regression, coefficient kurtosis, coefficient variance suggested by Kadilar and Cingi [4]. These estimators are biased there for the *Mean Square Error* is calculated for each estimators to obtain is most efficient estimator. This comparison shows that the combining ratio estimators is more efficient than the ratio estimator it self.

Key words: *Simple Random Sampling, Coefficient Regression, Coefficient Kurtosis, Coefficient Variance, Mean Square Error.*

1. PENDAHULUAN

Penaksir rasio untuk rata-rata populasi telah banyak dikembangkan oleh para peneliti diantaranya Kadilar dan Cingi [4] mengajukan penaksir rasio menggunakan koefisien regresi, koefisien kurtosis dan koefisien variasi dengan bentuk :

$$\bar{y}_{KC4} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} \beta_2(x) + C_x} [\bar{X} \beta_2(x) + C_x] \quad (1)$$

$$\bar{y}_{KC5} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} C_x + \beta_2(x)} [\bar{X} C_x + \beta_2(x)], \quad (2)$$

hubungan antara dua variabel, yaitu y_i dan x_i dimana y_i adalah unit dari populasi Y dan x_i adalah unit dari populasi X , dan populasi X dari x_i harus diketahui. Variabel x_i merupakan suatu variabel pendukung yang berkorelasi

dengan variabel y_i yang akan ditaksir. Dari penaksir rasio, Kadilar dan Cingi [4] mengajukan kombinasi penaksir rasio dengan bentuk :

$$\bar{y}_{pr3} = \omega_1 \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}} \bar{X} + \omega_2 \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} \beta_2(x) + C_x} [\bar{X} \beta_2(x) + C_x] \quad (3)$$

$$\bar{y}_{pr4} = \omega_1 \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}} \bar{X} + \omega_2 \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x} C_x + \beta_2(x)} \bar{X} C_x + \beta_2(x), \quad (4)$$

keempat penaksir rasio untuk rata-rata populasi tersebut merupakan penaksir bias. Untuk mengetahui penaksir yang lebih efisien perlu diketahui *Mean Square Error (MSE)* masing-masing penaksir. Oleh karena itu untuk memperoleh penaksir yang efisien, dapat dihitung *MSE* dari masing-masing penaksir. Semakin kecil yang diperoleh maka akan menghasilkan penaksir efisien.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Misalkan sampel berukuran n unit, maka kesempatan tiap unit untuk terpilih menjadi anggota sampel adalah n/N . Probabilitas suatu unit akan terpilih menjadi sampel pada pengambilan pertama adalah n/N , pada pengambilan kedua adalah $(n-1)/(N-1)$ dan seterusnya, maka probabilitas dari n unit terpilih pada pengambilan ke- n kali adalah [2: h. 21] :

$$\frac{n}{N} \frac{(n-1)}{(N-1)} \frac{(n-2)}{(N-2)} \dots \frac{1}{(N-n+1)} = \frac{n!(N-n)!}{N!},$$

sampel yang telah terpilih tidak dikembalikan pada populasinya untuk seluruh penarikan berikutnya, maka cara ini dinamakan sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Ketelitian suatu taksiran ditentukan juga oleh metode yang dipergunakan untuk menghitung taksiran tersebut dan rancangan cara pengambilan sampel.

Teorema 2.1 [2 :h.27] Apabila sampel diambil secara acak sederhana tanpa pengembalian, maka variansi rata-rata sampel \bar{y} untuk sampling acak sederhana adalah

$$V(\bar{y}) = \frac{1-f}{n} s_y^2,$$

dengan

$$f = \frac{n}{N} \text{ adalah fraksi penarikan sampel}$$

Bukti. Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2] .

Teorema 2.2 [2:h.29] Jika (y_i, x_i) adalah suatu pasangan yang bervariasi pada unit dalam populasi dan (\bar{y}, \bar{x}) adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansinya adalah

$$\text{Cov}(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

Bukti. Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2] .

Teorema 2.3 [6:h.41] Teorema Taylor Deret Taylor untuk Dua Variabel. Misalkan $f(x, y)$ adalah suatu fungsi dua variabel, dengan $f(x, y) : D \rightarrow \mathfrak{R}$ dan $f^{(n+1)}$ ada pada D dan kontinu pada D dengan $(x_0, y_0) \in D$, jika $(x_0 + k, y_0 + l) \in D$ terdapat $(x_0 + \theta k, y_0 + \theta l) \in (x_0 + k, y_0 + l)$, maka

$$\begin{aligned} f(x_0 + k, y_0 + l) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(k \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(k \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(k \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta k, y_0 + \theta l) \end{aligned} \quad (5)$$

Bukti. Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [6] .

3. TAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL REGRESI LINIER

Dalam beberapa penelitian sering kali ingin diketahui hubungan antara satu variabel dengan beberapa variabel lainnya yang disebut dengan regresi. Salah satu model regresi yang digunakan adalah model regresi linier. Model regresi linier sederhana adalah [7: h. 40]

$$y = \alpha + \beta x + e,$$

dengan α dan β adalah parameter yang akan ditaksir atau disebut dengan koefisien regresi, dan e adalah kesalahan pengamatan.

Teorema 2.4 [7.h:40] Misalkan $y = \alpha + \beta x + e$ merupakan penaksir tak bias untuk model regresi linier sederhana, dengan metode kuadrat terkecil diperoleh penaksir dari a dan b yaitu :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

dan

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

nilai taksiran b untuk β pada Teorema 2.4 dapat juga dinyatakan dengan

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

5. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI

Masing-masing penaksir yang dibahas merupakan penaksir yang bias. Kemudian akan ditentukan bias dan MSE dari masing-masing penaksir. Selanjutnya akan ditentukan penaksir yang efisien dengan membandingkan MSE dari setiap penaksir. Suatu penaksir dikatakan efisien apabila mempunyai MSE yang minimum.

Bias dan MSE penaksir rasio untuk rata-rata populasi menggunakan koefisien regresi, koefisien kurtosis dan koefisien variasi pada sampling acak sederhana \bar{y}_{KC4} adalah

$$B(\bar{y}_{KC4}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} \delta^2 C_x^2 \quad (6)$$

$$MSE(\bar{y}_{KC4}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{KC4}^2 S_x^2 + S_y^2 (1 - \rho^2)). \quad (7)$$

Bias dan MSE penaksir rasio untuk rata-rata populasi menggunakan koefisien regresi, koefisien kurtosis dan koefisien variasi pada sampling acak sederhana \bar{y}_{KC5} adalah

$$B(\bar{y}_{KC5}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} \delta^2 \beta_2(x)^2 \quad (8)$$

$$MSE(\bar{y}_{KC5}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{KC5}^2 S_x^2 + S_y^2 (1-\rho^2)). \quad (9)$$

Bias dan MSE penaksir rasio untuk rata-rata populasi menggunakan koefisien regresi, koefisien kurtosis dan koefisien variasi pada sampling acak sederhana \bar{y}_{pr3} adalah

$$B(\bar{y}_{pr3}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} \delta^2 \beta_2(x)^2 \quad (10)$$

$$MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx \frac{1-f}{n} (S_y^2 - 2\eta S_{xy} + \eta^2 S_x^2). \quad (11)$$

Bias dan MSE penaksir rasio untuk rata-rata populasi menggunakan koefisien regresi, koefisien kurtosis dan koefisien variasi pada sampling acak sederhana \bar{y}_{pr4} adalah

$$B(\bar{y}_{pr4}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} \delta^2 C_x^2. \quad (12)$$

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx \frac{1-f}{n} (S_y^2 - 2\eta S_{xy} + \eta^2 S_x^2). \quad (13)$$

Selanjutnya akan ditentukan penaksir yang efisien diantara keempat penaksir rasio yang diajukan, yaitu

1. Penaksir rasio \bar{y}_{pr3} dengan penaksir rasio \bar{y}_{KC4} .

diperoleh bahwa penaksir rasio \bar{y}_{pr3} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{KC4} jika

$$\text{jika } R < R_{KC4}, \text{ untuk } (\omega_1 R + \omega_2 R_{KC4}) - R_{KC4} < 0$$

$$\text{jika } R > R_{KC4}, \text{ untuk } (\omega_1 R + \omega_2 R_{KC4}) - R_{KC4} > 0$$

2. Penaksir rasio \bar{y}_{pr4} dengan penaksir rasio \bar{y}_{KC5} .

diperoleh bahwa penaksir rasio \bar{y}_{pr4} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{KC5} jika

$$\text{jika } R < R_{KC5}, \text{ untuk } [(\omega_1 R + \omega_2 R_{KC5}) - R_{KC5}] S_x^2 < 0$$

$$\text{jika } R > R_{KC5}, \text{ untuk } [(\omega_1 R + \omega_2 R_{KC5}) - R_{KC5}] S_x^2 > 0$$

3. Penaksir rasio \bar{y}_{pr4} dengan penaksir rasio \bar{y}_{pr3} .

diperoleh bahwa penaksir rasio \bar{y}_{pr4} lebih efisien dari penaksir rasio \bar{y}_{pr3} jika

$$R_{KC5} < R_{KC4}.$$

6. CONTOH APLIKASI

Dengan menggunakan data dari Kadilar dan Chingi (2003). Mempertimbangkan data dari daerah Marmara Turkey. Data berkaitan dengan taraf penghasilan apel dan jumlah dari pohon apel pada 106 desa di daerah Marmara tahun 1999. Dengan menggunakan data tersebut akan ditentukan penaksir rasio yang paling efisien digunakan untuk menaksir rata-rata produksi apel yakni dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya dan secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung MSE dari masing-masing penaksir yang diberikan. Untuk menghitung MSE dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Dengan bantuan Microsoft Excel diperoleh nilai-nilai sebagaimana yang tertera pada Tabel 1.

Tabel 1

Variabel Tambahan dan Data Statistik

$N = 106$	$n = 20$	$\rho = 0.86$	$\bar{X} = 27421,70$
$\bar{Y} = 2212,59$	$\beta_2(x) = 34.57$	$C_x = 2,10$	$C_y = 5,22$
$S_{yx} = 568176176.10$	$S_x = 57460.61$	$S_y = 11551.53$	$R = 0.0807$
$R_{KC4} = 0.0806$	$R_{KC5} = 0.0806$	$R_{pr3} = 0.00651$	$R_{pr4} = 0.00647$

Secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir. Dengan bantuan Microsoft Excel pada tabel 1, *MSE* dari masing-masing penaksir diperoleh seperti pada tabel 2

Tabel 2*MSE* Penaksir Rasio dan Kombinasi Penaksir Rasio

Penaksir Rasio	<i>MSE</i>
\bar{y}_{KC4}	2318718.59
\bar{y}_{KC5}	2317674.08
\bar{y}_{pr3}	1446719.34
\bar{y}_{pr4}	1446719.34

Dengan menggunakan informasi pada Tabel 1, diperoleh bahwa kombinasi penaksir rasio (\bar{y}_{pr3}) dan kombinasi penaksir rasio (\bar{y}_{pr4}) merupakan penaksir yang paling efisien dibandingkan dengan penaksir rasio (\bar{y}_{KC4}) dan penaksir rasio (\bar{y}_{KC5}) .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain. L. J, Engelhard. M. 1991. *Introduction to Probability Mathematical Statistics*. Second edition. Duxbury Press, California.
- [2] Cochran, W.G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E.R Osman. Universitas Indonesia, Jakarta.
- [3] Hogg, R. V. & and E. A. Tanis. 2001. *Probability and Statistical Inference. Sixth Edition*. Upper Saddle River, New Jersey.
- [4] Kadilar, C. H. Cingi. 2006. Improvement in estimating the population mean in simple random sampling, *Applied Mathematics and Computation*. 19 : 75-79.
- [5] Montgomery , D.C & G.C. Runger.1999. *Applied Statistics And Probability For Engineers, Second Edition*. John Willey & Sons, New York.[6] Phillips. G. M & P. J. Taylor. *Theory and Applications of Numerical Analysis, Second Edition*. Academic Press, New York.
- [7] Sembiring R. K. 2003. Analisis Regresi. Second Edition. ITB, Bandung
- [8] Sukhatme, P. V, 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi

