SIFAT-SIFAT *BI*-ALJABAR DAN SIFAT-SIFAT IDEAL PADA *BI*-ALJABAR

KARYA ILMIAH

OLEH

MEIVY ANDHIKA BEAUTY
NIM. 1703114425

PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS RIAU
PEKANBARU
2021

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
http://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

SIFAT-SIFAT *BI*-ALJABAR DAN SIFAT-SIFAT IDEAL PADA *BI*-ALJABAR

Meivy Andhika Beauty

Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

meivy.andhika3600@student.unri.ac.id

ABSTRACT

This article discusses the properties of BI-algebra and properties of ideals in BI-algebra. By using the binary operations and implication algebra are obtained by conditions that show the properties of BI-algebra and Ideals in BI-algebra. This article is a review of article from Saeid et al. [Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 2017, 177-194].

Keywords: BI-algebra, ideals in BI-algebra, right distributive

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang sifat-sifat BI-aljabar dan sifat-sifat ideal pada BI-aljabar. Dengan menggunakan operasi biner dan implikasi aljabar diperoleh syarat yang menunjukkan sifat BI-aljabar dan ideal pada BI-aljabar. Artikel ini merupakan *review* dari artikel Saeid et al. [Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 2017, 177-194].

Kata kunci: BI-aljabar, ideal pada BI-aljabar, distribusi kanan

1. PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu dasar yang dapat digunakan sebagai alat bantu dalam berbagai bidang ilmu dan terus dikembangkan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan lainnya. Dalam ilmu matematika terdapat berbagai cabang pembagian ilmu salah satunya adalah struktur aljabar.

Struktur aljabar merupakan salah satu cabang dalam bidang ilmu matematika murni yang mempunyai konsep dasar himpunan, pemetaan dan operasi biner. Beberapa topik pembahasan dalam struktur aljabar diantaranya yaitu grup, ring dan ideal. Dalam Gilbert dan Gilbert [1] dijelaskan bahwa suatu struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang memiliki paling sedikit satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository Universitas Riau https://repository.unri.ac.id/ © Hak cipta milik Universitas Riau

Imai dan Iséki [2] memperkenalkan dua kelas dari aljabar abstrak, yaitu BCK-aljabar dan BCI-aljabar. Diketahui bahwa kelas BCK-aljabar merupakan subkelas dari kelas BCI-aljabar. Neggers dan Kim [6] memperkenalkan pengertian d-aljabar yang merupakan pengembangan dari BCK-aljabar. Gagasan B-aljabar diperkenalkan oleh Neggers dan Kim [5] yang yang memenuhi aksioma (i) $x * x = 0$, (ii) $x * 0 = x$, dan (iii) $(x * y) * z = x * [z * (0 * y)]$ untuk sebarang $x, y, z \in X$. Kim dan Kim [4] mendefinisikan BG-aljabar yang merupakan pengembangan dari B-aljabar. Kemudian, Jun et al. [3] memperkenalkan BH-aljabar yang merupakan pengembangan dari $BCK/BCI/BCH$-aljabar. Walendziak[10] memperkenalkan gagasan $BF/BF_1/BF_2$-aljabar. Sebuah BF-aljabar dikatakan BF_1-aljabar apabila memenuhi (BG) dan dikatakan BF_2-aljabar apabila memenuhi (BH).

Saeid et al. [9] memperkenalkan aljabar lainnya yaitu BI-aljabar yang merupakan pengembangan dari implikasi aljabar. Hal ini membuat penulis tertarik mengkaji tentang bentuk aljabar lainnya yang berbeda dari bentuk aljabar pada umumnya, yakni BI-aljabar. Oleh karena itu, penulis bermaksud untuk membahas beberapa pembahasan seperti sifat-sifat BI-aljabar. Dalam pembuktian sifat-sifat BI-aljabar menggunakan operasi biner "$*$" dan memenuhi aksioma lainnya. Selain itu penulis juga membahas tentang sifat-sifat ideal pada BI-aljabar.

Adapun struktur penulisan artikel ini adalah di bagian dua dibahas kajian teori, di bagian ketiga dibahas sifat-sifat BI-aljabar. Selanjutnya di bagian keempat dibahas sifat-sifat ideal pada BI-aljabar.

2. KAJIAN TEORI

Pada bagian ini dibahas BI-aljabar, hukum distribusi pada BI-aljabar, ideal pada BI-aljabar, grupoid dan himpunan terurut parsial sebagai berikut.

Definisi 1 [9] Suatu aljabar tipe (2,0) yaitu $(X, *, 0)$ dikatakan BI-aljabar jika memenuhi:

$(B1)$ $x * x = 0$,

(BI) $x * (y * x) = x$, untuk semua $x, y \in X$.

Setelah membahas mengenai sifat-sifat BI-aljabar pada Definisi 1, selanjutnya diberikan definisi mengenai hukum distribusi pada BI-aljabar.

Definisi 2 [9] Suatu BI-aljabar X dikatakan memenuhi distribusi kanan, jika $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$, dan memenuhi distribusi kiri jika $(z * (x * y)) = (z * x) * (z * y)$, untuk semua $x, y, z \in X$.

Setelah dibahas mengenai hukum distribusi BI-aljabar pada Definisi 2, selanjutnya diberikan definisi mengenai ideal pada BI-aljabar.

Definisi 3 [9] Suatu himpunan bagian I dari X dikatakan ideal di X jika memenuhi

$(I1)$ $0 \in I$,

$(I2)$ $y \in I$ dan $x * y \in I$ maka $x \in I$ untuk sebarang $x, y \in X$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

Contoh 1 Diketahui $X = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah suatu himpunan dengan Tabel Cayley yang disajikan pada Tabel 1. Selanjutnya dapat dilihat pada Tabel 1 memuat

Tabel 1: Ideal dengan $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	2
2	2	2	0	2
3	3	2	3	0

elemen 0. Kemudian, misalkan $x, y \in X$ dari Tabel 1 ditunjukkan $y \in I$ dan $x * y \in I$ mengakibatkan $x \in I$,
Untuk $y = 0$ diperoleh
$0 * 0 = 0, 0 \in I$
$1 * 0 = 1, 1 \in I$
$2 * 0 = 2, 2 \in I$
$3 * 0 = 3, 3 \in I$
Dengan cara yang sama untuk x=1, x=2 dan x=3 akan diperoleh hasil yang sama. Jadi, untuk sebarang $x, y \in X$ berlaku $y \in I$ dan $x * y \in I$ mengakibatkan $x \in I$ sehingga Definisi 3 terpenuhi dan $(X, *, 0)$ adalah ideal.

Kemudian Paterson [7] menjelaskan grupoid merupakan suatu himpunan terhadap perkalian yang didefinisikan parsial dari sifat-sifat grup. Selanjutnya diberikan definisi mengenai himpunan terurut parsial.

Definisi 4 [8, h. 618] Suatu relasi R dikatakan terurut parsial jika memenuhi refleksif, antisimetris, transitif. Sebuah himpunan S dengan terurut parsial R disebut himpunan terurut parsial, dan dinotasikan dengan (S, R). Anggota dari S disebut elemen pada himpunan terurut parsial.

3. SIFAT-SIFAT *BI*-ALJABAR

Selanjutnya pada bagian ini dibahas sifat-sifat BI-aljabar sebagai berikut.

Proposisi 5 Jika X adalah BI-aljabar, maka

(a) $x * 0 = x$.

(b) $0 * x = 0$.

(c) $x * y = (x * y) * y$.

(d) Jika $y * x = x$, $\forall x, y \in X$, maka $X = \{0\}$.

(e) Jika $x * (y * z) = y * (x * z)$, $\forall x, y \in X$, maka $X = \{0\}$.

(f) Jika $x * y = z$, maka $z * y = z$ dan $y * z = y$.

(g) Jika $(x*y)*(z*u) = (x*z)*(y*u)$, maka $X = \{0\}$ untuk semua $x, y, z, u \in X$.

Bukti.

(a) Berdasarkan Definisi 1 aksioma (BI), jika $y = x$ maka diperoleh

$$x * (x * x) = x, \tag{1}$$

selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 1 aksioma $(B1)$, persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$x * 0 = x.$$

Jadi terbukti bahwa $x * 0 = x$.

(b) Berdasarkan Definisi 1 aksioma (BI) berlaku untuk setiap $x, y \in X$. Kemudian jika $y = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} y * (x * y) &= y \\ 0 * (x * 0) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

selanjutnya, dengan menggunakan Proposisi 5 poin (a), persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$0 * x = 0.$$

Jadi terbukti bahwa $0 * x = 0$.

(c) Berdasarkan Definisi 1 aksioma (BI), jika $x = x * y$ maka diperoleh

$$x * y * (y * (x * y)) = x * y, \tag{3}$$

selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 1 aksioma (BI), persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$(x * y) * y = x * y.$$

Jadi terbukti bahwa $x * y = (x * y) * y$.

(d) Berdasarkan Definisi 1 aksioma (BI) dan $(B1)$, jika $y * x = x$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} x &= x * (y * x) && [(BI)] \\ &= x * x, && [(B1)] \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $X = \{0\}$.

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
© Hak cipta milik Universitas Riau

(e) Ambil sebarang $x \in X$ dengan menggunakan Proposisi 5 poin (i) diperoleh

$$\begin{aligned} x &= x * 0 && [(\text{Proposisi 5 (a)})] \\ &= x * (0 * x) && [(\text{Proposisi 5 (b)})] \\ &= 0 * (x * x) && [(\text{Proposisi 5 (e)})] \\ &= 0 * 0, && [(B1)] \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $X = \{0\}$.

(f) Berdasarkan Proposisi 5 poin (c), jika $x * y = z$ diperoleh

$$\begin{aligned} z &= x * y \\ &= (x * y) * y, && [\text{Proposisi 5 (c)}] \\ z &= z * y. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $z * y = z$. Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 1 aksioma (BI) diperoleh

$$\begin{aligned} y * z &= y * (x * y), \\ y * z &= y. && [(\text{BI})] \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $y * z = y$.

(g) Berdasarkan Proposisi 5 poin (a) dan Definisi 1 aksioma $(B1)$, jika $x \in X$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} x &= x * 0 \\ &= (x * 0) * 0, && [\text{Proposisi 5 (a)}] \\ x &= (x * 0) * (x * x), && [(B1)] \end{aligned}$$

diketahui bahwa $(x*y)*(z*u) = (x*z)*(y*u)$, sehingga berdasarkan Definisi 1 aksioma $(B1)$ dan Proposisi 5 poin (b) dapat ditulis

$$\begin{aligned} x &= (x * x) * (0 * x) \\ &= 0 * (x * x) && [(B1)] \\ &= 0 * 0, && [\text{Proposisi 5 (b)}] \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $X = \{0\}$. □

Proposisi 6 Misalkan $(X; *)$ adalah sebuah grupoid dengan $0 \in X$. Jika aksioma berikut terpenuhi

(a) $x * x = 0$,

Repository University of Riau
https://repository.unriau.id
© Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
http://repository.unriac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

(b) $x * y = x$, untuk semua $x \neq y$,

maka $(X; *, 0)$ merupakan distribusi kanan pada BI-aljabar.

Bukti.

(a) Jika $(X, *)$ adalah grupoid dengan $0 \in X$, maka dengan menggunakkan Proposisi 5, Definisi 1, dan Definisi 2 akan dibuktikan $(X, *)$ memenuhi aksioma (a).

$$\begin{aligned} x * x &= (x * 0) * (x) && [(\text{Proposisi 5 (a)})] \\ &= (x * x) * (0 * x) && [\text{Definisi 2}] \\ &= 0 * (0 * x) && [(B1)] \\ &= 0 * 0, && [(\text{Proposisi 5 (b)})] \\ x * x &= 0. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x * x = 0$.

(b) Jika $(X, *)$ adalah grupoid dengan $0 \in X$, maka menggunakan Proposisi 5 poin (c) dan asosiatif akan dibuktikan $(X, *)$ memenuhi aksioma (b).

$$\begin{aligned} x * y &= (x * y) * y && [(\text{Proposisi 5 (c)})] \\ &= x * (y * y) && [(\text{Asosiatif})] \\ x * y &= x. && [(B1)] \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x * y = x$, untuk semua $x \neq y$. □

Contoh 2 Diketahui X = {0,1,2,3} adalah suatu himpunan dengan Table Cayley yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2: Proposisi 6 dengan $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	2	0	2
3	3	3	3	0

Selanjutnya dari Tabel 2 dapat dilihat diagonal utamanya bernilai 0, sehingga berlaku $x * x = 0$ artinya Proposisi 6 poin (i) terpenuhi. Kemudian misalkan $x, y \in X$, dari Tabel 2 ditunjukkan bahwa $x * y = x$ untuk semua $x \neq y$.
Untuk $x = 0$, $y = 1, 2$ diperoleh
$0 * 1 = 0$,
$0 * 2 = 0$,
Untuk $x = 1$, $y = 0, 2$ diperoleh
$1 * 0 = 1$,

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

$1 * 2 = 1$,
Untuk $x = 2$, $y = 0, 1$ diperoleh
$2 * 0 = 2$,
$2 * 1 = 2$,
Untuk $x = 3$, $y = 0, 2$ diperoleh
$3 * 0 = 3$,
$3 * 2 = 3$,
Dapat dilihat bahwa untuk sebarang $x, y \in x$ berlaku $x * y = x$ sehingga Proposisi 6 terpenuhi.

Proposisi 7 Jika X adalah BI-aljabar dengan distributif kanan, maka

(a) $y * x \leq y$,

(b) $(y * x) * x \leq y$,

(c) $(x * z) * (y * z) \leq x * y$,

(d) jika $x \leq y$ maka $x * z \leq y * z$,

(e) $(x * y) * z \leq x * (y * z)$,

(f) jika $x * y = z * y$, maka $(x * z) * y = 0$,

untuk semua $x, y, z \in X$.

Bukti.

(a) Dengan menggunakan Definisi 2, Definisi 1 aksioma $(B1)$, dan Proposisi 5 poin (ii) diperoleh

$$\begin{aligned}
(y * x) * y &= (y * y) * (x * y) && \text{[Definisi 2]} \\
&= 0 * (x * y) && [(B1)] \\
&= (0 * x) * (0 * y) && \text{[Definisi 2]} \\
&= 0 * 0, && \text{[Proposisi 5 (ii)]}(y * x) * y \quad = 0. \qquad [B1
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $y * x \leq y$.

(b) Dengan menggunakan Definisi 2, Proposisi 6 poin (a), dan Proposisi 5 poin (b) diperoleh

$$\begin{aligned}
((y * x) * x) * y &= ((y * x) * y) * (x * y) && \text{[Definisi 2]} \\
&= ((y * y) * (x * y)) * (x * y) && \text{[Definisi 2]} \\
&= (0 * (x * y)) * (x * y), && \text{[Proposisi 6 (a)]} \\
&= 0 * (x * y), && \text{[Proposisi 5 (b)]} \\
((y * x) * x) * y &= 0. && \text{[Proposisi 5 (b)]}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(y * x) * x \leq y$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

(c) Dengan menggunakan Definisi 2, Proposisi 6 poin (a), dan Proposisi 5 poin (ii) diperoleh

$$\begin{aligned}
((x*z)*(y*z))*(x*y) &= ((x*y)*z)*(x*y) && \text{[Definisi 2]}\\
&= ((x*y)*(x*y))*(z*(x*y)) && \text{[Definisi 2]}\\
&= 0*(z*(x*y)) && \text{[Proposisi 6 (a)]}\\
&= (0*z)*(0*(x*y)) && \text{[Definisi 2]}\\
&= 0*((0*x)*(0*y)) && \text{[Definisi 2]}\\
&= 0*(0*0) && \text{[Proposisi 5 ()]}\\
&= 0*0 && \text{[Proposisi 6 (a)]}\\
((x*z)*(y*z))*(x*y) &= 0. && [(B1)]
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $((x*z)*(y*z)) \leq (x*y)$.

(d) Jika $x \leq y$ maka $x*y = 0$, sehingga dengan menggunakan Definisi 2 dan Proposisi 5 poin (b) diperoleh

$$\begin{aligned}
(x*z)*(y*z) &= (x*y)*z && \text{[Definisi 2]}\\
&= 0*z,\\
(x*z)*(y*z) &= 0. && \text{[Proposisi 5 (b)]}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x*z) \leq (y*z)$.

(e) Berdasarkan poin (a), diperoleh $x*z \leq x$. Kemudian berdasarkan poin (d) diperoleh bahwa $(x*z)*(y*z) \leq x*(y*z)$. Dengan menggunakan distribusi kanan diperoleh

$$\begin{aligned}
((x*y)*z)*(x*(y*z)) &= ((x*z)*(y*z))*((x*y)*(x*z))\\
&= 0*(0*0)\\
&= 0*0\\
((x*y)*z)*(x*(y*z)) &= 0.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x*y)*z \leq x*(y*z)$.

(f) Misalkan $x*y = z*y$. Karena X adalah distributif kanan, diperoleh

$$\begin{aligned}
(x*z)*y &= (x*y)*(z*y) && \text{[Definisi 2]}\\
&= (x*y)*(x*y),\\
(x*z)*y &= 0. && \text{[Proposisi 6 (a)]}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $x*y = z*y$, maka $(x*z)*y = 0$. □

Proposisi 8 Misalkan X memiliki kondisi $(z*x)*(z*y) = y*x$ untuk semua $x, y, z \in X$. Jika $x \leq y$, maka $z*y \leq z*x$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
© Hak Cipta milik Universitas Riau

Bukti. Jika $x \leq y$ maka $x * y = 0$, sehingga dengan menggunakkan Proposisi 7 poin (d) diperoleh

$$\begin{aligned}(z * x) * (z * y) &= x * y \\ (z * x) * (z * y) &= 0.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(z * x) \leq (z * y)$. □

Sebuah aljabar $(X, *)$ dikatakan memiliki kondisi inklusi jika $(x*y)*x = 0$ untuk semua $x, y \in X$. Setiap distribusi kanan pada BI-aljabar memiliki kondisi inklusi oleh Proposisi 7 poin (a). Jika X adalah distribusi kanan pada BI-aljabar, maka X adalah aljabar quasi-associative oleh Proposisi 7 poin (e).

Proposisi 9 Misalkan X adalah BI-aljabar dengan distributif kanan. Kemudian relasi indikasi $'' \leq''$ adalah relasi transitif.

Bukti. Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka berdasarkan Definisi 4 diperoleh $x * y = 0$ dan $y * z = 0$. Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}x * z &= (x * z) * 0 && \text{[Proposisi 5 (i)]} \\ &= (x * z) * (y * z) \\ &= (x * y) * z && \text{[Definisi 2]} \\ &= 0 * z, \\ x * z &= 0. && \text{[Proposisi 5 (ii)]}\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x \leq z$. □

4. Sifat-Sifat Ideal pada *BI*-Aljabar

Pada bagian ini dibahas mengenai sifat-sifat ideal pada BI-aljabar.

Proposisi 10 Misalkan I adalah ideal pada X. Jika $y \in I$ dan $x \leq y$, maka $x \in I$.

Bukti. Dari Definisi 3 jika $y \in I$ dan $x \leq y$ maka $x * y = 0$, oleh karena itu $x * y = 0 \in I$. Dengan menggunakan Definiisi 1 aksioma (BI) persamaan $x * y = 0$ sama artinya dengan $x * x = 0 \in I$, jadi terbukti bahwa $x \in I$. □

Teorema 11 Jika X adalah distribusi kanan pada BI-aljabar maka $A(x, y)$ adalah ideal dari X dengan $x, y \in X$.

Bukti. Teorema 11 dapat dilihat pada artikel Saeid et al. [9]

Proposisi 12 Jika X adalah BI-aljabar, maka

(a) $A(0, x) \subseteq A(x, y)$, untuk semua $x, y \in X$,

(b) jika $A(0, y)$ adalah ideal dan $x \in A(0, y)$, maka $A(x, y) \subseteq A(0, y)$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak cipta Dilindungi Universitas Riau

Bukti.

(a) Jika $z \in A(0,x)$, dengan menggunakan sifat pada Proposisi 5 poin (e) akan ditulis

$$\begin{aligned} z * x &= z * (0 * x) && [(\text{Proposisi } 5)] \\ &= 0 * (z * x), && [(\text{Proposisi } 5)] \\ z * x &= 0. \end{aligned}$$

Karena diperoleh $z * x = 0$, maka $(z * x) * y = 0 * y = 0$. Sehingga $z \in A(x,y)$ menjadi $A(0,x) \subseteq A(x,y)$.

(b) Jika $A(0,y)$ adalah ideal dan $x \in A(0,y)$, dengan menggunakan sifat pada Proposisi 5 poin (e) akan ditulis

$$\begin{aligned} z * x &= z * (0 * y) && [(\text{Proposisi } 5)] \\ &= 0 * (z * y), && [(\text{Proposisi } 5)] \\ z * x &= 0. \end{aligned}$$

Karena diperoleh $z*x = 0$ maka $(z*x)*y = 0*y = 0$, sehingga $((z*x)*0)*y = 0$. Dapat dilihat bahwa $z * x \in A(0,y)$ karena hasil yang diperoleh merupakan anggota di A. Kemudian, karena $A(0,y)$ adalah ideal dan $x \in A(0,y)$, $z \in A(0,y)$. Jadi $A(x,y) \subseteq A(0,y)$. □

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa sifat-sifat BI-aljabar dan sifat-sifat ideal pada BI-aljabar. Kemudian X merupakan BI-aljabar dan jika $(X;*)$, maka $(X;*,0)$ adalah distribusi kanan pada BI-aljabar. Selanjutnya sifat-sifat ideal pada BI-aljabar, jika X adalah distribusi kanan pada BI-aljabar maka $A(x,y)$ adalah ideal dari X.

Ucapan terima kasih Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Sri Gemawati, M.Si. yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] L. Gilbert dan J. Gilbert, *Elements of Modern Algebra, Seventh Edition*, Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2009.

[2] K. Iseki, *On BCI-algebras*, Mathematicae Seminar Notes, 8 (1980), 125 – 130.

[3] Y. B. Jun, E. H. Roh, dan H. S. Kim, *On BH-algebras*, Scientiae Mathematicae, 1 (1998), 347 – 354.

[4] C. B. Kim dan H. S. Kim, *On BG-algebras*, Demonstratio Mathematics, 41 (2008), 497-505.

[5] J. Neggers dan H. S. Kim, *On B-algebras*, Mathematics Vesnik, 54 (2002), 517-530.

[6] J. Neggers dan H. S. Kim, *On d-algebras*, Mathematica Slovaca, 49 (1999), 19 – 26.

[7] A. L. T. Paterson, *Groupoids, Invers, Semigroups, and their Operator Algebras*, Spring, New York, 1999.

[8] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Aplications, Seventh Edition*, Mc-Graw Hill, New York, 2012.

[9] A. B. Saeid, H. S. Kim, dan A. Rezaei, *On BI-algebras*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 25 (2017), 177 – 194.

[10] A. Walendziak, *On BF-algebras*, Mathematics Slovaca, 57 (2007), 119-128.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau