1

DASAR-DASAR ALJABAR LINEAR

Dalam bab ini dipelajari topik-topik dalam aljabar linear yang akan diperlukan untuk mempelajari isi buku ini. Pembahasan dimulai dari unsur dasar aljabar linear: matriks dan vektor. Kemudian pengetahuan tentang matriks dan vektor digunakan untuk mengembangkan prosedur sistematis dari metode Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, yang kemudian digunakan untuk mencari invers matriks. Bab ini diakhiri dengan pengenalan determinan.

1.1 Matriks dan Vektor

Secara umum, sistem m persamaan linear dalam n variabel, $x_1, x_2, \dots, x_n$, dapat disusun ke dalam formulasi berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

dengan simbol subskrip ganda a_{ij} menyatakan koefisien yang muncul pada persamaan ke-i dan melekat pada variabel ke-j x_j, dan b_i menyatakan suku konstan atau ruas kanan pada persamaan ke-i.

Contoh 1.1 Sistem persamaan linear dua variabel diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 5, \\ 2x_1 - 5x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Matriks sebagai Array

Pada dasarnya ada tiga jenis "bahan" dalam sistem persamaan (1.1). Yang pertama adalah himpunan koefisien a_{ij}; yang kedua adalah himpunan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$; dan yang terakhir adalah himpunan konstanta $b_1, b_2, \dots, b_m$. Jika tiga himpunan tersebut disusun sebagai tiga array persegipanjang dan berturut-turut melabel ketiganya sebagai $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{x}$, dan $\boldsymbol{b}$, maka diperoleh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Contoh 1.2 Dari sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 &= 15 \\ 4x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 &= 19 \end{aligned}$$

dapat ditulis

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 15 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Masing-masing dari ketiga array yang diketahui di atas merupakan sebuah matriks.

Sebuah matriks didefinisikan sebagai sebuah array persegipanjang dari bilangan, parameter, atau variabel. Sebagai alat yang singkat, array dalam matriks $\boldsymbol{A}$ dapat ditulis lebih sederhana sebagai

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Vektor sebagai Matriks Khusus

Jumlah baris dan jumlah kolom dalam sebuah matriks bersama mendefinisikan dimensi dari matriks tersebut. Sebagai contoh, $\boldsymbol{A}$ dikatakan berdimensi $m \times n$. Untuk kasus khusus dimana $m = n$, matriks tersebut dinamakan *matriks persegi*. Jika sebuah matriks hanya memuat satu kolom (baris), matriks tersebut dinamakan *vektor kolom* (*baris*). Untuk maksud notasi, vektor baris dibedakan dengan vektor kolom dengan menggunakan tanda kurung biasa dan ditulis seperti berikut:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Catatan 1.1 Sebuah vektor adalah sebuah n-tupel terurut dan karena itu dapat diinterpretasikan sebagai titik dalam ruang berdimensi n.

Dengan matriks yang didefinisikan pada (1.2), sistem persamaan (1.1) dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

Namun, persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ menimbulkan sedikitnya dua pertanyaan. Bagaimana cara mengalikan dua matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{x}$? Apa yang dimaksud dengan persamaan $\boldsymbol{Ax}$ dan $\boldsymbol{b}$? Karena matriks melibatkan seluruh blok bilangan, operasi aljabar yang sudah dikenal yang didefinisikan untuk bilangan tunggal tidak dapat diterapkan secara langsung, dan diperlukan seperangkat aturan operasi baru.

1.2 Operasi Matriks

Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ adalah sama jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ memiliki dimensi atau ordo yang sama dan $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Penjumlahan Matriks

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}],$$

yaitu, penjumlahan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ didefinisikan sebagai penjumlahan setiap pasangan elemen yang berkorespondensi.

Catatan 1.2 Dua matriks dapat dijumlahkan jika dan hanya jika keduanya memiliki dimensi yang sama.

Contoh 1.3

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Contoh 1.4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}.$$

Pengurangan Matriks

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ didefinisikan oleh

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Contoh 1.5

$$\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Perkalian Skalar

$$\lambda \boldsymbol{A} = \lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}],$$

yaitu, mengalikan sebuah matriks dengan sebuah bilangan adalah mengalikan setiap elemen matriks itu dengan skalar yang diketahui.

Contoh 1.6

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 1.7

$$-1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}.$$

Perkalian Matriks

Diketahui dua matriks $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ dan $\boldsymbol{B}_{p\times q}$, syarat kesesuaian untuk perkalian $\boldsymbol{AB}$ adalah bahwa dimensi kolom dari $\boldsymbol{A}$ harus sama dengan dimensi baris dari $\boldsymbol{B}$, yaitu, hasil kali matriks $\boldsymbol{AB}$ akan terdefinisi jika dan hanya jika $n = p$. Jika terdefinisi, hasil kali $\boldsymbol{AB}$ akan memiliki dimensi $m \times q$. Hasil kali $\boldsymbol{AB}$ didefinisikan oleh

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$$

dengan

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}.$$

Contoh 1.8

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Contoh 1.9

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+9 & 15 \\ -4+12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}.$$

Contoh 1.10

$$\boldsymbol{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \text{ dan } \boldsymbol{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n],$$

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i.$$

Ini bisa dijelaskan oleh penggunaan konsep hasil perkalian dalam dari dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}.$$

Contoh 1.11

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

dimiliki

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix},$$

Contoh 1.12

Diketahui $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{v}^T = [2 \quad 5 \quad 7]$, selanjutnya diperoleh

$$\boldsymbol{uv}^T = \begin{bmatrix} 4\times 2 & 4\times 5 & 4\times 7 \\ 3\times 2 & 3\times 5 & 3\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 & 28 \\ 6 & 15 & 21 \end{bmatrix}.$$

Adalah penting untuk membedakan pengertian $\boldsymbol{uu}^T$ (matriks dengan dimensi $n \times n$) dan $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$ (sebuah matriks 1×1, atau sebuah skalar).

1.3 Ketergantungan Linear dari Vektor

Definisi 1.1 Himpunan vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ dikatakan bergantung linear (*linearly dependent*) jika dan hanya jika salah satu dari vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor lainnya; jika tidak vektor-vektor tersebut dinamakan bebas linear.

Contoh 1.13 Tiga vektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

adalah bergantung linear karena $\boldsymbol{v}_3$ merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$,

$$3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_3$$

atau

$$3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0},$$

dengan

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

menyatakan vektor nol.

Contoh 1.14 Tiga vektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah bergantung linear karena $\boldsymbol{v}_1$ merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{v}_2$ dan $\boldsymbol{v}_3$,

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}v_3.$$

Definisi yang ekivalen dari ketergantungan linear adalah sebuah himpunan m-vektor $v_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ bergantung linear jika dan hanya jika terdapat himpunan skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tidak semuanya nol sedemikan sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = 0.$$

Jika ini berlaku hanya apabila $\lambda_i = 0$ untuk semua i, vektor-vektor ini dinamakan bebas linear (*linearly independent*).

1.4 Hukum Komutatif, Asosiatif, dan Distributif

Hukum Komutatif

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}.$$

Bukti:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}.$$

Hukum Asosiatif

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}).$$

Bukti:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] = [a_{ij}]+[b_{ij}]+[c_{ij}]\\ &= [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}] = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]\\ &= [a_{ij}]+([b_{ij}+c_{ij}]) = [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}])\\ &= \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).\end{aligned}$$

Perkalian Matriks

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}.$$

Meskipun $\boldsymbol{AB}$ terdefinisi, $\boldsymbol{BA}$ bisa saja tidak; tetapi meskipun kedua perkalian tersebut terdefinisi, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ bisa saja tidak berlaku.

Contoh 1.15 Misalkan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya,

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix},$$

tetapi

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}.$$

Perkalian skalar dari matriks memenuhi humum komutatif,

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}k,$$

jika k adalah sebuah skalar.

Hukum Asosiatif

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

dengan syarat $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m \times n$, $\boldsymbol{B}$ $n \times p$, dan $\boldsymbol{C}$ $p \times q$.

Hukum Distributif

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} \text{ [pra perkalian oleh } \boldsymbol{A}\text{];}$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA} \text{ [pasca perkalian oleh } \boldsymbol{A}\text{].}$$

1.5 Matriks Identitas dan Matriks Nol

Definisi 1.2 Matriks identitas adalah matriks persegi dengan satu pada diagonal utama dan nol pada lainnya.

Matriks identitas dinyatakan dengan $\boldsymbol{I}$ atau $\boldsymbol{I}_n$ dimana n menunjukkan dimensi yang memiliki sifat-sifat

(i) Diketahui matriks $\boldsymbol{A}$ $m \times n$, dimiliki $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}$.

(ii) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B}_{n\times p} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

(iii) $(\boldsymbol{I}_n)^k = \boldsymbol{I}_n$.

Matriks Idempoten

Sebuah matriks dikatakan idempoten jika $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Matriks Nol

Matriks nol (*null matriks*), yang dinyatakan dengan $\boldsymbol{0}$, memainkan peranan sebagai bilangan 0. Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol. Tidak seperti $\boldsymbol{I}$, matriks nol tidak dibatasi sebagai matriks persegi. Matriks nol mematuhi aturan operasi berikut:

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} + \boldsymbol{0}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n};$$
$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{0}_{n\times p} = \boldsymbol{0}_{m\times p};$$
$$\boldsymbol{0}_{q\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{0}_{q\times n}.$$

Catatan 1.3

(a) $\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}$ tidak mengakibatkan bahwa $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$. Sebagai contoh, untuk

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

diperoleh

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},$$

meskipun $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{E}$.

(b) Meskipun jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$, masih dapat dimiliki $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

Contoh 1.16

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.6. Transpos dari Matriks

Transpos suatu matriks $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matrks yang diperoleh dengan cara saling menukarkan baris dan kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$ tersebut. Secara formal transpos suatu matriks diberikan pada definisi berikut.

Definisi 1.3 Matriks $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times m}$ dinamakan transpos dari matriks $\boldsymbol{A} = [a_{ji}]_{m\times n}$ jika $a_{ji} = b_{ij}$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$. Biasanya transpos dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}'$ atau $\boldsymbol{A}^T$.

Resep: Bagaimana cara mendapatkan transpos suatu matriks?

Transpos $\boldsymbol{A}^T$ dari $\boldsymbol{A}$ diperoleh dengan membuat kolom dari $\boldsymbol{A}$ menjadi baris dari $\boldsymbol{A}^T$.

Contoh 1.17 Untuk matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

transposnya adalah

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jadi, dengan definisi, jika dimesnsi dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah $m \times n$, maka dimensi dari transposnya $\boldsymbol{A}^T$ haruslah $n \times m$.

Contoh 1.18 Untuk matriks

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

transposnya adalah

$$\boldsymbol{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}.$$

Definisi 1.4 (i) Matriks $\boldsymbol{A}$ dikatakan simetris jika $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$.

(ii) Matriks A dikatakan anti-simetris (atau *skew-symmetric*) jika $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$.

(iii) Matriks $\boldsymbol{A}$ dikatakan ortogonal jika $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

Sifat-sifat Transpos

(a) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$.

(b) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$.

(c) $(\alpha\boldsymbol{A})^T = \alpha\boldsymbol{A}^T$.

(d) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

Sifat (d) menyatakan bahwa transpos dari hasil kali adalah hasil kali transpos dalam urutan terbalik.

1.7 Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer (OBE) melakukan transformasi sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ yang diketahui matriks baru $\boldsymbol{A}'$ melalui salah satu dari operasi berikut:

(i) OBE Jenis 1: $\boldsymbol{A}'$ diperoleh dengan mengalikan sebarang baris dari $\boldsymbol{A}$ dengan sebuah skalar tidak nol. Sebagai contoh, jika

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

maka dengan OBE Jenis 1, baris 3 dikalikan dengan 2 menghasilkan

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) OBE Jenis 2: Dimulai dengan mengalikan sebarang baris dari $\boldsymbol{A}$ (katakanlah, baris i) dengan skalar tidak nol α. Untuk beberapa $j \neq i$, misalkan baris j dari $\boldsymbol{A}' = \alpha$ (baris i dari $\boldsymbol{A}$) + baris j dari $\boldsymbol{A}$, dan misalkan baris yang lain dari $\boldsymbol{A}'$ sama dengan baris $\boldsymbol{A}$.

Sebagai contoh, baris 3 dari $\boldsymbol{A}$ diganti dengan 3 (baris 1 dari $\boldsymbol{A}$) + baris 3 dari $\boldsymbol{A}$, sehingga baris 3 dari $\boldsymbol{A}'$ menjadi

$$3\,[1 \quad 4 \quad 3 \quad 2] + [3 \quad 1 \quad 2 \quad 0] = [6 \quad 13 \quad 11 \quad 6]$$

dan

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 13 & 11 & 6 \end{bmatrix}.$$

(iii) OBE Jenis 3: Saling menukarkan sebarang dua baris dari $\boldsymbol{A}$. Sebagai contoh, baris 1 dan 3 dari $\boldsymbol{A}$ saling dipertukarkan sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

OBE Jenis 1 dan 2 memformalisasikan operasi yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Menyelesaikan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 10 \end{aligned} \tag{1.3}$$

dilakukan sebagai berikut. Pertama ganti persamaan kedua pada (1.3) dengan -3(persamaan pertama pada (1.3)) $+$ persamaan kedua pada (1.3). Ini menghasilkan sistem linear berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= 3 \\ 2x_2 &= 1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Kemudian kalikan persamaan kedua pada (1.4) dengan $\frac{1}{2}$, yang menghasilkan sistem

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= 3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Terakhir, ganti persamaan pertama pada (1.5) dengan -1(persamaan kedua pada (1.5)) $+$ persamaan pertama pada (1.5). Ini menghasilkan sistem

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= \frac{5}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sistem (1.6) memiliki solusi tunggal $x_1 = \frac{5}{2}$ dan $x_2 = \frac{1}{2}$. Sistem (1.3), (1.4), (1.5), dan (1.6) adalah ekuivalen dalam hal mereka memiliki himpunan solusi yang sama. Ini berarti bahwa $x_1 = \frac{5}{2}$ dan $x_2 = \frac{1}{2}$ juga merupakan solusi tunggal dari sistem asal, (1.3).

Jika (1.3) dilihat dalam bentuk matriks yang diperluas $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$, tampak bahwa langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan (1.3) dapat dipandang sebagai OBE Jenis 1 dan Jenis 2 yang diterapkan ke $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$. Mulailah dengan versi matriks yang diperluas dari (1.3), yaitu

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 10 \end{array}\right]. \tag{1.3$'$}$$

Sekarang lakukan OBE Jenis 2 dengan mengganti baris 2 dari $(1.3')$ dengan -3(baris 1 dari $(1.3')$) + baris 2 dari $(1.3')$. Hasilnya adalah

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \tag{1.4'}$$

yang berkorespondensi dengan (1.4). Selanjutnya, kalikan baris 2 dari $(1.4')$ dengan $\frac{1}{2}$ (OBE Jenis 1), yang menghasilkan

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \tag{1.5'}$$

yang berkorespondensi dengan (1.5). Terakhir, lakukan OBE Jenis 2 dengan mengganti baris 1 dari $(1.5')$ dengan -1(baris 2 dari $(1.5')$) + baris 1 dari $(1.5')$. Hasilnya adalah

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \tag{1.6'}$$

yang berkorespondensi dengan (1.6). Dengan menerjemahkan kembali $(1.6')$ ke dalam sistem linear diperoleh sistem $x_1 = \frac{5}{2}$ dan $x_2 = \frac{1}{2}$, yang identik dengan (1.6).

1.8 Metode Gauss-Jordan

Pembahasan pada bagian sebelumnya menunjukkan bahwa jika matriks $\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}'$ didapat dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ melalui OBE, maka sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ adalah ekuivalen. Jadi, setiap urutan OBE yang dilakukan pada matriks yang diperluas $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ yang berkorespondensi dengan sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ akan menghasilkan sistem linear yang ekuivalen.

Metode Gauss-Jordan menyelesaikan sistem persamaan linear dengan memanfaatkan OBE dalam bentuk yang sistematis. Metode ini diilustrasikan dengan mencari solusi dari sistem linear berikut:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Representasi matriks yang diperluas adalah

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 7 & -1 \end{array}\right] \tag{1.8}$$

Penerapan metode Gauss-Jordan mengikuti urutan OBE berikut:

Langkah 1 Kalikan baris 1 dari (1.8) dengan $\frac{1}{2}$. OBE Jenis 1 ini menghasilkan

$$\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 7 & -1 \end{array}\right].$$

Langkah 2 Ganti baris 2 dari $\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1$ dengan -1(baris 1 dari $\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1$) + baris 2 dari $\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 7 & 7 & -1 \end{array}\right].$$

Langkah 3 Ganti baris 3 dari $\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2$ dengan -2(baris 1 dari $\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2$) + baris 3 dari $\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 5 & -8 \end{array}\right].$$

Langkah 4 Kalikan baris 2 dari $\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{b}_3$ dengan 2. OBE Jenis 1 ini menghasilkan

$$\boldsymbol{A}_4|\boldsymbol{b}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \end{array}\right].$$

Langkah 5 Ganti baris 3 dari $\boldsymbol{A}_4|\boldsymbol{b}_4$ dengan -2(baris 2 dari $\boldsymbol{A}_4|\boldsymbol{b}_4$) + baris 3 dari $\boldsymbol{A}_4|\boldsymbol{b}_4$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Langkah 6 Ganti baris 1 dari $\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5$ dengan $-\frac{5}{2}$(baris 2 dari $\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5$) + baris 1 dari $\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_6|\boldsymbol{b}_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Langkah 7 Ganti baris 2 dari $\boldsymbol{A}_6|\boldsymbol{b}_6$ dengan -2 (baris 3 dari $\boldsymbol{A}_6|\boldsymbol{b}_6$) + baris 2 dari $\boldsymbol{A}_6|\boldsymbol{b}_6$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_7|\boldsymbol{b}_7 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Langkah 8 Ganti baris 1 dari $\boldsymbol{A}_7|\boldsymbol{b}_7$ dengan -4 (baris 3 dari $\boldsymbol{A}_7|\boldsymbol{b}_7$) + baris 1 dari $\boldsymbol{A}_7|\boldsymbol{b}_7$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_8|\boldsymbol{b}_8 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

$\boldsymbol{A}_8|\boldsymbol{b}_8$ mempresentasikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad &= 1 \\ x_3 &= -2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jadi, (1.9) memiliki solusi tunggal $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = -2$. Karena (1.9) diperoleh dari (1.8) melalui OBE, solusi tunggal untuk (1.8) mestilah $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = -2$.

Sistem Linear Tidak Memiliki Solusi

Dicari solusi dari sistem linear berikut dengan metode Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 9. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Metode Gauss-Jordan diterapkan ke matriks

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \end{array}\right].$$

Mengganti baris 2 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ dengan -2 (baris 1 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$) + baris 1 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ menghasilkan OBE Jenis 2 berikut:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{1.11}$$

Kolom kedua dari (1.11) akan ditransformasi menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tetapi ini tidak mungkin. Sistem (1.11) ekuivalen dengan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1. \end{aligned} \tag{1.11$'$}$$

Berapapun nilai yang diberikan untuk x_1 dan x_2, persamaan kedua pada (1.11′) tidak pernah dapat dipenuhi. Jadi, (1.11′) tidak memiliki solusi. Karena (1.11′) diperoleh dari (1.10) dengan menggunakan OBE, (1.10) juga tidak memiliki solusi.

Sistem Linear Memiliki Jumlah Solusi Tidak Berhingga

Dicari solusi dari sistem linear berikut dengan metode Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 - \quad x_3 &= 4 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 24 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Bentuk matriks yang diperluas dari (1.12) adalah

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & 24 \end{array}\right].$$

Dimulai dengan mengganti baris 2 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ dengan -3(baris 1 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$) + baris 2 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -17 \\ 1 & 6 & 5 & 24 \end{array}\right].$$

Selanjutnya ganti baris 3 dari $\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1$ dengan -1(baris 1 dari $\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1$) + baris 3 dari $\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{b}_1$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -17 \\ 0 & 5 & 4 & 17 \end{array}\right].$$

Kemudian ganti baris 3 dari $\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2$ dengan 1(baris 2 dari $\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2$) + baris 3 dari $\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{b}_2$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Selanjutnya ganti baris 1 dari $\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{b}_3$ dengan $\frac{1}{5}$(baris 2 dari $\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{b}_3$) + baris 1 dari $\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{b}_3$. Hasil dari OBE Jenis 2 ini adalah

$$\boldsymbol{A}_4|\boldsymbol{b}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & -5 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sekarang kalikan baris 2 dari $\boldsymbol{A}_4|\boldsymbol{b}_4$ dengan $-\frac{1}{5}$. OBE Jenis 1 ini menghasilkan

$$\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{1.13}$$

Kolom ketiga dari $\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5$ akan ditransformasi menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tetapi ini tidak mungkin. Sistem linear yang berkorespondensi dengan $\boldsymbol{A}_5|\boldsymbol{b}_5$ adalah

$$x_1 \quad + \frac{1}{5}x_3 = \frac{18}{5} \tag{1.14}$$

$$x_2 + \frac{4}{5}x_3 = \frac{17}{5} \tag{1.15}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \tag{1.16}$$

Misalkan diambil sebarang nilai k untuk x_1, lantas (1.14) akan terpenuhi jika $k + \frac{1}{5}x_3 = \frac{18}{5}$, atau $x_3 = -5k + 18$. Dengan cara yang sama, (1.15) akan terpenuhi jika $x_2 + \frac{4}{5}x_3 = \frac{17}{5}$, atau $x_2 + \frac{4}{5}(-5k + 18) = \frac{17}{5}$, atau $x_2 = 4k - 11$. Tentu saja (1.16) akan terpenuhi untuk sebarang nilai x_1, x_2, dan x_3. Jadi untuk sebarang nilai k didapat $x_1 = k$, $x_2 = 4k - 11$, dan $x_3 = -5k + 18$. Jadi, (1.13) memiliki banyak solusi yang tidak berhingga – satu untuk setiap bilangan k. Karena (1.13) diperoleh dari (1.12) melalui OBE, (1.12) juga memiliki jumlah solusi yang tidak berhingga.

1.9 Invers dari Matriks

Invers dan Sifat-sifatnya

Untuk matriks persegi $\boldsymbol{A}$ yang diketahui, $\boldsymbol{A}^T$ selalu bisa didapatkan. Sebaliknya, matriks inversnya bisa ada atau bisa tidak ada.

Definisi 1.5 Suatu matriks, dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}^{-1}$, adalah invers dari $\boldsymbol{A}$ jika syarat-syarat berikut dipenuhi:

(1) $\boldsymbol{A}$ adalah matriks persegi,

(2) $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

Catatan 1.3 Pernyataan berikut adalah benar:

(1) Tidak setiap matriks persegi memiliki invers. Kepersegian adalah syarat perlu tetapi bukan syarat cukup bagi keberadaan sebuah invers. Jika matriks persegi $\boldsymbol{A}$ memiliki invers, $\boldsymbol{A}$ dinamakan *nonsingular*. Jika $\boldsymbol{A}$ tidak memiliki invers, $\boldsymbol{A}$ dinamakan matriks *singular*.

(2) Jika $\boldsymbol{A}$ nonsingular, maka $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{A}^{-1}$ adalah saling invers satu sama lain, yaitu $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

(3) Jika $\boldsymbol{A}$ adalah $n \times n$, maka $\boldsymbol{A}^{-1}$ juga $n \times n$.

(4) Invers dari $\boldsymbol{A}$ adalah tunggal.

Bukti: Misalkan $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{C}$ keduanya invers dari $\boldsymbol{A}$. Lalu

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{C}.$$

(5) $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ mengakibatkan $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

Bukti: Perlu ditunjukkan bahwa jika $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$, dan jika terdapat matriks $\boldsymbol{B}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, maka $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Dengan pasca perkalian kedua ruas $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ oleh $\boldsymbol{A}^{-1}$ didapat $\boldsymbol{BAA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$ dan oleh karena itu $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Contoh 1.19 Misalkan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kemudian

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{6} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\frac{1}{6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, $\boldsymbol{B}$ adalah invers dari $\boldsymbol{A}$.

(6) Anggaplah bahwa $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{A}$ matriks nonsingular dengan dimensi $n \times n$.

(a) $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,

(b) $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$.

Matriks Invers dan Solusi Sistem Persamaan Linear

Penerapan konsep matriks invers untuk solusi sistem persamaan linear simultan adalah seketika dan langsung. Pertimbangkan sistem linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ yang memiliki m persamaan dan m variabel. Jika $\boldsymbol{A}$ matriks nonsingular, maka praperkalian kedua ruas $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dengan $\boldsymbol{A}^{-1}$ menghasilkan

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\text{atau} \qquad \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\text{atau} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Jadi, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ adalah solusi dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dan solusi adalah tunggal karena $\boldsymbol{A}^{-1}$ tunggal

Anggaplah invers dari matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

akan dicari. Ini memerlukan pencarian sebuah matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Dari persamaan (1.17) diperoleh pasangan persamaan simultan berikut yang harus memenuhi a_{11}, a_{12}, a_{21}, dan a_{22}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, untuk mendapatkan

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix},$$

yaitu kolom pertama dari $\boldsymbol{A}^{-1}$, metode Gauss-Jordan dapat diimplementasikan terhadap matriks yang diperluas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

Begitu OBE telah mentransformasikan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

menjadi $\boldsymbol{I}_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

akan telah ditrasformasikan menjadi kolom pertama dari $\boldsymbol{A}^{-1}$. Untuk menentukan

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix},$$

yaitu kolom kedua dari $\boldsymbol{A}^{-1}$, OBE diterapkan terhadap matriks yang diperluas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Apabila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

telah diubah menjadi $\boldsymbol{I}_2$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

akan telah ditrasformasikan menjadi kolom kedua dari $\boldsymbol{A}^{-1}$. Jadi, untuk mendapatkan setiap kolom dari $\boldsymbol{A}^{-1}$, serangkaian OBE harus dilakukan yang mengubah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

menjadi $\boldsymbol{I}_2$. Ini menunjukkan bahwa $\boldsymbol{A}^{-1}$ dapat ditemukan dengan menerapkan OBE terhadap matriks 2×4 berikut:

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Jadi, seraya $\boldsymbol{A}$ diubah menjadi $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_2$ diubah menjadi $\boldsymbol{A}^{-1}$. Komputasi untuk mendapatkan adalah sebagai berikut:

Langkah 1 Ganti baris 2 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_2$ dengan -3 (baris 1 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_2$) + baris 2 dari $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_2$. Ini menghasilkan

$$\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{I}_2' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Langkah 2 Kalikan baris 2 dari $\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{I}_2'$ dengan -1 sehingga didapat

$$\boldsymbol{A}''|\boldsymbol{I}_2'' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

Langkah 3 Ganti baris 1 dari $\boldsymbol{A}''|\boldsymbol{I}_2''$ dengan -2 (baris 2 dari $\boldsymbol{A}''|\boldsymbol{I}_2''$) + baris 1 dari $\boldsymbol{A}''|\boldsymbol{I}_2''$. Ini menghasilkan

$$\boldsymbol{A}'''|\boldsymbol{I}_2''' = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix}\right].$$

Karena $\boldsymbol{A}$ telah ditransformasi menjadi $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_2$ telah ditransformasi menjadi $\boldsymbol{A}^{-1}$. Jadi

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriks Yang Tidak Memiliki Invers

Beberapa matriks bias saja tidak memiliki invers. Sebagai contoh, akan dicari invers dari matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Apabila metode Gauss-Jordan digunakan untuk menyelesaikan bentuk matriks yang diperluas

$$\left[\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

diperoleh

$$\left[\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right].$$

Metode Gauss-Jordan mentransformasi $\boldsymbol{A}$ menjadi matriks dengan nilai nol pada baris yang di bawah. Ini menunjukkan bahwa (1.18) tidak mempunyai invers.

Menggunakan Invers Matriks untuk Menyelesaikan Sistem Linear

Seperti yang dinyatakan sebelumnya, invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ yang memiliki jumlah variabel dan jumlah persamaan sama banyak. Kalikan saja kedua ruas dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dengan $\boldsymbol{A}^{-1}$ untuk mendapatkan solusi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Sebagai contoh, untuk menyelesaikan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned} \tag{1.19}$$

tulis bentuk matriks dari (1.19) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Misalkan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sebelumnya telah diperoleh bahwa

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mengalikan kedua ruas dari (1.20) dengan $\boldsymbol{A}^{-1}$ didapat

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, $x_1 = -1$ dan $x_2 = 2$ adalah solusi tunggal untuk sistem (1.19).

1.10 Determinan

Determinan dari matriks persegi $\boldsymbol{A}$, dinyatakan oleh $|\boldsymbol{A}|$, adalah skalar yang terdefinisi dengan tunggal yang berhubungan denganmatriks itu. Determinan hanya terdefinisi untuk matriks persegi. Untuk matriks 2×2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

determinannya didefinisikan sebagai berikut:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Melihat dimensi dari matriks $\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}|$ sebagaimana didefinisikan di atas dinamakan *determinan orde dua*.

Contoh 1.20 Diketahui matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lantas, determinan dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot 5 - 4 \cdot 8 = 50 - 32 = 18.$$

Menghitung Determinan Orde n dengan Ekspansi Laplace

Minoelemen a_{ij} dari determinan $|\boldsymbol{A}|$, dinyatakan dengan $|A_{ij}|$, dapat diperoleh dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari determinan $|\boldsymbol{A}|$. Sebagai contoh, untuk determinan orde tiga minor dari a_{11}, a_{12}, dan a_{13} berturut-turut adalah

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Konsep yang berhubungan erat dengan minor adalah konsep kofaktor. Sebuah kofaktor, dinyatakan oleh C_{ij}, adalah sebuah minor dengan tanda aljabar yang ditentukan melekat padanya. Secara formal kofaktor didefinisikan oleh

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|A_{ij}| = \begin{cases} -|A_{ij}| & \text{jika } i+j \text{ ganjil,} \\ |A_{ij}| & \text{jika } i+j \text{ genap.} \end{cases}$$

Dengan menggunakan konsep baru ini, determinan orde tiga dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\ &= a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}|. \end{aligned}$$

Ekspansi Laplace determinan orde tiga berfungsi untuk mengurangi masalah menghitung ke salah satu menghitung determinan orde dua tertentu saja. Secara umum, ekspansi Laplace determinan orde n akan mengurangi masalah menghitung salah satu n kofaktor, masing-masing darinya berorde $n-1$, dan penerapan berulang dari proses secara metodologik akan mengarah kepada orde determinan yang semakin rendah. Selanjutnya nilai determinan asal dengan mudah dapat dihitung.

Secara formal, nilai $|\boldsymbol{A}|$ orde n dapat dicari dengan ekspansi Laplace dari *sebarang baris* atau *sebarang kolom* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}| \qquad &&[\text{ekspansi dengan baris ke } i] \\ &= \sum_{i=i}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}| \qquad &&[\text{ekspansi dengan kolom ke } j]. \end{aligned}$$

Contoh 1.21 Untuk menunjukkan penggunaan metode ekspansi Laplace ini akan dicari determinan dari

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinan $\boldsymbol{A}$ diperluas dengan menggunakan kofaktor baris 1. Perhatikan bahwa $a_{11} = 5$, $a_{12} = 6$, dan $a_{13} = 1$. Juga

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 4(-3) = 18.$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(7) = -24.$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 3(7) = -27.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}| + (-1)^{1+1}a_{13}|A_{13}| \\ &= (1)(5)(18) + (-1)(6)(-24) + (1)(1)(-27) = 207. \end{aligned}$$

Meskipun $|\boldsymbol{A}|$ dapat diekspansi oleh sebarang baris atau sebarang kolom, sebagai pertimbangan kalkulasi numeris, baris atau kolom dengan jumlah elemen 1 atau 0 terbanyak lebih disukai untuk tujuan ini, karena 0 kali kofaktornya adalah 0. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.22 Untuk menghitung

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix},$$

cara termudah untuk mengekspansi determinan adalah dengan menggunakan kofaktor kolom 3 yang terdiri dari $a_{13} = 1$, $a_{23} = 0$, dan $a_{33} = 0$. Jadi,

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+3}a_{13}|A_{13}| = (1)(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 21 = -27.$$

Soal-Soal Latihan

1. Gunakan matriks untuk merepresentasikan sistem persamaan berikut dalam dua acara yang berbeda:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad &= 5 \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Tentukanlah apakah masing-masing himpunan vektor pada soal nomor 2 dan nomor 3 bebas linear atau bergantung linear.

2. $V = \{[1 \quad 0 \quad 1], [1 \quad 2 \quad 1], [2 \quad 2 \quad 2]\}$.
3. $V = \{[2 \quad 1 \quad 0], [1 \quad 2 \quad 0], [3 \quad 3 \quad 1]\}$.

Gunakan metode Gauss-Jordan untuk menentukan apakah masing-masing sistem linear pada soal nomor 4 sampai nomor 7 tidak memiliki solusi, memiliki solusi tunggal, atau memiliki jumlah solusi tidak berhingga. Tentukan solusi tersebut jika ada.

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 6. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

8. Carilah $\boldsymbol{A}^{-1}$ (jika ianya ada) dengan menggunakan metode Gauss-Jordan untuk matriks
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Gunakan jawaban soal nomor 8 untuk menyelesaikan sistem linear berikut:
$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{x_2 - {}} x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

10. Tunjukkanlah bahwa matriks persegi memiliki invers jika dan hanya jika baris-barisnya membentuk himpunan vector yang bebas linear.

REFERENSI TERPILIH

H. Anton dan C. Rorres. *Elementary Linear Algebra*, 11th Edition. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2014.

A. C. Chiang dan K. Wainwright. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th Edition. McGraw-Hill, New York, 2005.

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*, 7th Edition. McGraw-Hill, New York, 1990.

C. Leon dan D. Steinberg. *Methods and Applications of Linear Programming*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1974.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.