3

SOLUSI PROGRAM LINEAR DENGAN GRAFIK

Pandang kembali persoalan PT Pelangi pada Bab 2,

$$\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{kendala} \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \tag{2}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \tag{3}$$

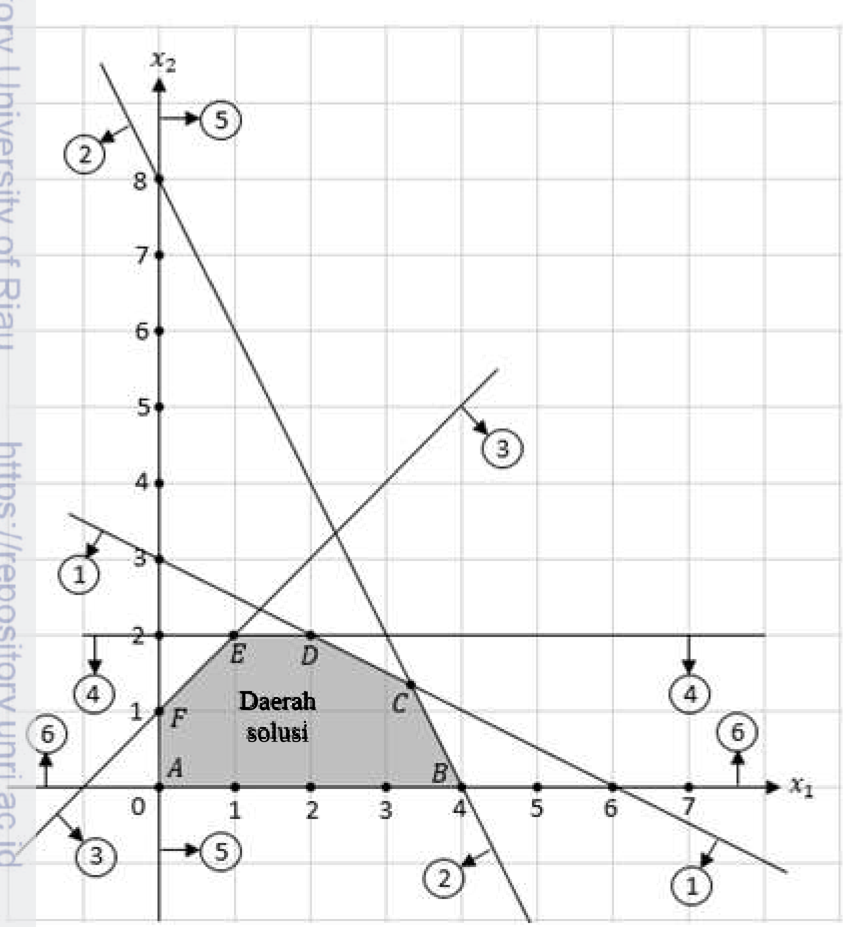
$$x_2 \leq 2 \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{5}$$

$$x_2 \geq 0. \tag{6}$$

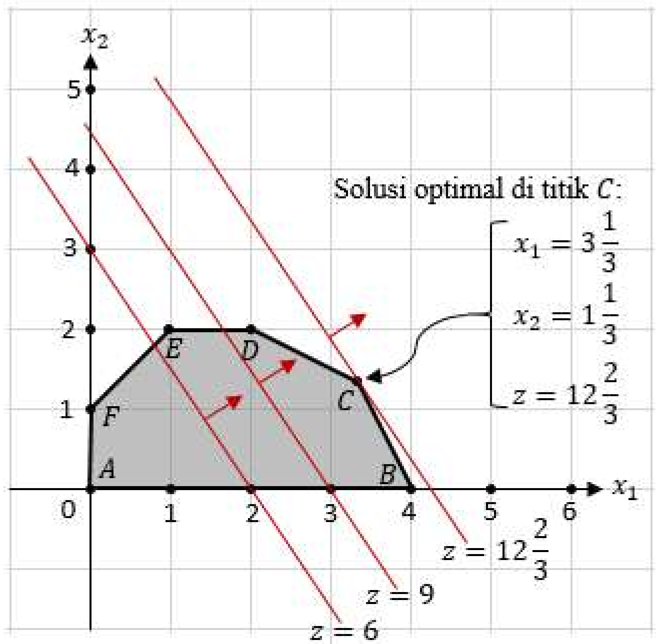
Langkah pertama adalah menentukan daerah solusi atau daerah layak. Gambar 3.1 menunjukkan daerah layak yang diinginkan. Kendala tidak negatif $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$ menjamin semua nilai fisibel atau nilai yang layak berada pada kuadran pertama.

Untuk pertidaksamaan (1)-(4) diarsir berturut-turut ke arah bawah persamaan garis $x_1 + 2x_2 = 6$, $2x_1 + x_2 = 8$, $-x_1 + x_2 = 1$, dan $x_2 = 2$. Pertidaksamaan $x_1 \geq 0$ diarsir ke kanan sumbu vertikal dan pertidaksamaan $x_2 \geq 0$ diarsir ke atas sumbu horizontal. Irisan dari semua arsiran ini menghasilkan daerah layak $ABCDEF$. Daerah layak suatu program linear adalah himpunan semua titik yang memenuhi kendala program linear dan memenuhi kendala tidak negatif. Untuk peogram linear PT Pelangi kendala tidak negatif adalah $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$.



Gambar 3.1 Daerah solusi persoalan PT Pelangi

Meskipun terdapat tidak hingga titik-titik yang layak, solusi optimal dapat ditentukan dengan menyelidiki arah kemana fungsi tujuan bertambah (maksimisasi) atau berkurang (minimisasi). Gambar 3.2 mengilustrasikan hasil ini. Garis paralel yang menggambarkan fungsi tujuan di-*plot* dengan mengambil sebarang nilai menaik dari $z = 3x_1 + 2x_2$ untuk menentukan gradien maupun arah dimana perolehan total (fungsi tujuan) meningkat. Garis z ini dinamakan juga garis *isoprofit* untuk persoalan maksimisasi atau garis *isocost* untuk persoalan minimisasi. Pada Gambar 3.2 diambil nilai $z = 6$ dan $z = 9$.



Gambar 3.2 Garis *isoprofit* masalah PT Pelangi

Untuk menentukan solusi optimal, garis *isoprofit* digeser ke kanan dan ke atas, ke titik dimana jika diteruskan penambahan perolehan akan mengakibatkan solusi tidak layak. Dari Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa daerah solusi terakhir yang disentuh oleh garis *isoprofit* sebelum ia meninggalkan daerah solusi tersebut adalah titik $C\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$. Ini menunjukkan bahwa solusi optimal untuk persoalan PT Pelangi terjadi pada titik *C*, dan solusi optimal ini tunggal.

Solusi optimal program linear dapat juga diperoleh dengan menyelidiki nilai fungsi tujuan pada setiap titik ekstrim atau titik sudut yang berada di dalam daerah solusi. Dengan memperhatikan Ganbar 3.2 disajikan Tabel 3.1 untuk menyelidiki nilai fungsi tujuan z pada setiap titik sudut. Tabel 3.1 menunjukkan bahwa nilai fungsi tujuan yang paling besar terjadi pada titik $C\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$, yaitu $z = 12\frac{2}{3}$. Jadi solusi optimal PT Pelangi adalah $x_1 = 3\frac{1}{3}$ dan $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Tabel 3.1 Nilai fungsi tujuan pada titik sudut

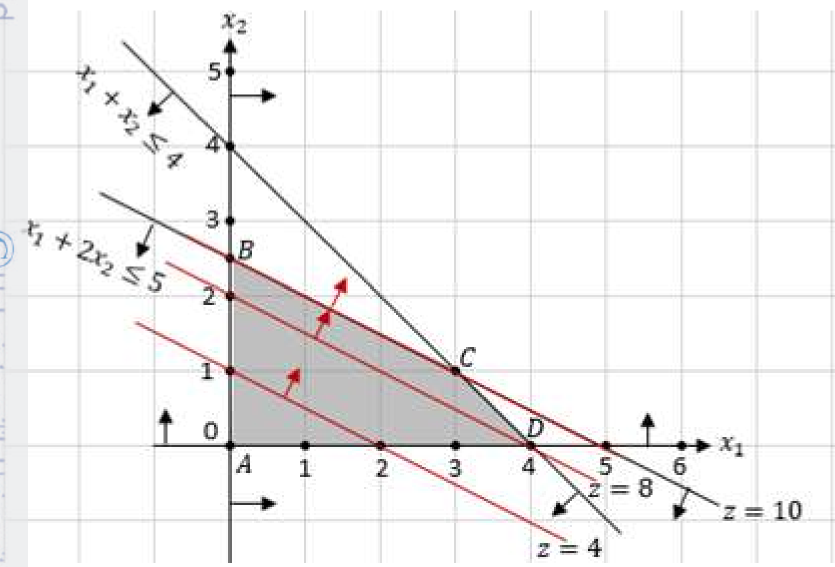
Titik sudut	Nilai z
$A(0,0)$	0
$B(4,0)$	12
$C\left(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3}\right)$	$12\frac{2}{3}$
$D(2,2)$	10
$E(1,2)$	7
$F(0,1)$	2

3.1 Solusi Optimal Banyak

Perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{kendala } & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 + \ x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Grafik dari program linear ini dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Grafik program linear dengan solusi banyak

Dari Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa “titik” terakhir yang berpotongan dengan garis *isoprofit* adalah keseluruhan segmen garis BC. Jadi titik $B(0,\ 5/2)$ dan titik $C(3,1)$ serta semua titik yang terletidak pada segmen garis BC memberikan nilai z optimal; yaitu, untuk $0 \leq \lambda \leq 1$, semua titik yang terletidak pada segmen garis BC diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3\lambda \\ 1+3\lambda/2 \end{bmatrix}.$$

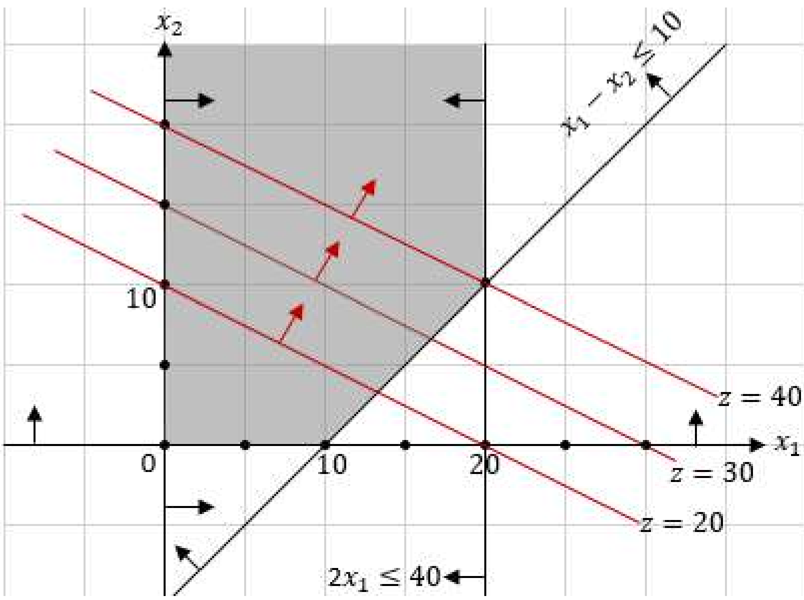
Selidikilah bahwa bila $\lambda = 0$, solusi optimal adalah $(x_1^*, x_2^*) = (3,1)$, yaitu di titik B. Bila $\lambda = 1$, $(x_1^*, x_2^*) = (0, 5/2)$, yaitu di titik C. Untuk nilai λ antara 0 dan 1, nilai optimal (x_1^*, x_2^*) terletak antara B dan C.

3.2 Solusi Optimal Tidak Terbatas

Perhatikan program linear

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{kendala } \quad x_1 - x_2 \leq 10 \\ &\qquad\qquad\quad 2x_1 \qquad \leq 40 \\ &\qquad\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Daerah solusinya ditunjukkan oleh Gambar 3.4.



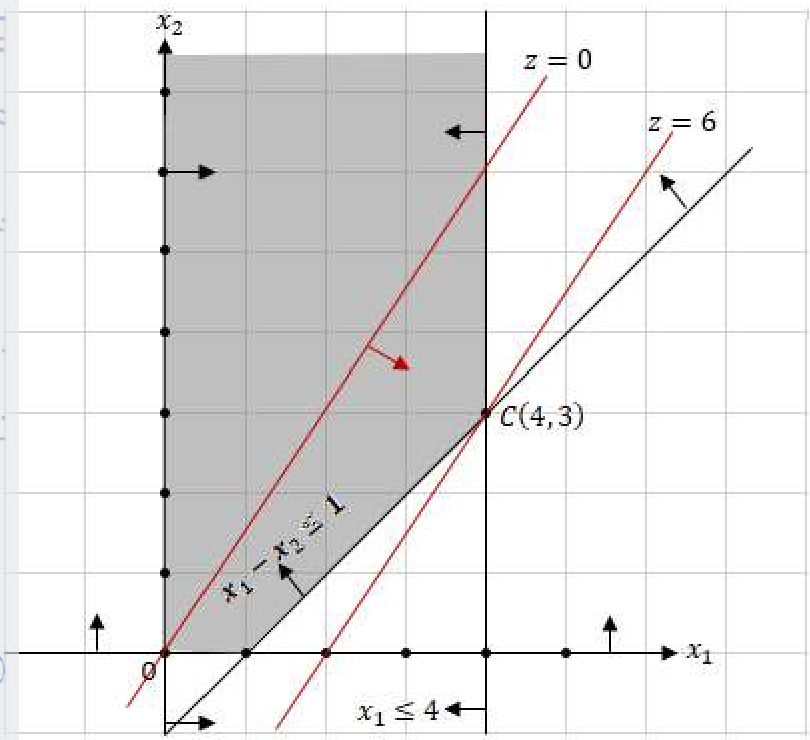
Gambar 3.4 Grafik program linear dengan solusi tidak terbatas

Dari Gambar 3.4 terlihat bahwa berapapun besarnya nilai z, garis *isoprofit* tetap memotong daerah solusi. Jadi, terdapat titik-titik di daerah solusi yang memberikan sebarang nilai z yang besar. Daerah solusi ini tidak terbatas dalam arah x_2.

Ada kasus program linear dengan daerah solusi tidak terbatas tetapi memiliki nilai fungsi tujuan berhingga. Sebagai contoh perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks} \quad & z = 3x_1 - 2x_2 \\ \text{kendala} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \qquad \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

yang daerah solusinya ditunjukkan oleh Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Daerah solusi tidak terbatas solusi tunggal

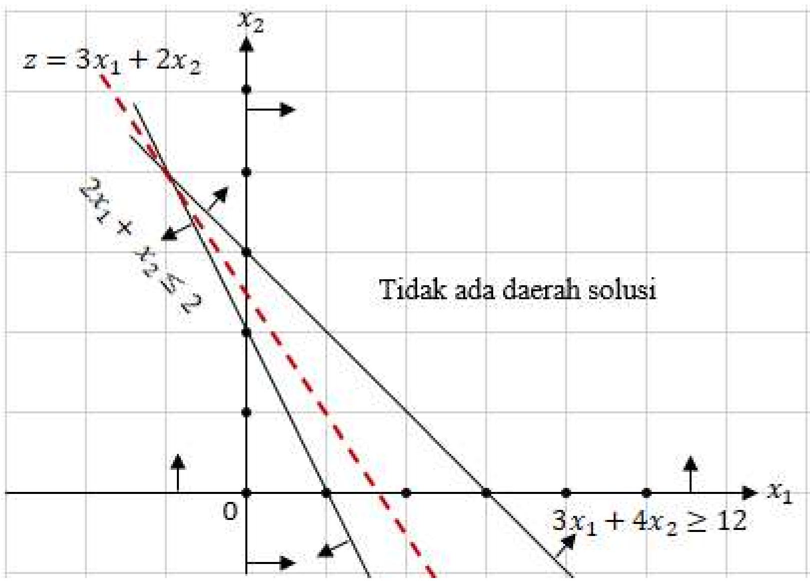
Dari gambar dapat dilihat bahwa garis *isoprofit* menyentuh daerah solusi terakhir di titik C. Jadi titik $C(4,3)$ memberikan solusi optimal. Jelaslah bahwa gradien dari garis *isoprofit* atau *isocost* sangat menentukan terbatas atau tidaknya fungsi tujuan.

3.3 Program Linear Tidak Layak

Jika kendala tidak terpenuhi secara simultan, model program linear dikatidakan tidak mempunyai solusi layak. Sebagai contoh, perhatikan program linear

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{kendala } & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Gambar 3.6 menunjukkan daerah solusi program linear di atas tidak layak atau dengan kata lain program linear tersebut tidak memiliki solusi.



Gambar 3.6 Grafik program linear tidak layak

Soal-Soal Latihan

1. Selesaikan persoalan PT Bajaku, Model 2 pada Bab 2, dengan grafik.
2. Selesaikan dengan grafik persoalan pak tani Midun, soal latihan nomor 1 pada Bab 2.
3. Selesaikan program linear berikut dengan grafik dan identifikasi jenis solusinya (solusi tunggal, solusi banyak, solusi tidak terbatas, atau tidak ada solusi).

a. $\text{maks } z = x_1 + x_2$

$\text{kendala } x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

b. $\text{maks } z = 4x_1 + x_2$

$\text{kendala } 8x_1 + 2x_2 \leq 16$

$5x_1 - 2x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

c. $\text{maks } z = -x_1 + 3x_2$

$\text{kendala } x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

d. $\text{maks } z = 3x_1 + x_2$

$\text{kendala } 2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + 3x_2 \geq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

4. Benar atau salah. Daerah solusi suatu program linear mestilah tidak terbatas agar program linear tersebut mempunyai solusi tidak terbatas. Berikan ilustrasi secara grafik.
5. Benar atau salah. Setiap program linear dengan daerah solusi tidak terbatas mempunyai solusi optimal tidak tebatas. Berikan ilustrasi secara grafik.

REFERENSI TERPILIH

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1995.

C. Leon and D. Steinberg. *Methods and Applications of Linear Programming*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1974.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.