SIFAT-SIFAT *BM*-ALJABAR DAN HUBUNGANNYA DENGAN *BCI*-ALJABAR, ALJABAR *COXETER* DAN *BF*-ALJABAR

KARYA ILMIAH

OLEH

JEFRI KESINGER
NIM. 1703110624

PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS RIAU
PEKANBARU
2021

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak Cipta Milik Universitas Riau

SIFAT-SIFAT *BM*-ALJABAR DAN HUBUNGANNYA DENGAN *BCI*-ALJABAR, ALJABAR *COXETER* DAN *BF*-ALJABAR

Jefri Kesinger

Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

jefri.kesinger0537@student.unri.ac.id

ABSTRACT

This article discusses the properties of BM-algebra and the relationship of BM-algebra with BCI-algebra, BF-algebra and Coxeter algebra. Their relationship through the properties of BM-algebra related to the properties of BCI-algebra, BF-algebra and Coxeter algebra.

Keywords: BM-algebra, BCI-algebra, BF-algebra, Coxeter algebra

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang sifat-sifat BM-aljabar serta hubungan BM-aljabar dengan BCI-aljabar, BF-aljabar, dan aljabar *Coxeter*. Hubungan tersebut melalui sifat-sifat yang dimiliki oleh BM-aljabar yang berkaitan dengan sifat-sifat yang dimiliki juga oleh BCI-aljabar, BF-aljabar dan aljabar *Coxeter*.

Kata kunci: BM-aljabar, BCI-aljabar, BF-aljabar, Aljabar *Coxeter*.

1. PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu dasar yang dapat digunakan sebagai alat bantu dalam berbagai bidang ilmu dan terus di kembangkan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan lainnya. dalam ilmu matematika terdapat berbagai cabang pembagian ilmu salah satunya adalah struktur aljabar.

Struktur aljabar adalah salah satu cabang dalam bidang ilmu matematika murni yang mempunyai konsep dasar himpunan, pemetaan, dan operasi biner. Himpunan adalah suatu kumpulan objek, dengan syarat keanggotaan tertentu. Objek-objek di dalam himpunan disebut elemen himpunan dan himpunan dinotasikan dengan huruf kapital. Dalam Gilbert dan Gilbert [1, h. 137] dijelaskan bahwa suatu struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang memiliki paling sedikit satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Repository Universitas Riau https://repository.unri.ac.id/
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
©Hak cipta milik Universitas Riau

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan himpunan yang tak kosong dengan satu atau lebih operasi dan memenuhi aksioma-aksioma yang terkait. Di dalam aljabar abstrak di kaji tentang konsep-konsep struktur aljabar dan sifat-sifatnya. Pada perkembangan aljabar abstrak ditemukan aljabar-aljabar baru .

Imai dan Iseki [2] memperkenalkan dua kelas dari aljabar abstrak, yaitu BCK-aljabar dan BCI-aljabar. BCK-aljabar merupakan subkelas dari BCI-aljabar. Neggers dan Kim [6] memperkenalkan gagasan B-aljabar yang memenuhi aksioma (i) $x*x=0$, (ii) $x*0=x$, (iii)$(x*y)*z=x*(z*(0*y))$ untuk setiap $x,y,z\in X$. Kim dan Kim [3] mengkonstruksikan struktur aljabar baru dengan mengambil beberapa sifat dari BCI dan B-aljabar yang dinamakan BG-aljabar. Kemudian mendefinisikan BG-aljabar yang merupakan generalisasi dari B-aljabar. Walendziak [10] menunjukkan bahwa BG-aljabar merupakan generalisasi dari BF-aljabar dan juga menunjukkan bahwa BG-aljabar merupakan spesialisasi dari BH-aljabar.

Adapun struktur penulisan artikel ini adalah di bagian dua dibahas kajian teori, di bagian ketiga dibahas sifat-sifat BM-aljabar, kemudian di bagian keempat dibahas hubungan BM-aljabar dengan BCI-aljabar. Selanjutnya pada bagian kelima dibahas hubungan BM-aljabar dengan aljabar Coxeter dan di bagian keenam dibahas hubungan BM-aljabar dengan BF-aljabar.

2. KAJIAN TEORI

Pada bagian ini dibahas B-aljabar, BM-aljabar, BCI-aljabar, Aljabar *Coxeter*, BF-aljabar dan Aljabar *Medial* sebagai berikut.

Definisi 1 [6] B-aljabar adalah himpunan tak kosong A dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma berikut:

(B1) $x*x=0$,

(B2) $x*0=x$,

(B) $(x*y)*z=x*(z*(0*y))$, untuk setiap $x,y,z\in A$.

Definisi 2 [4] BM-aljabar adalah aljabar $(A;*,0)$ dari himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi $(B2)$ dan memenuhi aksioma berikut:

(BM) $(x*y)*(x*z)\ =z*y$, untuk setiap $x,y,z\in A$

Teorema 3 Setiap BM-aljabar adalah B-aljabar.

Bukti Teorema 3 dapat dilihat dalam [4]. □

Definisi 4 [5] Suatu aljabar $(A;*,0)$ dikatakan BCI-aljabar jika memenuhi $(B2)$ dan aksima berikut:

Repository Universitas Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
© Hak cipta milik Universitas Riau

(BH) $x * y = y * x = 0 \rightarrow x = y$

(BCI) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$, untuk setiap $x, y \in A$.

Definisi 5 [8] menjelaskan suatu BCI-aljabar $(A; *, 0)$ dikatakan $iBCI$-aljabar jika A memenuhi:

$(iBCI)$ $x * (x * y) = (y * (y * x)) * (x * y)$, untuk setiap $x, y \in A$.

Definisi 6 [7] Aljabar *Coxeter* adalah himpunan tak kosong A dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ memenuhi $(B1)$, $(B2)$ dan aksioma berikut:

(C) $(x * y) * z = x * (y * z)$, untuk setiap $x, y, z \in A$.

Definisi 7 [10] BF-aljabar adalah himpunan tak kosong A dengan konstanta 0 dan operasi biner " $*$ " yang memenuhi $(B1)$, $(B2)$ dan aksioma berikut:

(BF) $0 * (x * y) = y * x$, untuk setiap $x, y, \in A$.

Definisi 8 [9] Sebuah aljabar $(A; *, 0)$ disebut memenuhi kondisi *medial* jika memenuhi $(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$, untuk setiap $x, y, z, u \in A$.

3. SIFAT-SIFAT BM-ALJABAR

Selanjutnya pada bagian ini dibahas sifat-sifat BM-aljabar sebagai berikut.

Proposisi 9 Jika $(A, *, 0)$ adalah BM-aljabar, maka

(a) $x * x = 0$,

(b) $0 * (0 * x) = x$,

(c) $0 * (x * y) = y * x$,

(d) $(x * z) * (y * z) = x * y$, untuk setiap $x, y, z \in A$

Bukti.

(a) Jika $y = 0$ dan $z = 0$ pada Definisi 2 sifat (BM) maka diperoleh

$$(x * 0) * (x * 0) = 0 * 0, \tag{1}$$

kemudian, dengan menggunakan Definisi 1 sifat $(B2)$ pada persamaan (1) diperoleh

$$x * x = 0.$$

Jadi terbukti bahwa $x * x = 0$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak Cipta Milik Universitas Riau

(b) Jika $x = 0$ dan $y = 0$ pada Definisi 2 sifat (BM) maka diperoleh

$$(0 * 0) * (0 * z) = z * 0, \tag{2}$$

kemudian, dengan menggunakan Definisi 1 sifat $(B2)$ pada persamaan (2) diperoleh

$$0 * (0 * z) = z.$$

Jadi terbukti bahwa $0 * (0 * x) = x$.

(c) Jika $x = y$ pada Definisi 2 sifat (BM) maka diperoleh

$$(y * y) * (y * z) = z * y, \tag{3}$$

kemudian dengan menggunakan Proposisi 9 poin (a) pada persamaan (3) diperoleh

$$0 * (y * z) = z * y,$$

Jadi terbukti bahwa $0 * (x * y) = y * x$.

(d) Dengan menggunakan Proposisi 9 poin (c) dan Definisi 2, ditunjukkan dari ruas kiri pada Proposisi 9 poin (d) diperoleh

$$\begin{aligned}
(x * z) * (y * z) &= (0 * (z * x)) * (0 * (z * y)), && \text{[Proposisi 3.1 poin (c)]}\\
&= (z * y) * (z * x), && \text{[(BM)]}\\
(x * z) * (y * z) &= x * y. && \text{[(BM)]}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x * z) * (y * z) = x * y$. □

Teorema 10 Jika $(A, *, 0)$ adalah BM-aljabar, maka

(a) $x * (x * y) = y$,

(b) $x * y = 0 \Rightarrow x = y$,

(c) $(x * y) * z = (x * z) * y$,

(d) $x * (y * z) = z * (y * x)$,

(e) $(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$,

(f) $(x * y) * (0 * y) = x$,

untuk setiap $x, y, z, u \in A$.

Bukti.

(a) Dengan menggunakan Definisi 1 sifat (B2) dan Definisi 2 diperoleh

$$\begin{aligned} x * (x * y) &= (x * 0) * (x * y), && [(B2)] \\ &= y * 0, && [(BM)] \\ x * (x * y) &= y. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x * (x * y) = y$.

(b) Misalkan $x * y = 0$, dengan menggunakan Definisi 1 sifat (B2) dan Definisi 2 diperoleh

$$\begin{aligned} x &= x * 0, && [(B2)] \\ &= x * (x * y), && [\text{karna } x * y = 0] \\ &= (x * 0) * (x * y), && [(B2)] \\ &= y * 0, && [(BM)] \\ x &= y. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $x * y = 0$ maka $x = y$.

(c) Dengan menggunakan Teorema 3 dan Proposisi 9 poin (c) ditunjukkan dari ruas kiri pada Teorema 10 poin (c) diperoleh

$$\begin{aligned} (x * y) * z =& [(z * y) * (z * x)] * z, && [(BM)] \\ =& (z * y) * [z * (0 * (z * x))], && [(B)] \\ =& [0 * (z * x)] * y, && [(BM)] \\ (x * y) * z =& (x * z) * y. && [\text{Proposisi 9 poin (c)}] \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x * y) * z = (x * z) * y$.

(d) Dengan menggunakan Teorema 10 poin (a) dan poin (c) diperoleh

$$\begin{aligned} (x * y) * z =& (y * (y * x)) * (y * z), && [\text{Teorema 10.a}] \\ =& (y * (y * z)) * (y * x), && [\text{Teorema 10.c}] \\ (x * y) * z =& z * (y * x). && [\text{Teorema 10.a}] \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x * y) * z = z * (y * x)$.

(e) Dengan menggunakan Teorema 10 poin (d) diperoleh

$$\begin{aligned} (x * y) * (z * u) =& u * (z * (x * y)), && [\text{Teorema 10.d}] \\ =& u * (y * (x * z)), && [\text{Teorema 10.d}] \\ (x * y) * (z * u) =& (x * z) * (y * u). && [\text{Teorema 10.d}] \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$.

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

(f) Dengan menggunakan Teorema 10 poin (e), Definisi 1 sifat (B2) dan Proposisi 9 poin (a) diperoleh

$$\begin{aligned}(x*y)*(0*y) &= (x*0)*(y*y), && \text{[Teorema 10.e]}\\ &= x*0, && \text{[(B2),Proposisi 9.a]}\\ (x*y)*(0*y) &= x. && \text{[(B2)]}\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(x*y)*(0*y) = x$. □

4. HUBUNGAN *BM*-ALJABAR DENGAN *BCI*-ALJABAR

Pada bagian ini dibahas sifat BM-aljabar yang juga dimiliki oleh BCI-aljabar.

Proposisi 11 Setiap BM-aljabar adalah $iBCI$-aljabar.

Bukti. Dengan menggunakan Teorema 10 poin a, ditunjukkan BM-aljabar adalah $iBCI$-aljabar.

$$x*(x*y) = (y*(y*x))*(x*y) \qquad \text{[Teorema 10.a]}$$

Jadi terbukti bahwa setiap BM-aljabar adalah $iBCI$-aljabar. □

5. HUBUNGAN *BM*-ALJABAR DENGAN ALJABAR *COXETER*

Pada bagian ini dibahas beberapa sifat aljabar *coxeter* dan hubungan BM-aljabar dengan aljabar *coxeter*.

Proposisi 12 Jika $(A;*,0)$ adalah aljabar *coxeter* maka $(A;*,0)$ memenuhi sifat berikut:

a. $0*x = x$

b. $x*y = y*x$, untuk setiap $x, y \in A$.

Bukti.

(a) Dengan menggunakan Definisi 6 untuk setiap $x \in A$ diperoleh

$$\begin{aligned}x &= x*0,\\ &= x*(x*x),\\ &= (x*x)*x,\\ x &= 0*x \qquad .\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $0*x = x$.

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Hak cipta milik Universitas Riau

(b) Dengan menggunakan Proposisi 12 poin (a) dan Definisi 6 diperoleh

$$\begin{aligned} y &= 0 * y \\ &= [(x * y) * (x * y)] * y \\ &= (x * y) * [(x * y) * y] \\ &= (x * y) * [x * (y * y)] \\ &= (x * y) * (x * 0) \\ y &= (x * y) * x \end{aligned}$$

Kemudian dengan mengalikan x terhadap kedua ruas diperoleh

$$\begin{aligned} y * x &= [(x * y) * x] * x \\ &= (x * y) * (x * x) \\ y * x &= x * y. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x * y \ = y * x$.

Proposisi 13 Setiap aljabar *Coxeter* adalah BM-aljabar.

Bukti. Berdasarkan Definisi 6, aljabar *Coxeter* adalah memenuhi sifat $(B1), (B2)$ dan (C), kemudian berdasarkan Definisi 2 dan Proposisi 9 poin (a), BM-aljabar adalah memenuhi sifat $(B1), (B2)$ dan (BM).

Jadi terbukti bahwa setiap aljabar *coxeter* adalah BM-aljabar. □

6. HUBUNGAN *BM*-ALJABAR DENGAN *BF*-ALJABAR

Pada bagian ini dibahas hubungan BM-aljabar dengan BF-aljabar *medial*.

Teorema 14 BF-aljabar adalah medial jika dan hanya jika BF-aljabar adalah BM-aljabar.

Bukti. Misalkan $(A; *, 0)$ adalah BF-aljabar medial. Kemudian berdasarkan Teorema 10.e setiap BM-aljabar adalah memenuhi kondisi medial, artinya didalam BM-aljabar juga berlaku sifat medial, sehingga jika $(A; *, 0)$ BF-aljabar medial maka $(A; *, 0)$ adalah BM-aljabar.

Jadi terbukti bahwa BF-aljabar adalah medial jika dan hanya jika BF-aljabar adalah BM-aljabar. □

7. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah di kemukakan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa pada hubungan BM-aljabar dengan BCI-aljabar terdapat beberapa sifat seperti jika $(A; *, 0)BM$-aljabar maka $(A; *, 0)$ adalah $iBCI$-aljabar. BM-aljabar juga mempunyai hubungan dengan aljabar *Coxeter*. Kemudian hubungan

BM-aljabar dengan aljabar *Coxeter* juga terdapat beberapa sifat seperti jika $(A; *, 0)$ aljabar *Coxeter* maka $(A; *, 0)$ adalah BM-aljabar.

Selanjutnya pada hubungan BM-aljabar dengan BF-aljabar medial juga mempunyai beberapa sifat seperti $(A; *, 0)$ adalah BF-aljabar medial jika dan hanya jika BF-aljabar adalah BM-aljabar.

Ucapan terima kasih Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Sri Gemawati, M.Si. yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] L. Gilbert dan J. Gilbert, *Elements of Modern Algebra, Seventh Edition*, Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2009.

[2] Y. Imai dan K. Iseki, *On axiom system of propositional calculi*, Scientic Mathematics Japonica, 42 (1966), 19-22.

[3] C. B. Kim dan H. S. Kim, *On BG-algebras*, Demonstratio Mathematics, 41 (2008), 497-505.

[4] C. B. Kim dan H. S. Kim, *On BM-algebras*, Scientic Mathematics Japonica, 63 (2006), 215-221.

[5] H. S. Li, *An axiom system of BCI-algebras*, Mathematics Japonica, 30 (1985), 351-352.

[6] J. Neggers dan H. S. Kim, *On B-algebras*, Mathematics Vesnik, 54 (2002), 21-29.

[7] H. S. Kim, Y. H. Kim dan J. Neggers, *Coxeter algebras and pre-coxeter algebras in Samarandache setting*, Honam Mathematics Japonica, 26 (2004), 471-481.

[8] J. Meng dan X. L. Xin, *Implicative BCI-algebras*, Pure Application Mathematics, 8 (1992), 99-103.

[9] A. Walendziak, *BM-algebras and related topics*, Mathematics Slovaca, 64 (2014), 1075-1082.

[10] A. Walendziak, *On BF-algebras*, Mathematics Slovaca, 57 (2011), 119-128.

Repository Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
© Hak cipta milik Universitas Riau