2

PEMODELAN MATEMATIKA

Program linear memberikan dasar-dasar yang penting bagi pengembangan metode penyelesaian untuk teknik-teknik riset operasi yang lain, seperti program integer, program stokastik, dan program taklinear. Program linear telah digunakan dengan sukses yang mengagumkan untuk masalah-masalah mulai dari kasus yang biasa di industri, militer, pertanian, ekonomi, transportasi, dan kesehatan sampai kepada kasus-kasus yang ekstrim pada ilmu-ilmu sosial dan perilaku. Berikut ini diberikan beberapa contoh model matematika program linear.

2.1 Model Sederhana

Model 1 PT Pelangi memiliki sebuah pabrik cat yang memproduksi cat bagian dalam dan cat bagian luar untuk distribusi secara massal. Untuk memproduksi kedua jenis cat tersebut digunakan dua jenis bahan mentah, yaitu bahan mentah A dan bahan mentah B. Maksimum bahan A yang tersedia adalah 6 ton per hari dan bahan B 8 ton per hari. Kebutuhan bahan mentah setiap hari per ton cat bagian dalam dan cat bagian luar diringkas dalam Tabel 2.1.

Dari riset pasar diketahui bahwa permintaan terhadap cat bagian dalam melebihi permintaan terhadap cat bagian luar paling banyak 1 ton per hari. Riset juga menunjukkan bahwa permintaan maksimum terhadap cat bagian dalam terbatas sebanyak 2 ton per hari. Harga grosiran per ton adalah Rp30 juta untuk cat bagian luar dan Rp20 juta untuk cat bagian dalam. Berapa banyak cat bagian luar dan bagian dalam sebaiknya diproduksi oleh PT Pelangi agar diperoleh pendapatan kotor (*gross income*) maksimum?

Tabel 2.1 Persediaan bahan mentah cat bagian luar dan bagian dalam

	Berat (dalam ton) bahan mentah per ton cat		Maksimum yang tersedia (ton)
	Cat luar	Cat dalam	
Bahan mentah A	1	2	6
Bahan mentah B	2	1	8

Membangun Model Matematika

Membangun model matematika dapat diawali dengan menjawab tiga pertanyaan berikut:

1. Apa yang akan ditentukan oleh model? Dengan kata lain, apa yang merupakan variabel keputusan dari masalah tersebut?
2. Kendala (*constraint*) apa yang ditekankan pada variabel untuk memenuhi keterbatasan dari sistem yang dimodel?
3. Apa tujuan yang akan dicapai dalam upaya memenuhi solusi optimal (terbaik) dari sekian banyak nilai yang layak (*feasible*) dari variabel-variabel tersebut?

Ringkasan verbal dari masalah di atas adalah PT Pelangi berusaha menentukan jumlah (dalam ton) cat bagian dalam dan cat bagian luar yang akan diproduksi untuk memaksimumkan (menaikkan sebanyak mungkin yang layak) total pendapatan kotor (dalam jutaan rupiah) sekaligus memenuhi keterbatasan atau kendala dari permintaan dan kendala penggunaan bahan mentah.

Variabel Keputusan

Karena yang akan ditentukan adalah jumlah cat bagian dalam dan cat bagian luar yang akan diproduksi, maka variabel dari model dapat didefinisikan sebagai berikut:

$x_1 \coloneqq$ Jumlah (dalam ton) cat bagian luar yang diproduksi setiap hari.

$x_2 \coloneqq$ Jumlah (dalam ton) cat bagian dalam yang diproduksi setiap hari.

Fungsi Tujuan

Karena setiap ton cat bagian luar dijual seharga Rp30 juta, pendapatan kotor dari menjual x_1 ton adalah $30x_1$ juta rupiah. Dengan cara yang sama, pendapatan kotor dari x_2 ton cat bagian dalam adalah $20x_2$ juta rupiah. Dengan asumsi bahwa penjualan cat bagian luar dan bagian dalam adalah independen, total pendapatan kotor adalah jumlah dari kedua pendapatan tersebut. Jika dimisalkan z adalah pendapatan kotor total (*total gross revenue* dalam jutaan rupiah), secara matematis fungsi tujuan dapat ditulis sebagai: Tentukan nilai (yang layak) dari x_1 dan x_2 yang akan memaksimumkan perolehan total $z = 30x_1 + 20x_2$.

Kendala

PT Pelangi menekankan pembatasan atau kendala (*constraint*) pada penggunaan bahan mentah dan pada permintaan. Secara verbal penggunaan bahan mentah dapat dinyatakan sebagai

(*Penggunaan bahan mentah untuk kedua jenis cat*) ≤ (*Maksimum bahan mentah yang tersedia*)

Ini memberikan kendala berikut (lihat data dalam Tabel 2.1):

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad \text{(Bahan mentah A)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad \text{(Bahan mentah B)}$$

Kemudian, kendala permintaan secara verbal dapat dinyatakan sebagai berikut:

(*Kelebihan jumlah cat bagian dalam atas cat bagian luar*) ≤ 1 *ton per hari*,

selanjutnya secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$x_2 - x_1 \leq 1, \qquad \text{(Kelebihan cat bagian dalam atas cat luar)}$$

$$x_2 \leq 2. \qquad \text{(Permintaan maksimum terhadap cat dalam)}$$

Untuk menghindari nilai negatif dari masing-masing jenis cat yang diproduksi perlu dimasukkan kendala tak negatif (*nonnegativity constraint*) yang ditulis sebagai

$$x_1 \geq 0, \qquad \text{(Cat luar)}$$

$$x_2 \geq 0. \qquad \text{(Cat dalam)}$$

Sebagai melengkapi model matematika bagi masalah PT Pelangi, sekarang dapat diringkas sebagai berikut:

Tentukan jumlah (dalam ton) cat bagian luar dan cat bagian dalam, berturut-turut x_1 dan x_2, yang akan diproduksi dalam upaya untuk

memaksimumkan $z = 3x_1 + 2x_2$ (dalam puluhan juta rupiah)

kendala
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

Kenapa model ini dinamakan program linear? Secara teknis, model ini dinamakan program linear karena semua fungsinya, baik fungsi tujuan maupun kendala, adalah linear. Sifat kelinearan (*linearity*) menyebabkan terpenuhinya sifat proporsionalitas (*proporsionality*) atau berbanding lurus dan sifat aditivitas (*additivity*) atau penjumlahan.

1. Proporsionalitas menghendaki bahwa konstribusi setiap variabel, x_1 dan x_2, pada fungsi tujuan dan pada penggunaan sumber atau bahan mentah berbanding lurus dengan tingkat (nilai) variabel tersebut. Sebagai contoh, jika PT Pelangi memberikan diskon dengan menjual 1 ton cat bagian luar seharga Rp25 juta bila penjualan melebihi 2 ton, adalah tidak benar lagi bahwa setiap ton yang diproduksi akan memberikan perolehan sebesar Rp30 juta. Sebaliknya setiap ton akan memberikan Rp30 juta untuk $x_1 \leq 2$ ton dan Rp25 juta per ton untuk $x_1 > 2$ ton, keadaan ini tidak memenuhi syarat berbanding lurus dengan x_1.
2. Aditivitas menghendaki bahwa fungsi tujuan merupakan penjumlahan langsung dari kontribusi individu setiap variabel. Dengan cara yang sama, ruas kiri setiap kendala harus merupakan jumlah penggunaan secara individu dari setiap variabel sumber yang berkorespondensi. Sebagai contoh, dalam kasus dua produk yang berkompetisi dimana kenaikan tingkat penjualan produk yang satu mempengaruhi tingkat produk yang lain, dua produk ini tidak memenuhi sifat aditivitas.

Model 2 Sebagian besar bisnis PT Bajaku, yang memproduksi alat-alat kecil dari baja, berasal dari dari pesanan-pesanan khusus. Bajaku telah memutuskan untuk memanfaatkan waktu menganggur (*idle time*) mesin-mesinnya jika terbukti menguntungkan. Perusahaan tersebut telah menetapkan bahwa alat-alat khusus, A dan B, bisa dijual dengan keuntungan per unit masing-masing Rp30.000 dan Rp20.000 dalam jumlah paling banyak 12 lusin dari setiap jenis alat per hari. Untuk membuat setiap unit alat A, dibutuhkan waktu selama 5 menit pada mesin bubut, 7 menit pada mesin penggiling, dan 4 menit pada mesin gerinda. Untuk membuat setiap unit B masing-masing dibutuhkan waktu 3, 9, dan 7 menit berturut-turut pada mesin bubut, penggiling, dan gerinda. Perusahaan itu memiliki sebuah mesin untuk setiap jenis mesin. Waktu menganggur mesin-mesin ini sekarang adalah sebagai berikut:

Mesin	Bubut	Penggiling	Gerinda
Menit per hari menganggur	65	100	90

Berapa banyak alat jenis A dan B, jika ada, sebaiknya diproduksi oleh perusahaan tersebut agar dapat memaksimumkan penggunaan (dalam hal keuntungan) waktu menganggur peralatannya.

Variabel Keputusan

Pada kasus ini didefinisikan variabel keputusan x_A dan x_B sebagai berikut:

x_A ≔ jumlah alat jenis A yang diproduksi selama waktu menganggur,

x_B ≔ jumlah alat jenis B yang diproduksi selama waktu menganggur.

Fungsi Tujuan

Tujuan dari perusahaan adalah mengoptimalkan pemanfaatan peralatan mesinnya selama waktu menganggur, yaitu memaksimumkan keuntungan yang diperoleh dari penjualan alat jenis A dan B. Ini dapat ditulis

$$\text{maks}\, z = 30.000x_A + 20.000x_B.$$

Kendala

Pada masalah ini yang membatasi kegiatan adalah waktu menganggur mesin bubut, penggiling, dan gerinda yang tersedia dalam menit per hari menganggur. Kendala lain adalah jumlah maksimum setiap jenis alat yang diproduksi per hari; yaitu sebanyak 12 lusin per hari. Secara lengkap kendala ini dapat ditulis sebagai:

$5x_A + 3x_B \leq 65$	(kendala mesin bubut dalam menit per hari)
$7x_A + 9x_B \leq 100$	(kendala mesin penggiling dalam menit per hari)
$4x_A + 7x_B \leq 90$	(kendala mesin gerinda dalam menit per hari)
$x_A \leq 144$	(maksimum alat jenis *A* yang diproduksi per hari)
$x_B \leq 144$	(maksimum alat jenis *B* yang diproduksi per hari)

Kendala lain adalah kendala tidak negatif $x_A \geq 0$ dan $x_B \geq 0$. Umumnya perangkat lunak komputer untuk program linear mengasumsikan bahwa setiap variabel dibatasi tidak negatif. Model matematika yang lengkap untuk masalah PT Bajaku adalah

$$
\begin{aligned}
\text{maks } z &= 30x_A + 20x_B \text{ (dalam ribuan)} \\
\text{kendala} \quad & 5x_A + 3x_B \leq 65 \\
& 7x_A + 9x_B \leq 100 \\
& 4x_A + 7x_B \leq 90 \\
& x_A \leq 144 \\
& x_B \leq 144 \\
& x_A \geq 0, x_B \geq 0.
\end{aligned}
$$

Secara grafik dapat dilihat bahwa kendala $x_A \leq 144$ dan $x_B \leq 144$ adalah kendala yang berlebih (*redundunt constraints*), jadi tidak perlu dimasukkan dalam komputasi.

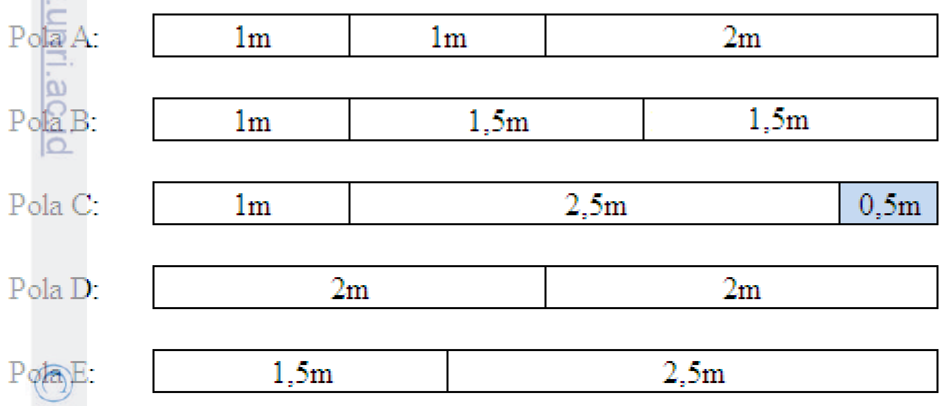
2.2 Masalah Pemotongan Stok

PT Jatiku memiliki stok kayu dengan panjang standar 4m. Keperluan khusus dengan panjang yang berbeda-beda diperoleh dengan cara memotong stok kayu dengan panjang standar yang tersedia. Empat jenis panjang khusus (bisa berubah-rubah sesuai keperluan) diringkas dalam Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Contoh keperluan khusus

Jenis	Panjang yang diinginkan	Jumlah batang
1	1 m	20
2	1,5 m	15
3	2 m	10
4	2,5 m	15

Dalam praktek, suatu pesanan dipenuhi dengan menyetel pisau pemotong (*slitting knife*) pada mesin pemotong sesuai dengan panjang yang diinginkan. Biasanya terdapat sejumlah cara memotong panjang standar untuk memenuhi suatu keperluan. Gambar 2.1 menunjukkan lima kemungkinan pola pemotongan untuk panjang standar 4m.



Gambar 2.1 Contoh pola pemotongan stok

Meskipun terdapat pola pemotongan yang lain, untuk sementara pembahasan dibatasi pada Pola A, B, C, D, dan E. Beberapa pola dapat dikombinasikan dalam sejumlah cara untuk memenuhi panjang 1m, 1,5m, 2m, dan 2,5m yang diinginkan. Berikut adalah dua contoh kombinasi yang layak:

1. Potong 8 batang stok standar mengikuti Pola B, 15 batang mengikuti Pola C, dan 5 batang mengikuti Pola D.
2. Potong 10 batang stok standar mengikuti Pola A, dan 15 batang mengikuti Pola E.

Kombinasi mana yang yang lebih baik? Pertanyaan ini dapat dijawab dengan mempertimbangkan "sisa" pemotongan yang dihasilkan oleh setiap kombinasi. Sisa yang dimaksud di sini adalah bagian yang mempunyai panjang yang tidak cukup untuk memenuhi ukuran pesanan. Pada Gambar 2.1 sisa pemotongan adalah bagian yang diarsir. Sisa pemotongan yang dihasilkan dari kedua kombinasi itu adalah

Kombinasi 1: $15 \times 0{,}5\text{m} = 7{,}5\text{m}$.

Kombinasi 2: Tidak ada sisa pemotongan.

Selanjutnya, setiap produksi surplus dengan panjang 1m, 1,5m, 2m, dan 2,5m harus dipertimbangkan dalam perhitungan sebagai 'sisa' pemotongan. Pada Kombinasi 1, Pola B menghasilkan 8 batang panjang 1m dan 16 batang panjang 1,5m, Pola C menghasilkan 15 batang panjang 1m dan 15 batang panjang 2,5m, dan Pola D menghasilkan 10 batang panjang 2m. Jadi, pada Kombinasi 1 terjadi produksi surplus untuk panjang 1m sebanyak 3 batang = 3 x 1m = 3m, dan surplus panjang 1,5m 1 batang = 1,5 m, sehingga total surplus adalah 4,5m. Pada Kombinasi 2, Pola A menghasilkan 20 batang panjang 1m, dan 10 batang panjang 2m,, sementara Pola E menghasilkan 15 batang panjang 1,5m dan 15 batang panjang 2,5m. Jadi, pada Kombinasi 2 tidak terjadi produksi surplus. Selanjutnya,

total sisa pemotongan untuk Kombinasi 1 = 7,5 + 4,5 = 12m dan

total sisa pemotongan untuk Kombinasi 2 = 0 + 0 = 0m

Jadi Kombinasi 2 lebih baik karena tidak menghasilkan sisa pemotongan.

Untuk menentukan solusi optimal masalah tersebut, pertama perlu untuk menentukan semua pola yang mungkin dan kemudian menentukan semua kombinasi yang layak. Meskipun untuk menentukan semua pola yang mungkin tidak begitu sulit, namun menentukan semua kombinasi yang layak merupakan suatu perkerjaan yang sulit. Disinilah model program linear memainkan peranan dan teknik pendekatan yang sistimatis diperlukan.

Ringkasan Verbal dari Model

Tentukan kombinasi pola pemotongan (variabel) yang akan memenuhi pesanan yang diminta (kendala) dengan sisa pemotongan paling sedikit (tujuan).

Representasi Matematika

Variabel keputusan didefinisikan sebagai jumlah stok standar yang akan dipotong menurut pola-pola tertentu. Perlu diingat bahwa pola yang diizinkan tidak boleh menghasilkan potongan sisa yang memiliki panjang lebih besar daripada ukuran terpendek yang diperlukan, yaitu 1m. Tabel 2.3 memuat semua kemungkinan pola pemotongan.

Tabel 2.3 Pola Pemotongan yang Mungkin

Pola	Panjang yang diminta (m)				Sisa pemotongan (m)
	1	1,5	2	2,5	
1	4	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0,5
3	2	0	1	0	0
4	1	2	0	0	0
5	1	0	0	1	0,5
6	0	0	2	0	0
7	0	1	1	0	0,5
8	0	1	0	1	0
Diperlukan (batang)	20	15	10	15	

Variabel x_j didefinisikan sebagai jumlah stok standar 4m yang dipotong menurut Pola j, $j = 1, 2, \dots, 8$.

Sisa pemotongan + total permintaan pelanggan = total panjang kayu yang dipotong

Total panjang yang diperlukan (meter) adalah

20 (1) + 15(1,5) + 10(2) + 15(2,5) = 100m

Total panjang kayu yang dipotong (meter) adalah

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

Sisa pemotongan (meter) adalah

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 4x_8 - 100$$

Lalu, fungsi tujuan adalah meminimumkan

$$z = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 4x_8 - 100$$

Tanpa mempengaruhi optimisasi, fungsi tujuan dapat ditulis sebagai

$$\text{meminimumkan } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8.$$

Ini berarti bahwa sisa pemotongan bisa diminimumkan dengan cara meminimumkan banyaknya panjang standar 4m yang dipotong.

Selanjutnya terdapat empat kendala (*constraint*) sebagai berikut:

Kendala 1: Paling sedikit 20 batang panjang 1m harus dihasilkan.

Kendala 2: Paling sedikit 15 batang panjang 1,5m harus dihasilkan.

Kendala 3: Paling sedikit 10 batang panjang 2m harus dihasilkan.

Kendala 4: Paling sedikit 15 batang panjang 2,5m harus dihasilkan.

Karena jumlah total panjang 1m yang dipotong diberikan oleh

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5,$$

maka Kendala 1 menjadi

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 20.$$

Dengan cara yang sama, Kendala 2 menjadi

$$x_2 + 2x_4 + x_7 + x_8 \geq 15,$$

Kendala 3 menjadi

$$x_3 + 2x_6 + x_7 \geq 10,$$

dan Kendala 4 menjadi

$$x_5 + x_8 \geq 15.$$

Jadi, model program linear dari masalah pemotongan stok untuk contoh di atas adalah

$$
\begin{array}{llllll}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 & & & & & \\
\text{kendala } \; 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \; x_4 + x_5 & & & & & \geq 20 \\
\qquad\qquad x_2 + \qquad 2x_4 + & & & x_7 + x_8 & & \geq 15 \\
\qquad\qquad\quad x_3 + \qquad\qquad 2x_6 + \; x_7 & & & & & \geq 10 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 + & & & x_8 & & \geq 15 \\
x_j \geq 0 \text{ dan bilangan bulat } \; j = 1, 2, \dots, 8. & & & & &
\end{array}
$$

2.3 Masalah Transportasi

Sebuah perusahaan mobil memiliki lima tempat perakitan dan dua belas penyalur yang tersebar di beberapa tempat. Perusahaan tersebut ingin menentukan tempat perakitan yang mana yang sebaiknya merakit mobil untuk setiap penyalur, dalam upaya meminimumkan biaya pengiriman. Tersedia informasi sebagai berikut:

No. penyalur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jumlah mobil yang dipesan	35	42	28	52	17	33	62	61	43	37	28	42

Tempat perakitan	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Kapasitas (unit mobil)	100	90	120	80	90

Biaya pengiriman per unit mobil dari masing-masing tempat perakitan ke masing-masing penyalur diberikan pada Tabel 2.4.

Tabel 2.4 Biaya pengiriman (dalam ratusan ribu rupiah)

	Ke / Dari	Penyalur											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tempat Perakitan	*A*	25	36	31	20	27	33	27	21	24	35	21	24
	B	37	23	28	35	19	31	23	25	28	27	19	31
	C	26	19	17	28	27	36	31	24	21	27	17	30
	D	42	25	15	33	23	28	29	23	26	29	20	27
	E	19	31	45	37	31	34	27	31	32	30	22	25

Jadi, setiap penyalur memerlukan mobil dalam jumlah tertentu, dan setiap tempat perakitan dapat menyediakan mobil paling banyak sebesar kapasitasnya; setiap penyalur bisa menerima mobil dari satu tempat perakitan jika prosedur ini bisa mengurangi keseluruhan biaya pengiriman.

Variabel Keputusan

Misalkan x_{ij} adalah banyaknya mobil yang akan dikirim dari tempat perakitan i ke tempat penyalur j; $i = A, B, C, D, E;\ \ j = 1, 2, \dots, 12$.

Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan adalah meminimumkan biaya pengiriman mobil keseluruhan, yaitu

$$\begin{aligned} c = {} & 25x_{A1} + 36x_{A2} + 31x_{A3} + \cdots + 24x_{A,12} \\ & + 37x_{B1} + 23x_{B2} + 28x_{B3} + \cdots + 31x_{B,12} \\ & + \cdots \\ & \vdots \\ & + 19x_{E1} + 31x_{E2} + 45x_{E3} + \cdots + 25x_{E,12}. \end{aligned}$$

Kendala

Kendala untuk persediaan diberikan oleh

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + \cdots + x_{A,12} &\le 100 \\ x_{B1} + x_{B2} + \cdots + x_{B,12} &\le \ \ 90 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \qquad \vdots \\ x_{E1} + x_{E2} + \cdots + x_{E,12} &\le \ \ 90, \end{aligned}$$

dan kendala untuk permintaan diberikan oleh

$$\begin{aligned} x_{A1} + \ \ x_{B1} + \ \ x_{C1} + \ x_{D1} + \ \ x_{E1} &\ge 35 \\ x_{A2} + \ \ x_{B2} + \ \ x_{C2} + \ x_{D2} + \ \ x_{E2} &\ge 45 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ x_{A,12} + x_{B,12} + x_{C,12} + x_{D,12} + x_{E,12} &\ge 42. \end{aligned}$$

Untuk syarat tidak negatif semua variabel mestilah besar atau sama dengan nol dan ditambah dengan syarat bilangan bulat atau integer. Dalam pernyataan umum, model program linear untuk masalah transportasi di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\min c = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{j=i}^{n} x_{ij} \leq s_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ (kendala persediaan)}$$

$$\sum_{i=i}^{m} x_{ij} \geq d_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ (kendala permintaan)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ dan bilangan bulat}; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n.$$

dengan x_{ij} adalah banyaknya unit barang yang dikirim dari sumber i ke destinasi j, c_{ij} biaya pengiriman per unit barang dari sumber i ke destinasi j, s_i jumlah persediaan di sumber i, dan d_j permintaan dari destinasi j, $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

2.4 Masalah Pencampuran

PT Kacangku menjual tiga jenis kemasan kacang campur yang berbeda. Setiap kemasan mengandung sejumlah *almond*, *pecan*, *cashew*, dan *walnut* yang berbeda-beda. Dalam usaha mempertahankan reputasi perusahaan dalam hal kualitas produksinya, persentase maksimum dan minimum dari berbagai jenis kacang diperlukan untuk setiap jenis kemasan yang dapat dilihat pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5 Persentase kacang yang diperlukan

Nama kemasan	Kebutuhan	Harga jual per kg (dalam ribuan rupiah)
Regular	Tidak lebih daripada 20% *cashew* Tidak kurang daripada 40% *walnut* Tidak lebih daripada 25% *pecan*	59
Deluxe	Tidak lebih daripada 35% *cashew* Tidak kurang daripada 25% *almond*	69
Blue Ribbon	Antara 30% dan 50% *cashew* Tidak kurang daripada 30% *almond*	85

Perusahaan ingin menentukan jumlah *almond*, *pecan*, *cashew*, dan *walnut* yang seharusnya ada dalam setiap kemasan, dalam usaha memaksimumkan keuntungan. Untuk setiap kemasan harus diketahui harga bahan-bahan tersebut. Sebagaimana yang ditunjukkan pada Tabel 2.6, perkebunan PT Kacangku menyuplai jumlah yang terbatas dari setiap jenis kacang. Jadi, yang akan dimaksimumkan adalah total keuntungan bersih setiap minggu.

Tabel 2.6 Harga kacang dan jumlah yang tersedia

Jenis kacang	Harga per kg (dalam ribuan rupiah)	Jumlah maksimum yang tersedia setiap minggu (kg)
Almond	25	2000
Pecan	35	4000
Cashew	50	5000
Walnut	30	3000

Misalkan

$R_i :=$ jumlah kg kacang jenis i dalam kemasan *Reguler*, $i = 1, 2, 3, 4$.

$D_i :=$ jumlah kg kacang jenis i dalam kemasan *Deluxe*, $i = 1, 2, 3, 4$.

$B_i :=$ jumlah kg kacang jenis i dalam kemasan *Blue Ribbon*, $i = 1, 2, 3, 4$, dengan

Jenis kacang	*Almond*	*Pecan*	*Cashew*	*Walnut*
i	1	2	3	4

Kemudian, jumlah kg keseluruhan dari setiap jenis kacang adalah sebagai berikut:

i	Jenis kacang	Jumlah kg yang digunakan per minggu
1	*Almond*	$R_1 + D_1 + B_1$
2	*Pecan*	$R_2 + D_2 + B_2$
3	*Cashew*	$R_3 + D_3 + B_3$
4	*Walnut*	$R_4 + D_4 + B_4$

Dari jumlah maksimum yang tersedia, diperoleh empat kendala, yaitu

$$R_1 + D_1 + B_1 \leq 2000$$

$$R_2 + D_2 + B_2 \leq 4000$$

$$R_3 + D_3 + B_3 \leq 5000$$

$$R_4 + D_4 + B_4 \leq 3000$$

Selanjutnya harus diyakinkan bahwa syarat atau kebutuhan untuk setiap kemasan terpenuhi. Karena kebutuhan ini dinyatakan dalam persentase, bukan dalam kilogram, berikut akan dihitung:

Kemasan	Total kg yang diproduksi per minggu
Regular	$R_1 + R_2 + R_3 + R_4$
Deluxe	$D_1 + D_2 + D_3 + D_4$
Blue Ribbon	$B_1 + B_2 + B_3 + B_4$

Lantas, persentase *cashew* dalam kemasan *Regular* adalah

$$\frac{100R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

dan jumlah ini tidak boleh melebihi 20% atau

$$\frac{100R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \le 20 \implies 20R_1 + 20R_2 - 80R_3 + 20R_4 \ge 0.$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{100R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \ge 40 \implies 40R_1 + 40R_2 + 40R_3 - 60R_4 \le 0.$$

$$\frac{100R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \le 25 \implies 25R_1 - 75R_2 + 25R_3 + 25R_4 \ge 0.$$

Berikut prosedur yang sama untuk kemasan *Deluxe* dan *Blue Ribbon*:

$$\frac{100D_3}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} \le 35 \implies 35D_1 + 35D_2 - 65D_3 + 35D_4 \ge 0.$$

$$\frac{100D_1}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} \ge 25 \implies -75D_1 + 25D_2 + 25D_3 + 25D_4 \le 0.$$

$$30 \le \frac{100B_3}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4} \le 50\,,$$

$$\implies 30B_1 + 30B_2 - 70B_3 + 30B_4 \le 0$$

$$\implies 50B_1 + 50B_2 - 50B_3 + 50B_4 \ge 0.$$

$$\frac{100B_1}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4} \ge 30 \implies -70B_1 + 30B_2 + 30B_3 + 30B_4 \le 0.$$

Kendala tak negatif adalah $R_i, D_i, B_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4.$

Keuntungan bersih = Penjualan total – Biaya total

Penjualan total = $59\,(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + 69\,(D_1 + D_2 + D_3 + D_4)$
$+85\,(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$

Biaya total = $25\,(R_1 + D_1 + B_1) + 35\,(R_2 + D_2 + B_2) + 50\,(R_3 + D_3 + B_3)$
$+30\,(R_4 + D_4 + B_4)$.

Jadi, keuntungan bersih z adalah

$$z = 34R_1 + 24R_2 + 9R_3 + 29R_4 + 44D_1 + 34D_2 + 19D_3 + 39D_4 + 60B_1 + 50B_2 + 35B_3 + 55B_4.$$

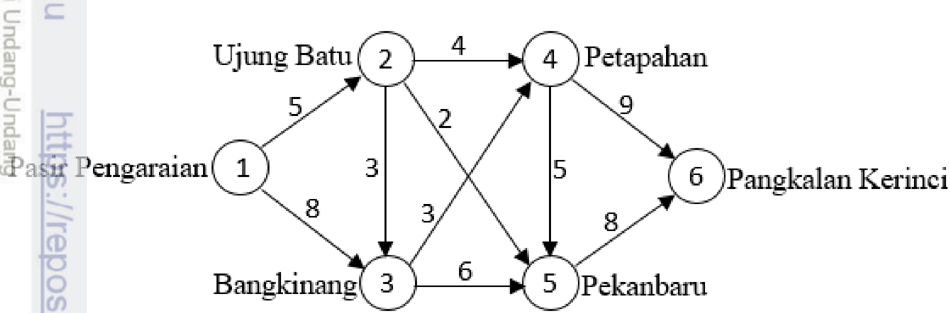
Program linear untuk masalah PT Kacangku di atas adalah

$$\begin{aligned}
\text{maks } z = {} & 34R_1 + 24R_2 + 9R_3 + 29R_4 + 44D_1 + 34D_2 + 19D_3 \\
& +39D_4 + 60B_1 + 50B_2 + 35B_3 + 55B_4. \\
\text{kendala } & R_1 + D_1 + B_1 \le 2000 \\
& R_2 + D_2 + B_2 \le 4000 \\
& R_3 + D_3 + B_3 \le 5000 \\
& R_4 + D_4 + B_4 \le 3000 \\
& 20R_1 + 20R_2 - 80R_3 + 20R_4 \ge 0 \\
& 40R_1 + 40R_2 + 40R_3 - 60R_4 \le 0 \\
& 25R_1 - 75R_2 + 25R_3 + 25R_4 \ge 0 \\
& 35D_1 + 35D_2 - 65D_3 + 35D_4 \ge 0 \\
& -75D_1 + 25D_2 + 25D_3 + 25D_4 \le 0 \\
& 30B_1 + 30B_2 - 70B_3 + 30B_4 \le 0 \\
& 50B_1 + 50B_2 - 50B_3 + 50B_4 \ge 0 \\
& -70B_1 + 30B_2 + 30B_3 + 30B_4 \le 0 \\
& R_i, D_i, B_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

2.5 Jaringan Alir

Sebuah perusahaan telepon ingin menentukan jumlah sambungan jarak jauh maksimum dari Pasir Pengaraian ke Pangkalan Kerinci yang dapat ditangani dalam satu waktu. Perusahaan itu memiliki jaringan yang menghubungkan kota-kota ini *via* beberapa kota perantara sebagaimana yang terlihat pada Gambar 2.2.

Setiap kabel dapat mengatasi jumlah sambungan maksimum secara simultan, sebagaimana tampak pada Gambar 2.2. Sebagai contoh, jumlah panggilan atau sambungan dari Ujung Batu ke Petapahan tidak bisa melebihi 4 pada sebarang waktu secara bersamaan. Satu sambungan dari Pasir Pengaraian ke Pangkalan Kerinci bisa dilalui melewati sebarang kota yang lain, selama masih tersedia jaringan yang tidak sedang digunakan.



Gambar 2.2 Aliran telepon dari Pasirpengaraian ke Pangkalan Kerinci

Disamping menentukan jumlah sambungan maksimum dari Pasir Pengaraian ke Pangkalan Kerinci, perusahaan tersebut juga ingin mengetahui rute optimal dari sambungan ini. Sambungan diasumsikan hanya dapat dilalui dalam arah yang ditunjukkan oleh anak panah.

Misalkan x_{ij} jumlah sambungan yang akan ditransmisi dari kota (*node*) i ke kota j. Jadi,

$$x_{ij} \leq M_{ij} \; untuk \; setiap \; i \; dan \; j,$$

dengan M_{ij} adalah jumlah maksimum sambungan simultan dari kota i ke kota j. Jadi,

$$0 \leq x_{12} \leq 5; 0 \leq x_{13} \leq 8$$
$$0 \leq x_{23} \leq 3; 0 \leq x_{24} \leq 4$$
$$0 \leq x_{25} \leq 2; 0 \leq x_{34} \leq 3$$
$$0 \leq x_{35} \leq 6; 0 \leq x_{45} \leq 5$$
$$0 \leq x_{46} \leq 5; 0 \leq x_{56} \leq 8$$

Untuk setiap kota perantara 2, 3, 4, dan 5, jumlah panggilan yang masuk ke kota itu harus sama dengan jumlah panggilan yang meninggalkan kota itu. Jadi, untuk kota 2 (Ujung Batu) diperoleh

$$x_{12} = x_{23} + x_{24} + x_{25}$$

Dengan cara yang sama, untuk kota 3, 4, dan 5 berturut-turut diperoleh

$$x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35}$$

$$x_{24} + x_{34} = x_{45} + x_{46}$$

$$x_{25} + x_{35} + x_{45} = x_{56}.$$

Selanjutnya, jumlah panggilan yang meninggalkan Pasir Pengaraian sama dengan jumlah panggilan yang tiba di Pangkalan Kerinci, yaitu

$$x_{12} + x_{13} = x_{46} + x_{56}. \tag{1.1}$$

Sebarang ruas dari persamaan (1.1) adalah jumlah yang akan dimaksimumkan. Jadi masalah program linear untuk kasus ini adalah

$$\begin{aligned}
\text{maks } z &= x_{12} + x_{13} \\
\text{kendala } x_{12} &= x_{23} + x_{24} + x_{25} \\
x_{13} + x_{23} &= x_{34} + x_{35} \\
x_{24} + x_{34} &= x_{45} + x_{46} \\
x_{25} + x_{35} + x_{45} &= x_{56} \\
0 \le x_{12} \le 5;& \ 0 \le x_{13} \le 8 \\
0 \le x_{23} \le 3;& \ 0 \le x_{24} \le 4 \\
0 \le x_{25} \le 2;& \ 0 \le x_{34} \le 3 \\
0 \le x_{35} \le 6;& \ 0 \le x_{45} \le 5 \\
0 \le x_{46} \le 5;& \ 0 \le x_{56} \le 8
\end{aligned}$$

Soal-Soal Latihan

1. Pak tani Midun harus menentukan berapa hektar padi dan jagung yang ditanam pada tahun ini. Satu hektar padi menghasilkan 25 kwintal padi dan membutuhkan 10 jam kerja per minggu. Satu hektar jagung menghasilkan 10 kwintal jagung dan membutuhkan 4 jam kerja per minggu. Keseluruhan padi dapat dijual dengan harga Rp300.000 per kwintal, dan semua jagung dapat

dijual dengan harga Rp100.000 per kwintal. Tersedia tujuh hektar tanah dan 40 jam kerja per minggu. Peraturan Pemerintah setempat menghendaki sekurang-kurangnya 30 kwintal jagung dapat dihasilkan selama tahun berjalan. Misalkan $x_1 :=$ jumlah hektar tanaman jagung, dan $x_2 :=$ jumlah hektar tanaman padi. Dengan menggunakan variabel keputusan ini, formulasikan suatu program linear yang solusinya akan memaksimumkan pendapatan total pak Midun dari penjualan padi dan jagung.

2. Dengan menggunakan variabel $x_1 :=$ jumlah kwintal jagung yang diproduksi dan $x_2 :=$ jumlah kwintal padi yang diproduksi, formulasikan kembali program linear pak Midun.

3. PT Meranti menjual kayu panjang 2,5m, panjang 1,5m, dan panjang 1m. Pelanggan PT Meranti memesan 25 batang panjang 2,5m, 20 batang panjang 1,5m, dan 15 batang panjang 1m. PT Meranti harus memenuhi permintaan pelanggannya dengan memotong stok standar yang mempunyai panjang 5m. PT Meranti ingin meminimumkan sisa pemotongan dalam memenuhi permintaan pelanggannya. Formulasikan suatu program linear untuk membantu PT Meranti untuk mencapai tujuannya.

4. Bajaku memproduksi tiga jenis baja di tiga pabrik yang berbeda. Waktu yang diperlukan untuk memproduksi 1 ton baja (tidak peduli apapun jenisnya) dan biaya pada setiap pabrik ditunjukkan pada Tabel 2.7. Setiap minggu, 100 ton dari setiap jenis baja (baja 1, baja 2, dan baja 3) harus diproduksi. Setiap pabrik buka 40 jam per minggu.

   a. Formulasikan suatu masalah transportasi yang seimbang untuk meminimumkan biaya dalam memenuhi keperluan mingguan Bajaku.

   b. Anggaplah waktu yang diperlukan untuk memproduksi 1 ton baja bergantung pada jenis baja dan juga pada pabrik yang memproduksi baja tersebut (lihat Tabel 2.8). Masih bisakah masalah transportasi diformulasikan?

Tabel 2.7

	Biaya (Dalam ratusan ribu rupiah)			Waktu (Menit)
	Baja 1	Baja 2	Baja 3	
Pabrik 1	60	40	28	20
Pabrik 2	50	30	30	16
Pabrik 3	40	20	20	15

Tabel 2.8

	Waktu (Menit)		
	Baja 1	Baja 2	Baja 3
Pabrik 1	15	12	15
Pabrik 2	15	15	20
Pabrik 3	10	10	15

5. Perabotku memproduksi meja dan kursi. Sebuah meja memerlukan papan berukuran 12m, dan sebuah kursi memerlukan papan berukuran 9m. Papan dapat dibeli seharga Rp10.000 per meter, dan tersedia papan berukuran 12.000m untuk dibeli. Diperlukan waktu 2 jam oleh tenaga kerja terlatih untuk memproduksi sebuah meja setengah jadi (belum diplitur) atau sebuah kursi setengah jadi. Tiga jam lagi diperlukan oleh tenaga kerja terlatih tersebut untuk menyelesaikan sebuah meja setengah jadi menjadi sebuah meja yang telah jadi, dan 2 jam lagi diperlukan oleh tenaga kerja terlatih tersebut untuk merampungkan sebuah kursi setengah jadi menjadi sebuah kursi yang telah jadi. Waktu total tenaga kerja terlatih yang tersedia adalah selama 6000 jam (dan sudah dibayar untuk itu). Semua mebel yang diproduksi dapat dijual dengan harga per unit sebagai berikut: meja setengah jadi, Rp70.000; meja telah jadi, Rp140.000; kursi setengah jadi, Rp60.000; kursi telah jadi, Rp110.000. Rumuskan suatu program linear yang akan memaksimumkan kontribusi terhadap keuntungan dari produk meja dan kursi.

REFERENSI TERPILIH

M. D. H. Gamal dan Z. Bahri. Pendekatan Program Linear untuk Persoalan Pemotongan Stok (Pola Pemotongan Satu Dimensi). *Jurnal Natur Indonesia* 5 (2) (2003), 113-118.

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*, 7th Edition. McGraw-Hill, New York, 1990.

C. Leon and D. Steinberg. *Methods and Applications of Linear Programming*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1974.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.