DETERMINAN MATRIKS INTERVAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE CROUT YANG DIMODIFIKASI

KARYA ILMIAH

OLEH

RITA ASTATI
NIM. 1603122925

PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS RIAU
PEKANBARU
2020

DETERMINAN MATRIKS INTERVAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE CROUT YANG DIMODIFIKASI

Rita Astati

Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

ritaaastati@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the determinant of interval matrices using the modified Crout's method. The operation used is a combination of several arithmetic properties of the interval operations. The demonstration shows that the determinant of the interval matrix using this method has a shorter interval value than the existing methods. This article is a review of the writings of Nirmala and Ganesan [Journal of Physics, 1000 (2018), 1-11].

Keywords: Interval arithmetic, interval matrix, determinant, Crout's method

ABSTRAK

Artikel ini membahas determinan matriks interval dengan menggunakan metode Crout yang dimodifikasi. Sifat operasi yang dipakai merupakan gabungan dari beberapa sifat aritmatika operasi interval. Contoh demonstrasi menunjukkan bahwa nilai determinan matriks interval menggunakan metode ini mempunyai nilai interval yang lebih pendek dari pada metode yang telah ada. Artikel ini merupakan review dari tulisan Nirmala dan Ganesan [Journal of Physics, 1000 (2018), 1-11].

Kata kunci: Aritmatika interval, matriks interval, determinan, metode Crout

1. PENDAHULUAN

Ketidakpastian saat melakukan suatu perhitungan dalam kehidupan sehari-hari merupakan suatu hal yang tidak dapat dihindari. Ketidakpastian ini bisa disebabkan pengukuran yang tidak akurat atau kesalahan dalam komputasi. Penggunaan bilangan interval dalam perhitungan dapat menjadi salah satu solusi yang mungkin untuk digunakan agar memperoleh hasil yang lebih baik.

Interval merupakan suatu himpunan bagian dari bilangan real berupa pasangan berurut yang memenuhi pertidaksamaan tertentu. Goldsztejn dan Chabert [5] menyatakan bahwa $\underline{I(\mathbb{R})} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2] : a_1 \leq a_2$ dan $a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ adalah interval wajar (*proper*) dan $\overline{I(\mathbb{R})} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2] : a_1 > a_2$ dan $a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ adalah interval tak wajar (*improper*). Gabungan keduanya disebut degenerasi interval yaitu $I(\mathbb{R}) \cup \overline{I(\mathbb{R})} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2] : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ jika $a_1 = a_2 = a$ maka $\tilde{a} = [a, a]$ dengan a adalah bilangan real. Titik tengah (*mid-point*) dan radius (*half-width*) dari bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ didefinisikan dalam [8] yaitu $m(\tilde{a}) = (a_1 + a_2)/2$ dan $w(\tilde{a}) = (a_2 - a_1)/2$.

Analisis interval yang diterapkan dalam bentuk matriks berupa matriks interval. Matriks sering muncul sebagai tabel data numerik yang muncul dari pengamatan fisik, tetapi juga muncul dalam berbagai konteks matematika [2, h. 1]. Perhitungan matriks dapat digunakan untuk mencari solusi suatu sistem persamaan linear, determinan matriks, dan juga invers matriks. Menentukan determinan matriks merupakan hal yang sangat penting dalam menyelesaikan permasalahan suatu matriks. Banyak cara yang bisa digunakan untuk menentukan determinan seperti metode Sarrus, reduksi baris, metode ekspansi kofaktor, metode Chio, dan dengan menggunakan dekomposisi-LU.

Dekomposisi-LU adalah pemfaktoran matriks koefisien menjadi dua buah matriks, yaitu matriks segitiga bawah (*lower triangular*) yang biasa disebut dengan matriks $\boldsymbol{L}$ dan matriks segitiga atas (*upper triangular*) yang disebut dengan matriks $\boldsymbol{U}$ yang memenuhi $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$. Dalam mendekomposisi suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah $\boldsymbol{L}$ dan atau matriks segitiga atas $\boldsymbol{U}$ dapat menggunakan metode Doolittle, metode Cholesky, dan metode Crout. Metode Crout digunakan dalam mendekomposisi suatu matriks untuk memperoleh elemen diagonal utama matriks segitiga atas $\boldsymbol{U}$ bernilai satu dan elemen lainnya bernilai bebas.

Artikel ini menjelaskan tentang determinan matriks interval dengan menggunakan metode Crout yang telah dimodifikasi pada dekomposisi-LU dalam [9] dengan melakukan penggabungan aritmatika interval untuk memperoleh nilai interval yang lebih pendek. Pada Bagian 2 dijelaskan aritmatika interval yang digunakan. Kemudian pada Bagian 3 yaitu menentukan determinan matriks interval dengan metode Crout yang dimodifikasi. Bagian 4 merupakan penutup berupa kesimpulan pembahasan.

2. OPERASI ARITMATIKA INTERVAL

Pada bagian ini dibahas operasi aritmatika yang digunakan dalam perhitungan determinan matriks interval. Operasi aritmatika interval yang digunakan untuk menentukan determinan matriks interval dengan menggunakan metode Crout yang dimodifikasi adalah penggabungan dari aritmatika interval dan artimatika interval baru pada operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian serta perkalian skalar dari penulis yang berbeda. Aritmatika yang digunakan adalah sebagai berikut:

(i) Penjumlahan menggunakan aritmatika interval yang dikemukakan dalam [1], [3], [6], [7], dan [10], yaitu

$$\tilde{a} + \tilde{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

(ii) Pengurangan menggunakan aritmatika interval baru yang dikemukakan dalam [10], yaitu

$$\tilde{a} \ominus \tilde{b} = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2].$$

(iii) Perkalian menggunakan aritmatika interval baru yang dikemukakan dalam [4], [8], [9], dan [11], dengan menghitung titik tengah (*mid-point*) sebagai berikut:

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = [a_1, a_2][b_1, b_2] = [(m(\tilde{a})m(\tilde{b})) - k, (m(\tilde{a})m(\tilde{b})) + k],$$

dengan $k = \min\{(m(\tilde{a})m(\tilde{b})) - \alpha, \beta - (m(\tilde{a})m(\tilde{b}))\}$,
$\alpha = \min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$, dan $\beta = \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$.

(iv) Pembagian menggunakan aritmatika interval baru yang dikemukakan dalam [10], yaitu

$$\tilde{a} \oslash \tilde{b} = \begin{cases} [-\infty, \infty] & a_1 = a_2 = 0, b_1 = b_2 = 0, \\ [0, 0] & a_1 = a_2 = 0, (b_1 \neq 0 \text{ atau } b_2 \neq 0), \\ undefined & (\exists x \neq 0, x \in \tilde{a}), b_1 = b_2 = 0, \\ undefined & (0 \notin \tilde{a}, 0 \in \tilde{b}), \\ \left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right] & a_1 \geq 0, b_1 > 0, \\ \left[0, \frac{a_2}{b_2}\right] & a_1 = 0, b_1 = 0, \\ \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_2}\right] & a_1 \leq 0 \leq a_2, b_1 \geq 0, \\ \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right] & a_2 \leq 0, b_1 > 0, \\ \left[\frac{a_1}{b_2}, 0\right] & a_2 = 0, b_1 = 0, \\ \tilde{a} \oslash (-\tilde{b}) & b_2 \leq 0, \\ \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_2}\right] & a_1 \geq 0, b_1 < 0 < b_2, \\ \left[\max\left\{\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right\}, \min\left\{\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right\}\right] & a_1 \leq 0 \leq a_2, b_1 < 0 < b_2, \\ \left[\frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_1}\right] & a_2 \leq 0, b_1 < 0 < b_2. \end{cases} \quad (1)$$

(v) Perkalian skalar yang dikemukakan dalam [4], [8], [9], dan [11], yaitu

$$\lambda\tilde{a} = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], & \text{untuk } \lambda \geq 0, \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], & \text{untuk } \lambda < 0, \end{cases}$$

dengan λ merupakan skalar bilangan real.

Selanjutnya kasus khusus jika salah satu intervalnya bernilai $\tilde{0} = [0,0]$, misalkan diberikan dua buah bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ dan $\tilde{b} = [0,0]$, maka diperoleh

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = [0,0]. \tag{2}$$

Kemudian dibahas untuk sebarang interval $\tilde{a}$ ditunjukkan bahwa $\tilde{a}/\tilde{a} = \tilde{1} = [1,1]$ dengan menggunakan persamaan (1) dalam beberapa kasus, yaitu

Kasus 1, misalkan diberikan bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ dengan $a_1 \geq 0$, maka diperoleh

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{[a_1, a_2]}{[a_1, a_2]} = \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}\right] = [1,1].$$

Kasus 2, misalkan diberikan bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ dengan $a_1 \leq 0 \leq a_2$, maka diperoleh

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{[a_1, a_2]}{[a_1, a_2]} = \left[\max\left\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_1}\right\}, \min\left\{\frac{a_2}{a_2}, \frac{a_1}{a_1}\right\}\right],$$

karena a_1 bernilai negatif, maka untuk batas kiri interval yaitu $\max\{a_1/a_2, a_2/a_1\}$ bernilai negatif dan tak bernilai 1 sehingga $[\max\{a_1/a_2, a_2/a_1\}, \min\{a_2/a_2, a_1/a_1\}] \neq [1,1]$.

Kasus 3, misalkan diberikan bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ dengan $a_1 = 0$, maka diperoleh

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{[0, a_2]}{[0, a_2]} = \left[0, \frac{a_2}{a_2}\right] = [0,1] \neq [1,1].$$

Kasus 4, misalkan diberikan bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ dengan $a_2 = 0$, maka diperoleh

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \tilde{a} \oslash (-\tilde{a}) = \frac{[a_1, a_2]}{[a_2, a_1]} = \frac{[a_1, 0]}{[0, a_1]},$$

selanjutnya diperoleh

$$\frac{[a_1, 0]}{[0, a_1]} = \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{0}{a_1}\right],$$

karena a_1 pada interval $[a_1, 0]$ bernilai negatif, maka untuk batas kiri interval yaitu

$a_1/a_1 = 1$ dan $0/a_1 = 0$ sehingga $[a_1/a_1, 0/a_1] = [-1, 0] \neq [1, 1]$.

Kasus 5, misalkan diberikan bilangan interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ dengan $a_2 \leq 0$, maka diperoleh

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \tilde{a} \oslash (-\tilde{a}) = \frac{[a_1, a_2]}{[a_2, a_1]},$$

selanjutnya diperoleh

$$\frac{[a_1, a_2]}{[a_2, a_1]} = \left[\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_1}\right],$$

karena interval $[a_1, a_2]$ bernilai negatif dan $[a_2, a_1]$ bernilai positif, maka $a_1/a_2 < 0$ dan $a_2/a_1 < 0$ sehingga $[a_1/a_2, a_2/a_1] \neq [1, 1]$.

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $\tilde{a}/\tilde{a} = \tilde{1} = [1, 1]$ hanya jika $a_1 \geq 0$ atau interval bernilai positif.

3. DETERMINAN MATRIKS INTERVAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE CROUT YANG DIMODIFIKASI

Algoritma metode Crout yang telah dimodifikasi dalam Nirmala dan Ganesan [9] adalah sebagai berikut:
Misalkan $\tilde{\boldsymbol{A}}$ matriks interval berukuran 4×4, sedemikian hingga

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}},$$

dengan

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & \tilde{0} \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix},$$

dan

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} & \tilde{u}_{14} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{34} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Langkah 1
Jadikan unsur $\tilde{a}_{11}$ bernilai $\tilde{1} = [1, 1]$ dengan mengalikan baris pertama matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dengan $1 \oslash \tilde{a}_{11}$,

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{a}_{11}}{\tilde{a}_{11}} = \tilde{1} & \frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{14}}{\tilde{a}_{11}} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Langkah 2
Kolom pertama matriks $\tilde{\boldsymbol{L}} = (\tilde{l}_{ij})$ dibawah $\tilde{a}_{11} = \tilde{1}$ tetap seperti matriks pada persamaan (3), yaitu $\tilde{l}_{i1} = \tilde{a}_{i1}$, untuk $i = 2, 3, 4$

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{l}_{22} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix}.$$

Langkah 3
Baris pertama matriks $\tilde{\boldsymbol{U}} = (\tilde{u}_{ij})$ setelah $\tilde{a}_{11} = \tilde{1}$ tetap seperti matriks pada persamaan (3), yaitu $\tilde{u}_{1j} = \tilde{a}_{1j}$, untuk $j = 2, 3, 4$

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{14}}{\tilde{a}_{11}} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{34} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Langkah 4
Elemen diagonal matriks $\tilde{\boldsymbol{U}} = (\tilde{u}_{ij})$ tetap satu satuan, yaitu $\tilde{u}_{ii} = \tilde{1}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{14}}{\tilde{a}_{11}} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{34} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix},$$

sehingga diperolehlah hasil modifikasi dekomposisi matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$ sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{a}_{11}}{\tilde{a}_{11}} = \tilde{1} & \frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{14}}{\tilde{a}_{11}} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{l}_{22} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{11}} & \frac{\tilde{a}_{14}}{\tilde{a}_{11}} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{u}_{34} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Langkah 5
Hitung nilai yang tidak diketahui dari matriks $\tilde{\boldsymbol{L}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{U}}$ dengan memanfaatkan bahwa hasil yang diperoleh harus memenuhi $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$.

Selanjutnya diakhir faktorisasi dikalikan kembali baris pertama matriks $\tilde{\boldsymbol{L}}$ yang diperoleh dengan $\tilde{a}_{11}$ sehingga

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{l}_{22} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & \tilde{0} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix}.$$

Catatan: Unsur $\tilde{a_{11}}$ pada matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dapat diubah menjadi $[1,1]$ jika $\tilde{a_{11}} \geq 0$ atau bernilai positif.

Kemudian dengan menggunakan Teorema 1 dapat ditentukan determinan dari matriks interval.

Teorema 1 Jika $\tilde{\boldsymbol{A}}_{n\times n}$ adalah matriks interval segitiga atas atau segitiga bawah, maka $\det(\tilde{A})$ ekuivalen dengan perkalian elemen-elemen dalam diagonal utamanya.

Bukti. Misalkan $\tilde{\boldsymbol{A}}_{n\times n}$ matriks segitiga atas.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{0}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0}_{n1} & \tilde{0}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \underline{a}_{12}] & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \underline{a}_{1n}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \underline{a}_{22}] & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \underline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \underline{a}_{nn}] \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari $\tilde{\boldsymbol{A}}_{n\times n}$, akan diperoleh hasil dari $\det(\tilde{\boldsymbol{A}})$ dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}) =& [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] \begin{vmatrix} [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}] & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] & \cdots & [\underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{vmatrix} \\ & - [0,0] \begin{vmatrix} [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}] & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] & \cdots & [\underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{vmatrix} \\ & + \cdots - \cdots + [0,0](-1)^{1+n} \begin{vmatrix} [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}] & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}] & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n})] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{(n-1)n}, \overline{a}_{(n-1)n}] \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kemudian, dengan menggunakan persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\boldsymbol{A}}) =& [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] \Big([\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}][\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] \cdots [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \Big) - [0,0] \\ & + \cdots - \cdots + [0,0], \\ \det(\tilde{\mathbf{A}}) =& [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}][\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}][\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] \cdots [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]. \end{aligned}$$

Oleh karena $[\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}][\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}][\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}] \cdots [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]$ adalah hasil kali dari entri diagonal utama matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$, maka terbukti bahwa $\det(\tilde{\boldsymbol{A}})$ sama dengan hasil kali unsur-unsur dalam diagonal utamanya. Jika $\tilde{\boldsymbol{A}}$ matriks interval segitiga bawah, maka teorema dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Contoh 1 Gunakan metode Crout yang dimodifikasi untuk menentukan determinan matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dengan

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} [9,11] & [-1,1] & [-1,1] \\ [-11,11] & [8,12] & [-2,2] \\ [-11,11] & [-12,12] & [7,13] \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Kalikan baris pertama matriks interval (4) dengan $1 \oslash [9,11]$, sehingga diperoleh

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{[9,11]}{[9,11]} & \frac{[-1,1]}{[9,11]} & \frac{[-1,1]}{[9,11]} \\ [-11,11] & [8,12] & [-2,2] \\ [-11,11] & [-12,12] & [7,13] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [1,1] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ [-11,11] & [8,12] & [-2,2] \\ [-11,11] & [-12,12] & [7,13] \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [-11,11] & \tilde{l}_{22} & [0,0] \\ [-11,11] & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan beberapa iterasi diperoleh hasil, yaitu

Iterasi 1

$$l_{11} = [1,1]\,,\ l_{21} = [-11,11]\,,\ l_{31} = [-11,11]\,.$$

Iterasi 2

$$u_{12} = \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right],\ u_{13} = \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right].$$

Iterasi 3

$$l_{22} = [9,11]\,,\ l_{32} = [-11,11]\,.$$

Iterasi 4

$$u_{23} = \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right].$$

Iterasi 5

$$l_{33} = [9, 11] \,.$$

Diperoleh matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$ sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [-11,11] & [9,11] & [0,0] \\ [-11,11] & [-11,11] & [9,11] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ [0,0] & [1,1] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya kalikan baris pertama matriks $\tilde{\boldsymbol{L}}$ yang diperoleh dengan $[9, 11]$, sehingga diperoleh matriks $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$ sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} [9,11] & [0,0] & [0,0] \\ [-11,11] & [9,11] & [0,0] \\ [-11,11] & [-11,11] & [9,11] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ [0,0] & [1,1] & \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan dengan Teorema 1, determinan dari matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$ adalah perkalian dari hasil kali diagonal utama matriks interval segitiga bawah $\tilde{\boldsymbol{L}}$ dengan hasil kali diagonal utama matriks interval segitiga atas $\tilde{\boldsymbol{U}}$, yaitu

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\boldsymbol{A}}) &= ([9,11]\,[9,11]\,[9,11])\,([1,1]\,[1,1]\,[1,1]) \\ &= [9,11]\,[9,11]\,[9,11] \,, \\ \det(\tilde{\boldsymbol{A}}) &= [729, 1271] \,. \end{aligned}$$

Kemudian sebagai pembanding diberikan martiks interval (4) yang sama dan dengan menggunakan metode yang sama tanpa penggabungan aritmatika seperti yang telah dibahas dalam [9] dihasilkan matriks interval sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} [9,11] & [-1,1] & [-1,1] \\ [-11,11] & [8,12] & [-2,2] \\ [-11,11] & [-12,12] & [7,13] \end{pmatrix}, \\ \tilde{A} &\approx \begin{pmatrix} [9,11] & [0,0] & [0,0] \\ [-11,11] & [8,12] & [0,0] \\ [-11,11] & [-12,12] & [7,13] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga determinan yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\boldsymbol{A}}) &= ([9,11]\,[8,12]\,[7,13])\,([1,1]\,[1,1]\,[1,1]) \\ &= [9,11]\,[8,12]\,[7,13] \\ \det(\tilde{\boldsymbol{A}}) &= [504, 1504] \,. \end{aligned}$$

Dari contoh yang diberikan dapat disimpulkan bahwa determinan martiks interval dengan menggunakan penggabungan aritmatika interval memperoleh nilai interval yang lebih pendek dibanding tanpa penggabungan aritmatika interval.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa untuk sebarang interval $\tilde{a}$ maka $\tilde{a}/\tilde{a} = \tilde{1} = [1, 1]$ hanya berlaku jika $a_1 \geq 0$ atau pada interval positif. Pada kasus lainnya, pembagian interval $\tilde{a}/\tilde{a}$ akan menghasilkan nilai bergantung pada ketentuan yang memenuhi persamaan (1). Penyelesaian dekomposisi-*LU* pada matriks interval dengan menggunakan metode Crout yang dimodifikasi dapat digunakan bila unsur $\tilde{a_{11}}$ pada matriks interval $\tilde{\boldsymbol{A}}$ bernilai positif. Selanjutnya dari perolehan dekomposisi-*LU* dengan menggunakan metode Crout yang dimodifikasi dapat menentukan determinan matriks interval dengan menghitung hasil kali diagonal pada matriks interval segitiga bawah $\tilde{\boldsymbol{L}}$ dan dengan menggunakan penggabungan aritmatika diperoleh nilai determinan dengan interval yang lebih pendek.

Ucapan terima kasih Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Mashadi, M.Si. yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] G. Alefeld dan J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.

[2] H. Anton dan C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version, 11th Editions*, John Wiley, New Jersey, 2013.

[3] S. Das dan S. Chakraverty, *Numerical solution of interval and fuzzy system of linear equations*, Application and Applied Mathematics, 7 (2012), 334-356.

[4] K. Ganesan, *On some properties of interval matrices*, International Journal of Mathematics Sciences, 1 (2006), 92-99.

[5] A. Goldsztejn dan G. Chabert, *A generalized interval LU decomposition for the solution of interval linear systems*, dalam Numerical Methods and Applications, T. Boyanov et al. (eds), Lecture Notes in Computer Science 4310, Springer Verlag, Berlin, 2007, 312-319.

[6] A. Nazari, M. Zeinali, dan H. Mesgarani, *Invers eigenvalue problem of interval nonnegative matrices of order* ≤ 3, Journal of Mathematical Modeling, 6 (2018), 187-194.

[7] K. Nora, B. Kheir, dan B. Arres, *Solving linear systems using interval arithmetic approach*, International Journal of Science and Engineering Investigations, 1 (2012), 29-33.

[8] T. Nirmala, D. Datta, H. S. Khuswaha, dan K. Ganesan *The determinant of an interval matrix using gaussian elimination method*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 88 (2013), 15-34.

[9] T. Nirmala dan K. Ganesan, *Modified Crout's method for an LU decomposition of an interval matrix*, Journal of Physics, 1000 (2018), 1-11.

[10] E. Siahlooei dan S. A. S. Fazeli, *An application of interval arithmetic for solving fully fuzzy linear systems with trapezoidal fuzzy number*, Advances in Fuzzy Systems, 2018 (2018), 1-10.

[11] G. Veeramalai, *Eigenvalue of an interval matrix*, CLEAR International Journal of Research in Management, Science and Technology, 2 (2012), 1-8.