PENAKSIR BAYES UNTUK PARAMETER DISTRIBUSI DAGUM MENGGUNAKAN ATURAN PRIOR *NON-INFORMATIF* DENGAN *K-LOSS FUNCTION* DAN *ENTROPY LOSS FUNCTION*

KARYA ILMIAH

OLEH

ASTI RALITA SARI
NIM. 1603137310

PROGRAM STUDI S1 STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS RIAU
PEKANBARU
2021

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak Cipta milik Universitas Riau

PENAKSIR BAYES UNTUK PARAMETER DISTRIBUSI DAGUM MENGGUNAKAN ATURAN PRIOR *NON-INFORMATIF* DENGAN *K-LOSS FUNCTION* DAN *ENTROPY LOSS FUNCTION*

Asti Ralita Sari, Haposan Sirait

Program Studi S1 Statistika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

asti.ralita7310@student.unri.ac.id

ABSTRACT

The parameter estimator discussed is the *p* parameter estimator of the Dagum distribution with the *k*-loss function and the entropy loss function using the Bayes method. To get the Bayes estimator from the scale parameter of the Dagum distribution, the Jeffrey's non-informative prior distribution is used based on the maximum likelihood function and the loss function for the *k*-loss function and the entropy loss function to obtain an efficient estimator. Determinant of the best estimator is done by comparing the variance values generated from each estimator. An estimator that uses the entropy loss function is the best method for estimating the parameters of the Dagum distribution of the data population with efficient conditions met.

Keywords: Parameter estimator, Dagum distribution, Bayes method, Jeffrey's prior, loss function

ABSTRAK

Penaksir parameter yang dibahas adalah penaksir parameter *p* dari distribusi Dagum dengan *k-loss function* dan *entropy loss function* dengan menggunakan metode Bayes. Untuk mendapatkan penaksir Bayes dari parameter skala distribusi Dagum digunakan distribusi prior *non-informatif* Jeffrey berdasarkan fungsi maksimum *likelihood* dan fungsi kerugian untuk *k-loss function* dan *entropy loss function* untuk mendapatkan penaksir yang efisien. Penentuan terbaik dilakukan dengan membandingkan nilai variansi yang dihasilkan dari masing-masing penaksir. Penaksir yang mengunakan *entropy loss function* adalah metode terbaik untuk mengestimasi parameter populasi yang berdistribusi Dagum dengan syarat efisien terpenuhi.

Kata kunci: Penaksir parameter, distribusi Dagum, metode Bayes, prior Jeffrey, fungsi kerugian

Repository Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
https://repository.unilak.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

1. PENDAHULUAN

Statistika inferensi adalah statistika yang digunakan untuk menaksir parameter suatu populasi melalui analisis data yang telah dikumpulkan dari populasi. Setelah diperoleh taksiran dari parameter, dilakukan pengambilan kesimpulan tentang populasi. Dua permasalahan yang penting dalam statistika inferensi adalah penaksiran dan pengujian hipotesis. Taksiran parameter dapat diperoleh dengan menggunakan dua metode, yaitu metode statistika frekuentis dan metode statistika Bayesian. Metode statistika yang biasa digunakan dalam menaksir parameter adalah metode momen, metode maksimum *likelihood* dan metode Bayes (Mood & McFarlane, 1974).

Ahmed. et al (2013) menjelaskan bahwa pada metode Bayes, parameter diperlakukan sebagai variabel random dan data ditetapkan. Parameter ini dipandang sebagai suatu variabel dan nilai-nilainya dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut distribusi prior. Prior dapat dibandingkan dari berbagai sisi, misalnya dari sisi kandungan informasi yang dibedakan menjadi prior *informatif* dan prior *non-informatif*. Distribusi prior *non-informatif* diantaranya berupa prior Jeffrey (Al-Noor et al, 2015). Berdasarkan teorema Bayes, fungsi likelihood dan distribusi prior digabungkan untuk membentuk distribusi posterior.

Bain & Englehardt (1992) menjelaskan bahwa dalam statistika Bayesian, jika fungsi kerugian yang digunakan merupakan *k-loss function* dan *entropy loss function* penaksir Bayes diperoleh sebagai ekspektasi dari distribusi posterior. Kriteria evaluasi penaksir ada dua macam yaitu bias dan tak bias. Apabila penaksir tersebut tak bias, maka penaksir yang efisien adalah penaksir yang memiliki variansi minimum dan apabila penaksir tersebut bias, maka penaksir yang efisien adalah penaksir yang memiliki *mean squared error* minimum disingkat dengan MSE (Jan & Norstrom, 1996). Cara untuk menentukan penaksir yang efisien melalui efisiensi relatif (Ramachandra & Tsokos, 2020).

Distribusi Dagum diusulkan oleh Camilo Dagum pada 1970-an. Distribusi ini sering dipakai untuk menjelaskan distribusi pendapatan, aktuaria, meteorologi serta untuk analisis survival. Distribusi Dagum merupakan kasus khusus dari Distribusi *Generalized Beta II* dengan parameter *(a,b,p)* atau parameter pada Distribusi *Generalized Beta II* yaitu $q = 1$ (Naqash et al, 2017). Pada penelitian ini dibahas untuk dibandingkan penaksir parameter skala distribusi Dagum dengan menggunakan aturan *non-informatif* prior dan fungsi kerugian *k-loss function* dan *entropy loss function*.

2. METODE BAYES UNTUK DISTRIBUSI DAGUM

Definisi 2.1 [Bain & Englehardt, 1992] Fungsi *likelihood* merupakan fungsi kepadatan peluang bersama dari n variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ dan dinyatakan dalam bentuk $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ ditetapkan, maka fungsi *likelihood* adalah fungsi parameter θ dan dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ menyatakan suatu sampel random dari $f(x; \theta)$, maka

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta),$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta). \tag{1}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

Definisi 2.2 [Bain & Englehardt, 1992] Misalkan X merupakan variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f_X(x)$, dan misalkan $Y = u(X)$ adalah transformasi satu-satu dari $A = \{x | f_X(x) > 0\}$ pada $B = \{y | f_Y(y) > 0\}$ dengan invers $x = w(y)$. Jika turunan $\frac{d}{dy} w(y)$ kontinu dan tidak 0 pada B, maka fungsi densitas Y adalah

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \left| \frac{d}{dy} w(y) \right|, \qquad y \in B. \tag{2}$$

Suatu konsep yang penting dalam teori probabilitas adalah ekspektasi variabel random. Berikut diberikan konsep-konsep yang berhubungan dengan ekspektasi variabel random yang berupa definisi dan teorema.

Definisi 2.3 [Bain & Englehardt, 1992] Jika X adalah variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$, maka nilai ekspetasi dari X didefinisikan dengan,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{3}$$

Variansi dalam statistika digunakan untuk menghitung keragaman suatu kelompok data.

Definisi 2.4 [Ramachandra & Tsokos, 2020] Misalkan X variabel random, dengan $E(X) = \mu$. Variansi X yang dinotasikan dengan $\mathrm{Var}(X)$ dinyatakan sebagai,

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 \tag{4}$$

Distribusi Dagum merupakan bentuk khusus dari distribusi *Generalized* Beta dengan tiga parameter sehingga fungsi densitasnya dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x; a, b, p) = \begin{cases} \dfrac{ap\, x^{ap-1}}{b^{ap}[1 + (\frac{x}{a})^a]^{p+1}}, x > 0, a, b, p > 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , x \ lainnya. \end{cases} \tag{5}$$

Distribusi Dagum adalah distribusi gabungan dari distribusi gamma dan distribusi Weibull. Distribusi ini diperoleh dari distribusi *Generalized* Gamma (GG) yang parameter skalanya mengikuti distribusi Weibull (Naqash et al, 2017). Fungsi distribusi *generalized* Gamma dengan parameter a, p, dan θ sebagai berikut

$$f_{GG}(x) = \frac{a}{\theta^{a\,p}\,\Gamma(p)} x^{a\,p-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^a}, x > 0, (a, p, \theta) > 0 \cdot$$

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi teoritis variabel acak kontinu yang sering digunakan untuk menganalisis keandalan suatu produk. Sama seperti distribusi Gamma dan eksponensial yang menangani masalah keandalan, tetapi distribusi Weibull yang paling sering digunakan (Otaya, 2016). Fungsi distribusi Weibull dengan parameter a dan b adalah

$$f_{IW}(\theta) = \frac{a}{b^{a+1}} \left(\frac{b}{\theta}\right)^{a+1} e^{-\left(\frac{b}{\theta}\right)^a}; \theta > 0, a, b > 0 \cdot$$

Jadi, distribusi campuran yang dihasilkan dari x bersyarat θ untuk mendapatkan θ

$$f_D(x) = \int_0^{\infty} f_{GG}(x|\theta) f_{IW}(\theta) d\theta,$$

$$= \frac{a^2 b^a}{\Gamma(p)} x^{a\,p-1} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{a(p+1)+1}} e^{-(b^a+x^a)\frac{1}{\theta^a}} d\theta$$

$$f_D(x) = \frac{a\,p}{b^{a\,p}} x^{a\,p-1} \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{e^{-(p+1)}} . \tag{6}$$

Distribusi posterior diperoleh dengan mengkombinasikan informasi sampel dan informasi prior dengan menggunakan teorema Bayes yang selanjutnya digunakan dalam proses inferensi.

Definisi 2.5 [Mood & McFarlane, 1974] Suatu distribusi dari θ yang dinotasikan dengan $\pi(\theta)$ disebut distribusi prior, dan distribusi bersyarat dari θ jika diberikan $x = (x_1, \dots, x_2, \dots, x_n)$, dinotasikan dengan $\pi(\theta|x)$ disebut distribusi posterior dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut.

$$\pi(\theta|x) = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)\pi(\theta)}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)\pi(\theta)d\theta} . \tag{7}$$

Dari persamaan (7), misalkan $\frac{1}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)\pi(\theta)d\theta} = m$, yang merupakan konstanta agar posterior memenuhi syarat sebagai suatu distribusi. Berdasarkan Definisi 2.1 dapat di tulis menjadi,

$$\pi(\theta|x) = m\, L(\theta)\pi(\theta),$$

atau

$$\pi(\theta|x) \propto L(\theta)\pi(\theta), \tag{8}$$

dengan m adalah konstanta dan $I(\theta)$ adalah informasi Fisher yang didefinisikan

$$I(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right] . \tag{9}$$

Penaksir memberikan nilai yang berbeda dengan nilai parameter yang sedang di taksir, maka perlu untuk mempertimbangkan suatu kerugian yang merupakan fungsi dari perbedaan tersebut.

Fungsi kerugian terdiri atas *k-loss function* dan *entropy loss function*, yaitu:

1. *k-loss function (KLF)*

$$L(\hat{p}, p) = \frac{(\hat{p} - p)^2}{\hat{p}\,p} . \tag{10}$$

Parameter dari *k-loss function* pada persamaan (10) adalah

$$\hat{p}_{kl} = \sqrt{\frac{E(p)}{E\left(\frac{1}{p}\right)}} . \tag{11}$$

2. *Entorpy loss function*

Fungsi kerugian yang asimetri adalah kerugian entropy sebagai berikut:

$$L(\hat{p}, p) = \left(\frac{\hat{p}}{p}\right) - \log\left(\frac{\hat{p}}{p}\right) - 1 . \tag{12}$$

Repository Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
© Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository Universitas Riau https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau

Parameter dari *Entorpy Loss Function* pada persamaan (12) adalah

$$\hat{p}_{el} = \left[E\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{-1}. \tag{13}$$

3. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dalam bentuk simulasi data dengan *software* R-studio untuk memperoleh nilai taksiran dari parameter distribusi Dagum. Adapun tahapan-tahapan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

(a) Menentukan fungsi *likelihood*.
(b) Melakukan differensial fungsi *likelihood* berdasarkan distribusi Dagum.
(c) Menentukan distribusi prior dengan aturan prior Jeffrey.
(d) Menentukan distribusi posterior.
(e) Melakukan penaksir Bayes berdasarkan fungsi kerugian *k-loss function* dan *entropy loss function.*
(f) Menghitung variansi dari masing-masing parameter yang diperoleh dari parameter maksimum *likelihood*, fungsi kerugian *k-loss function* dan *entropy loss function*.
(g) Melakukan simulasi data dengan menggunakan RStudio serta membuat tabel dan gambar perbandingan nilai variansi dari metode Bayes.

4. PENAKSIR BAYES UNTUK PARAMETER DISTRIBUSI DAGUM MENGGUNAKAN ATURAN PRIOR *NON-INFORMATIF* DENGAN *K-LOSS FUNCTION* DAN *ENTROPY LOSS FUNCTION*

Distribusi Dagum merupakan salah satu distribusi kontinu yang fungsi kepadatan peluangnya dituliskan pada persamaan (5) dengan 3 parameter, yaitu a, p, dan b. *Fungsi likelihood* dari fungsi kepadatan peluang distribusi Dagum pada persamaan (6) diperoleh dengan memisalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel acak independen ukuran n, sehingga dengan menggunakan Definisi 2.1 yaitu

$$L(p) = \left(\frac{a\,p}{b^{a\,p}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{a\,p-1} \prod_{i=1}^{n}\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right]^{-(p+1)}. \tag{14}$$

Selanjutnya untuk menentukan penaksir, terlebih dahulu ditentukan fungsi $\ln(L(p))$ dari persamaan (14) dengan menggunakan persamaan $\ln(L(\theta)) = 0$, yaitu

$$\ln(L(p)) = n(\ln a + \ln p - a\,p \ln b) + (ap-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - (p+1)\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right]. \tag{15}$$

Penaksir $\hat{p}$ didapatkan berdasarkan fungsi maksimum *likelihood* diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(L(\theta)) = 0$. Berdasarkan pada persamaan(15), diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{n}{p} - n\,a \ln b + a \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right] = 0, \tag{16}$$

$$\frac{n}{p} + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^a\right] - \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{b}\right)^a = 0,$$

Repository Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
https://repository.unri.ac.id
© Hak Cipta milik Universitas Riau

$\hat{p}_{ml} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^{-a}\right]} = \frac{n}{T}$, dengan

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[1 + \left(\frac{x_i}{b}\right)^{-a}\right]. \tag{17}$$

Prior yang digunakan untuk menjelaskan parameter p dari distribusi Dagum adalah prior *non-informatif* Jeffrey yang diusulkan oleh Harold Jeffrey pada tahun 1946. Turunan pertama dari fungsi $\ln(L(p))$ pada persamaan (15), dapat ditulis sebagian:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{\partial}{\partial p}(n\, a \ln b) + \frac{\partial}{\partial p}\left(a \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)\frac{\partial}{\partial p}\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1 + \left(\frac{x_i}{n}\right)^{a}\right]. \tag{18}$$

Dengan demikian, turunan kedua dari persamaan (18) adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial p^2} = -\frac{n}{p^2}. \tag{19}$$

Selanjutnya ditentukan nilai ekspektasi dari persamaan (19) dengan menggunakan persamaan $I(p) = \pi(p) \propto [I(p)]^m$, untuk menentukan informasi Fisher

$$I(p) = -E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}\right),$$

$$= \frac{n}{p^2},$$

$$\pi(p) \propto \frac{1}{p^{2m}}; m > 0. \tag{20}$$

Persamaan (20) merupakan nilai *non-informatif* prior pada distribusi Dagum satu parameter. Dalam menentukan distribusi posterior diperlukan konsep mengenai distribusi bersama dan distribusi marginal. Misalkan $\pi(p|x)$ sebagai distribusi posterior yang dinyatakan pada persamaan (7). Misalkan $\prod_{i=1}^{n} f(p|\theta)\pi(\theta) = p(p|x)$ dan $\int f(p|\theta)\pi(\theta) = g(p|x)$. Berdasarkan persamaan (14) fungsi *likelihood* dan persamaan (20) dengan menggunakan persamaan (8) untuk mendapatkan posterior dari p posterior dapat diperoleh

$$p(p|x) \propto \pi(p) \times L(x,p) \tag{21}$$

Dari persamaan (14) fungsi *likelihood* dimana $L(x,p)$ merupakan fungsi *likelihood* distribusi Dagum satu parameter dan $\pi(p)$ merupakan nilai *non-informatif* prior pada distribusi Dagum satu parameter

$$p(p|x) \propto p^{-2m}\, p^{n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{b^{a\,p}} \prod_{i=1}^{n} \left[1 + \left(\frac{x_i}{b}\right)^{a}\right]^{-p},$$

sehingga diperoleh

$$p(p|x) \propto p^{-2m} p^{n} \left[e^{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{b}\right)^{ap}}\right]\left[e^{\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^{a}\right]^{-p}}\right],$$

$$p(p|x) \propto K p^{n-2m} e^{-p\,T}. \tag{22}$$

T merupakan persamaan (17) dan K adalah konstanta normal. Langkah selanjutnya adalah menetukan $g(p|x)$, dengan menggunakan persamaan (22), diperoleh

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
© Hak cipta milik Universitas Riau

$$g(p|x) = \int_0^\infty p(p|x),$$

dimana, $pT = x$

$dx = Tdp$

sehingga,

$$g(p|x) = \int_0^\infty K\left(\frac{x}{T}\right)^{n-2m} e^{-x}\frac{dx}{T},$$

$$g(p|x) = K\frac{\Gamma(\mathrm{n}-2\mathrm{m}+1)}{\mathrm{T}^{n-2m+1}}. \tag{23}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (22) dan persamaan (23) ke dalam distribusi posterior pada persamaan (7), diperoleh

$$\pi(p|x) = \frac{\mathrm{T}^{\mathrm{n}-2\mathrm{m}+1}}{\Gamma(n-2m+1)}p^{n-2m}e^{-pT}. \tag{24}$$

Persamaan (24) merupakan fungsi kepadatan peluang gamma dengan parameter T, dengan $\beta = n - 2m + 1$.

Penaksir Bayes menggunakan fungsi kerugian *k-loss function* dan *Entropy loss function*, *yaitu:*

(a) ***K-loss Function***

Parameter Bayes menggunakan *k-loss function* pada persamaan (10), serta menggunakan Definisi 2.3 sehingga di peroleh nilai $E(p|x)$

$$E(p|x) = \int_0^\infty p\,\pi * (p|x)dp,$$

$$E(p|x) = \int_0^\infty p\,\frac{T^\beta}{\Gamma\beta}\,p^{\beta-1}\,e^{-pT}dp,$$

$$E(p|x) = \frac{\beta}{T}.$$

Dengan nilai $E(p^{-1}|x)$

$$E(p^{-1}|x) = \int_0^\infty p^{-1}\,\frac{\mathrm{T}^\beta}{\Gamma\beta}\,p^{\beta-1}e^{-pT}dp,$$

$$= \frac{T^\beta}{\Gamma\beta}\int_0^\infty p^{\beta-2}\,e^{-pT}dp, \tag{25}$$

berdasarkan Definisi $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1}\,e^{-x}dx$ sehingga persamaan (25) dapat ditulis:

$$= \frac{T^\beta}{\Gamma\beta}\,\frac{\Gamma(\beta-1)}{T^{\beta-1}},$$

$$E(p^{-1}|x) = \frac{\mathrm{T}}{\beta-1}.$$

Selanjutnya, diperoleh parameter Bayes

$$\hat{p}_{kl} = \sqrt{\frac{E(p|x)}{E(p^{-1}|x)}} = \frac{\sqrt{\beta(\beta-1)}}{T}. \tag{26}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak Cipta Milik Universitas Riau

(b) *Entropy Loss Function*

Parameter Bayes menggunakan *entropy loss function* pada persamaan (16), sebagai berikut, dengan menggunakan Definisi 2.3 sehingga diperoleh ,

$$\left[E\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{-1} = \int_0^\infty p\,\pi * (p|x)dp,$$

$$= \left[\int_0^\infty p^{-1}\,\frac{\mathrm{T}^\beta}{\Gamma\beta}\,p^{\beta-1}e^{-pT}dp\right]^{-1}$$

$$\left[E\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{-1} = \frac{\beta-1}{T}\,.$$

Selanjutnya, parameter Bayes dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\hat{p}_{el} = \left[E\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{-1} = \frac{\beta-1}{T}\,. \tag{27}$$

Dalam menentukan perbandingan penaksir, langkah pertama adalah dengan menentukan ekspektasi dan variansi, dimana $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]$ merupakan fungsi yang diekspektasikan tak linier, maka perlu dilakukan metode transformasi. Variabel random X merupakan distribusi Dagum dengan parameter (b,a,p), sehingga T pada persamaan (17) berdistribusi gamma dengan parameter (n,p). $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]$. Selanjutnya dari Definisi 2.2, diperoleh invers $T = \ln\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]$, dengan menggunakan kalkulus $e^{\ln x} = x$ sehingga diperoleh

$$e^t = 1+\left(\frac{x}{b}\right)^{-a},$$

$$x = b\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}},$$

Turunan dari x adalah,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b}{a}\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}-1}e^t, \tag{28}$$

Selanjutnya untuk mentukan penaksir, sebelumnya dilakukan metode transformasi , dengan mensubtitusikan persamaan (15) dan persamaan (28) ke dalam Definisi 2.2 sehingga diperoleh,

$$g_T(t) = \frac{ap}{b^{a\,p}}\left(b\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}}\right)^{ap-1}\left[1+\left(\frac{b\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}}}{b}\right)^{a}\right]^{-(p+1)}\left|-\frac{b}{a}\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}-1}e^t\right|,$$

$$= \frac{ap}{b^{a\,p}}\left(b\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}}\right)^{ap-1}\left[1+(e^t-1)^{-1}\right]^{-(p+1)}\frac{b}{a}\,(e^t-1)^{-\frac{1}{a}-1}e^t,$$

$$g_T(t) = p\,e^{-pt}. \tag{29}$$

Dengan demikian dari persamaan (29) diperoleh,

$$g_T(t) = \frac{p^n}{\Gamma(n)}e^{-pt}t^{n-1}\,;\, t>0, p>0. \tag{30}$$

dari persamaan (30) diperoleh ekspektasi distribusi gamma, yaitu:

$$E(t^{-r}) = \frac{p^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-r-1}\, dt,$$

$$E(t^{-r}) = \frac{p^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-T} \left(\frac{T}{p}\right)^{n-r-1} \frac{dT}{p},$$

$$E(t^{-r}) = p^r \frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(n)}. \tag{31}$$

Jika $r = 1$, maka

$$E(t^{-1}) = \frac{p}{(n-1)}.$$

Jika $r = 2$, maka

$$E(t^{-2}) = \frac{p^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Dengan demikian $var(t^{-1}) = E(t^{-1})^2 - [E(t^{-1})]^2$

$$var(t^{-1}) = \frac{p^2}{(n-1)(n-2)}. \tag{32}$$

Selanjutnya untuk memperoleh variansi parameter $\hat{p}_{ml}$, $\hat{p}_{kl}$ $\hat{p}_{el}$ dicari menggunakan persamaan (32) yaitu,

$$E(\hat{p}_{ml}) = \frac{n}{T} \text{ maka } V(\hat{p}_{ml}) = \frac{n^2 p^2}{(n-1)\,(n-2)}. \tag{33}$$

$$E(\hat{p}_{kl}) = \frac{\sqrt{\beta(\beta-1)}}{T} \text{ maka } V(\hat{p}_{kl}) = \frac{\beta(\beta-1)p^2}{(n-1)\,(n-2)}. \tag{34}$$

$$E(\hat{p}_{el}) = \frac{\beta-1}{T} \text{ maka } V(\hat{p}_{el}) = \frac{(\beta-1)^2 p^2}{(n-1)\,(n-2)}. \tag{35}$$

Dengan menggunakan persamaan (33), persamaan (34) dan persamaan (35) diperoleh bahwa penaksir parameter yang lebih efisien dari penaksir parameter $\hat{p}_{el}$ jika

$$\hat{p}_{el} < \hat{p}_{kl} < \hat{p}_{ml}.$$

Selanjutnya untuk menentukan penaksir yang efisien diantara 3 penaksir tersebut perlu dilakukan efisiensi relatif. dari tiga penaksir $\hat{p}_{ml}$, $\hat{p}_{kl}$, $\hat{p}_{el}$.

Untuk kemungkinan bahwa penaksir parameter $\hat{p}_{kl}$ lebih efisiensi dari penaksir parameter $\hat{p}_{ml}$

$$e_1 = \frac{V(\hat{p}_{ml})}{V(\hat{p}_{kl})} = \frac{n^2 p^2}{(n-1)\,(n-2)} = \frac{n^2}{\beta(\beta-1)}.$$

Penaksir parameter $\hat{p}_{kl}$ lebih efisien dari penaksi parameter $\hat{p}_{ml}$.

Selanjutnya, untuk kemungkinan bahwa penaksir parameter $\hat{p}_{el}$ lebih efisiensi dari penaksir parameter $\hat{p}_{kl}$,

$$e_2 = \frac{V(\hat{p}_{kl})}{V(\hat{p}_{el})}, = \frac{\beta(\beta-1)p^2}{(n-1)\,(n-2)} = \frac{\beta}{(\beta-1)}.$$

Penaksir parameter $\hat{p}_{el}$ lebih efisien dari penaksi parameter $\hat{p}_{kl}$.

Repository University of Riau
https://repository.unri.ac.id
© Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Repository Universitas Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
© Hak cipta milik Universitas Riau

Selanjutnya, dengan dilakukan penaksir parameter $\hat{p}_{el}$ lebih efisiensi dari penaksir parameter $\hat{p}_{ml}$,

$$e_3 = \frac{V(\hat{p}_{el})}{V(\hat{p}_{ml})}, = \frac{(\beta-1)^2 p^2}{(n-1)\,(n-2)} = \frac{(\beta-1)^2}{n^2}.$$

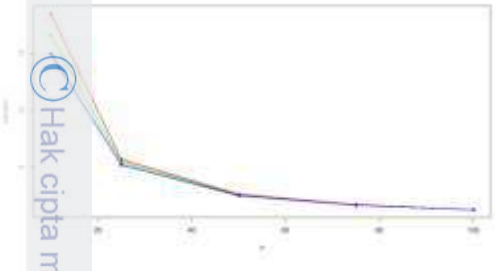
Penaksir parameter $\hat{p}_{el}$ lebih efisien dari penaksi parameter $\hat{p}_{ml}$.

Selanjutnya dilakukan simulasi data dengan menggunakan R-studio versi 3.4. Penaksir yang diperoleh menggunakan metode Bayes akan dibandingkan menggunakan simulasi. Simulasi data dilakukan dengan membangkitkan berbagai jenis kondisi data. Data yang diperoleh dianalisis untuk penaksir parameter menggunakan metode Bayes dari distribusi Dagum, yang melibatkan dua macam nilai parameter p dan lima macam ukuran sampel yaitu $n = 10, 25, 50, 75, 100$. Selanjutnya dihitung nilai variansi dengan nilai $p = 10.95$ dan $p = 6.29$ dan $m = 0{,}5$ sehingga diperoleh penaksir Bayes seperti yang di tunjukan pada Tabel 1.

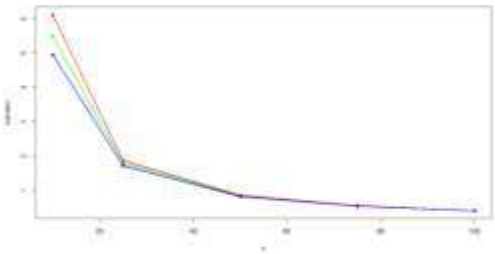
Tabel 1. Nilai variansi Parameter

Iterasi	$p = 10.95$			$p = 6.29$		
	$\hat{p}_{ml}$	$\hat{p}_{kl}$	$\hat{p}_{el}$	$\hat{p}_{ml}$	$\hat{p}_{kl}$	$\hat{p}_{el}$
10	18.50347	16.6531	14.9878	6.10557	5.49501	4.94551
25	5.65663	5.43036	5.21315	1.86651	1.79185	1.72017
50	2.60096	2.54894	2.49796	0.85824	0.84107	0.82425
75	1.68719	1.66469	1.6425	0.55672	0.54929	0.54197
100	1.24833	1.23585	1.22349	0.41191	0.40779	0.40371

Tabel 1 menunjukan hasil variansi dari parameter. Dapat dilihat bahwa untuk nilai p menghasilkan nilai efisiensi relatif yang lebih kecil untuk metode Bayes *Entropy loss function* dibandingkan maksimum *likelihood* dan *k-loss Function*. Hal ini terlihat jelas pada data yang ada pada Tabel 1 dan dapat dihasilkan grafik atau gambaran yang ada pada Gambar 1 dan 2



Gambar 1 Efisiensi relative $p = 10.95$.



Gambar 2 Efisiensi relative $p = 6.29$.

Gambar 1 dan Gambar 2 merupakan gambaran efisiensi relatif dari parameter $p = 10{,}95$ dan $p = 6.29$ Grafik tertinggi berwarna merah merupakan nilai maksimum *likelihood*, grafik hijau merupakan *k-loss function* dan grafik biru merupakan *entropy*

loss function. Dapat dilihat bahwa untuk nilai dari metode Bayes menunjukkan nilai variansi semakin kecil dengan ukuran sampel semakin besar. Nilai variansi pada metode Bayes dengan fungsi kerugian *entropy loss function* menunjukkan angka yang semakin kecil maka efisiensinya semakin relatif dibandingkan dengan maksimum *likelihood* dan fungsi kerugian *k-loss function.*

KESIMPULAN

Berdasarkan simulasi data menggunakan penaksir yang diperoleh dengan program R-studio, didapatkan dari nilai efesiensi relatif pada tabel hasil simulasi data menunjukkan jika kondisi ukuran sampel semakin besar maka variansi yang semakin kecil. Hasil perbandingan variansi pada metode bayes dengan menggunakan *entropy loss function* diperoleh angka lebih kecil dibandingkan dengan maksimum *likelihood* dan *k-loss function.* Sehingga metode terbaik untk penaksir paramete skala distribusi Dagum yaitu menggunakan *entropy loss function.*

DAFTAR PUSTAKA

Ahmed, A., Ahmad, S. P., & Reshi, J. A. (2013). *Bayesian analysis of Rayleigh distribution*. *International Journal of Scientific and Research Publications*, *3*(10), 1–9.

Al-Noor, Nadia, H., & Bawi., S. F. (2015). Bayes estimators for the parameter of the inverted exponential distribution under symmetric and asymmetric loss functions bayes. *Journal of Natural Sciences Research*, *5*(4), 45–52.

Bain, L. J., & Englehardt, M. (1992). *Introduction to probability and mathematical statistics*. Boston. MA: PWS–KENT.

Dagum, C. (2008). A new model of personal income distribution: specification and estimation. *Journal of Reliability and Statistical Studies*, *10*(1), 123–136.

Jan Gerhard, & Norstrom. (1996). The use of precautionary loss function in risk analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, *45*(3), 400–403.

Kleiber, C & Kotz, S. (2003). *Statistical size distribution in economics and actuarial sciences*. New Jersey: John Wiley and Sons.

Mood & McFarlane, A. (1974). *Introduction to the theory of statistics (3rd ed.)*. Washington: McGraw-Hill.

Naqash, S., Ahmad, S. P., & Ahmed, A. (2017). *Bayesian analysis of Dagum distribution*. *Journal of Reliability and Statistical Studies*, *10*(1), 123–136.

Otaya, L. G. (2016). Distribusi probabilitas Weibull dan aplikasinya. *Jurnal Manajemen Pendidikan Islam*, *4*(2), 44–66.

Ramachandra, K. M., & Tsokos, C. P. (2020). *Mathematical statistics with applications in R (3rd ed.)*. Tampa: Academic Press.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak Cipta milik Universitas Riau