ISBN: 978-979-792-552-9

Penyelesaian Program Linier Menggunakan Algoritma *Interior Point* dan Metode Simpleks

Sri Basriati[1], Elfira Safitri[2]

[1,2)]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau

[1)]sribasriati@hotmail.com

Abstrak

Metode simpleks merupakan algoritma untuk menyelesaikan permasalahan program linier. Selain itu, untuk menyelesaikan masalah program linier yang kompleks dapat juga digunakan algoritma *interior point* yang memiliki fungsi kendala dan variabel keputusan yang jumlahnya besar. Nilai *interior point* diberikan secara acak dengan nilai yang harus memenuhi batasan (*constraint)* yang ada pada permasalahan. Apabila nilai *interior point* tidak memenuhi batasan, maka tidak dapat dihasilkan nilai solusi yang optimal. Berdasarkan penelitian ini diperoleh bahwa, penyelesaian program linier menggunakan metode simpleks lebih efisien dibandingkan algoritma *interior point*. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya iterasi yang dilakukan, karena pada *interior point* iterasi dan nilai α diambil secara acak.

Katakunci: algoritma interior point, iterasi, metode simpleks.

1 Pendahuluan

Perkembangan perusahaan pada era globalisasi mengalami pertumbuhan yang sangat pesat, sehingga banyak perusahaan yang dengan cepat berkembang menjadi perusahaan besar. Permasalahan yang dialami oleh perusahaan tersebut semakin besar pula, perlu pengolahan secara profesional karena tujuan umum perusahaan adalah mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya (maksimum) dengan biaya serendah-rendahnya (minimum) (Sadono, 2005). Untuk menyelesaikan permasalahan diatas dilakukan optimasi yaitu memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan perusahaan.

Untuk melakukan optimasi atau pencarian solusi optimal pada pemograman linier, metode yang umum digunakan adalah metode simpleks. Ada suatu pendekatan untuk menyelesaikan permasalahan program linier yaitu pendekatan *interior point*. Penemuan *interior point* berhasil mengembangkan algoritma baru dalam program linier. Menurut Hillier [4], Algoritma *interior point* digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier yang kompleks, yaitu yang memiliki kendala fungsional dan variabel keputusan yang jumlahnya besar.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perbandingan hasil dari algoritma *interior point* dan metode simpleks.

ISBN: 978-979-792-552-9

2 TinjauanPustaka

Algoritma Interior Point

Algoritma *interior point* dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984), merupakan suatu metode menyelesaikan program linier untuk mengoptimalkan fungsi objektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$. Penyelesaian algoritma *interior point* untuk kasus maksimasi perlu penambahan variabel *slack*, dengan Langkah-Langkah menyelesaikan algoritma *interior point* sebagai berikut:

1. Memilih *interior point*

   $$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

   dengan x merupakan variabel keputusan.

   Kemudian tentukan matriks diagonal D sebagai berikut:

   $$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsikendala dan fungsi tujuan

   $$\widetilde{A} = AD \text{ dan } \tilde{c} = D\,c \quad (2)$$

   dengan

   A = Koefisien dari fungsi kendala
   $\widetilde{A}$ = Koefisien baru dari fungsi kendala
   D = Matriks diagonal dari *interior point*
   c = Koefisien dari fungsi tujuan
   $\tilde{c}$ = Koefisien baru dari fungsi tujuan

3. Menentukan matriks proyeksi P

   $$P = I - \tilde{A}\left(\tilde{A}\widetilde{A^T}\right)^{-1}\tilde{A} \quad (3)$$

   dengan

   P = Matriks proyeksi
   I = Matriks identitas

4. Menentukan *projected gradient*

   $$c_p = P\,\tilde{c} \text{ dan } v = \left|c_p\right| \quad (4)$$

   dengan

   c_p = Tingkat kemiringan yang diproyeksikan
   P = Matriks proyeksi
   v = Nilai absolut dari komponen negatif c_p

5. Menentukan dengan iterasi koordinat titik baru

   $$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v} c_p \quad (5)$$

   dengan α merupakan konstanta yang dipilih antara 0 dan 1dengan $0 < \alpha < 1$.

6. Menghitung x sebagai penyelesaian percobaan untuk iterasi berikutnya (Langkah 1).

$$x = D\tilde{x} \text{ dan } Z = c^T x \tag{6}$$

Metode Simpleks

Menurut Yuwono [13] Langkah-Langkah penyelesaian program linier dengan metode simpleks sebagai berikut:

1. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala
   Fungsi tujuan diubah menjadi bentuk baku. Fungsi pembatas sebelum dimasukkan dalam tabel ditambahkan *slack* variabel atau dikurangkan *surplus* variabel. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\leq$ maka fungsi kendala tersebut ditambahkan *slack* variabel $(+x_{n+1})$, sedangkan untuk fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ maka fungsi kendala tersebut dikurangkan *surplus* variabel $(-x_{n+1})$.
2. Menyusun persamaan-persamaan ke dalam tabel.
3. Memilih kolom kunci
   Kolom kunci adalah kolom yang mempunyai nilai pada baris z yang bernilai negatif dengan angka terbesar.
4. Memilih baris kunci
   Baris kunci ditentukan berdasarkan nilai indeks positif terkecil. Cara menentukan indeks sebagai berikut:

$$I = \frac{NK}{K_c}$$

dengan I adalah Indeks, NK Nilai kanan batasan dan K_c Nilai kolom kunci

5. Mengubah nilai-nilai baris kunci
   Nilai baris kunci diubah dengan cara membaginya dengan angka kunci.
6. Mengubah nilai-nilai selain baris kunci sehingga nilai-nilai kolom kunci (selain baris kunci) $=$ 0.
7. Melanjutkan perbaikan-perbaikan (Langkah 3-6) sampai baris z tidak ada yang bernilai negatif pada permasalahan maksimum.

3 Bahan dan Metode

Langkah-Langkah metodologi penelitian diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagaimana tampak pada Gambar 1.

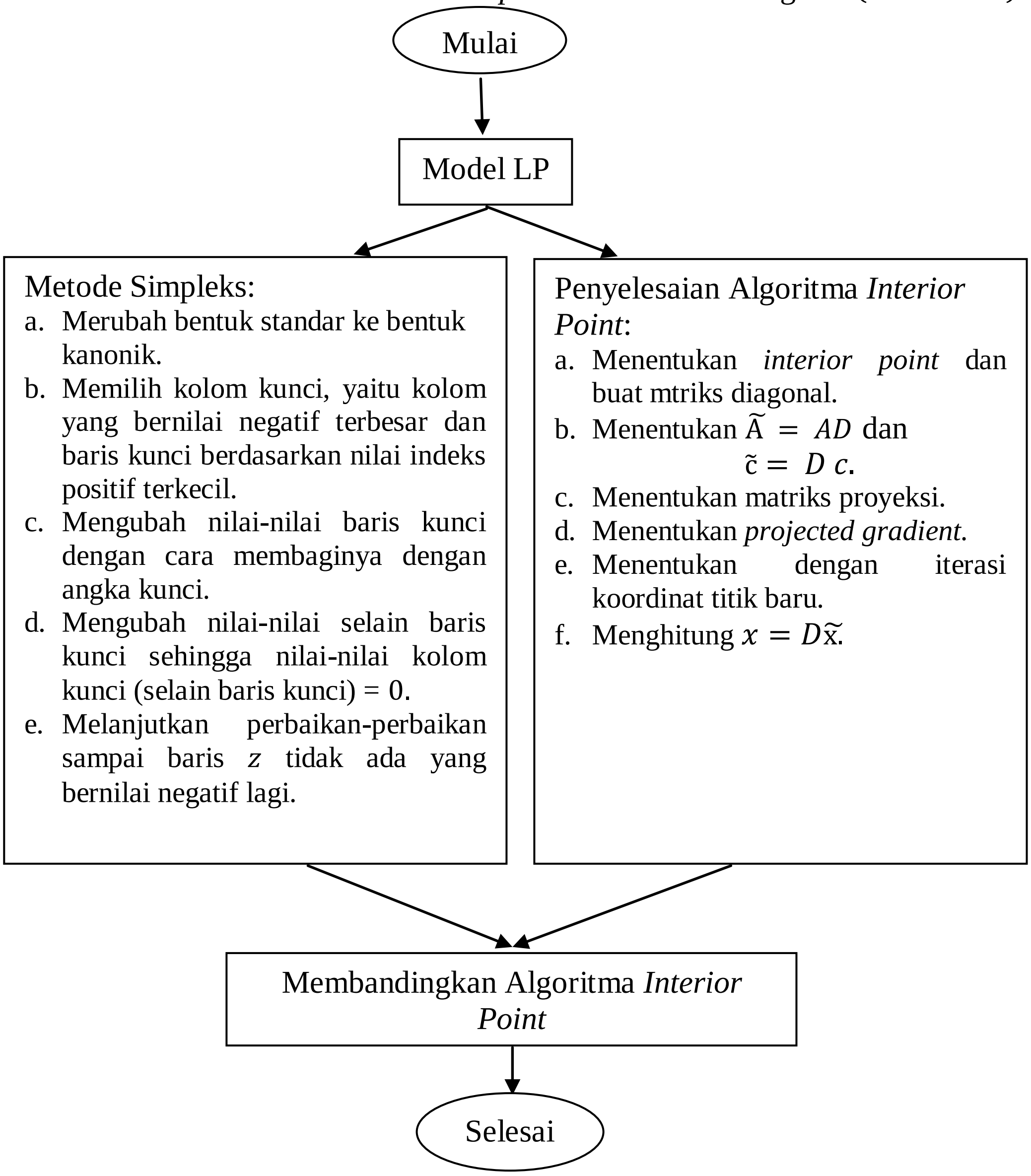
4 Hasil dan Pembahasan

Penyelesaian Algoritma Interior Point

Algoritma *interior point* dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984), merupakan suatu metode penyelesaikan program linier untuk mengoptimalkan fungsi objektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$. Algoritma *interior point* perlu diketahui hal-hal berikut: menambahkan *slack* variabel pada fungsi *objektif* $Z = c^T x$ menjadi

ISBN: 978-979-792-552-9

$Z' = (c^T)'x'$, kendala $Ax \leq b$ menjadi $A'x' = b'$ sehingga program bisa dientri data fungsi *objektif* dan fungsi kendala ke dalam bentuk matriks, dimana $C = (c^T)'$, $B = b'$, $A = A'$ dan $X = x'$. Pemilihan *interior point* secara acak dengan $\alpha(0 < \alpha < 1)$.



Gambar 1: *Flowchart* penyelesaian program linier

Contoh 1 Diketahui model progam linier, memaksimumkan fungsi *objektif*:

$$\text{maks } z = 40x_1 + 30x_2$$

kendala:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian: Menyelesaikan program linier menggunakan algoritma *interior point*, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan cara menambahkan *slack* variabel, maka model program liniernya menjadi:

Maks $z = 40x_1 + 30x_2 + 0x_4 + +0x_5$

kendala:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 60$$
$$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 1x_4 = 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Berikut diberikan ilustrasi penyelesaian algoritma *interior point*. Langkah-Langkah menyelesaikan algoritma *interior point* sebagai berikut:

Iterasi 1:

1. Diambil *interior point* $[10, 10, 10, 10]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 31 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c^T = [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0]$$

   Berdasarkan persamaan (2), sehingga diperoleh:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 20 & 3010 & 0 \\ 20 & 10\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{dan } \tilde{c}^T = [400 \quad 300 \quad 0 \quad 0].$$

3. Menentukan matriks proyeksi P dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 10 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (3), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{11}{35} & \frac{-8}{35} & \frac{2}{35} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-8}{35} & \frac{9}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{29}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (4), sehingga diperoleh:

$$c_p{}^T = \begin{bmatrix} \frac{400}{7} & \frac{-100}{7} & \frac{-500}{7} & -100 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-100| = 100.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

ISBN: 978-979-792-552-9

Berdasarkan persamaan (5), sehingga diperoleh:

$$\hat{x}^T = [1.514 \quad 0.871 \quad 0.357 \quad 0.100]$$

6. Menghitung $x$untuk melakukan iterasi berikutnya.
   Berdasarkan persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$x^T = [15.143 \quad 8.714 \quad 3.571 \quad 1.000] \text{ dan} Z = [867.143].$$

Hasil penelitian ini, untuk memperoleh hasil yang optimal fungsi obyektif mendekati nilai yang sama dilakukan Langkah-Langkah yang sama untuk iterasi berikutnya. Pada contoh 1 dilakukan iterasi sebanyak 8 kali.Umumnya diperoleh nilai α menghasilkan nilai optimal lebih baik untuk nilai $\alpha \geq 0.5$. Sehingga diperoleh nilai maksimum pada iterasi ke-8 nilai fungsi obyektif $z = 900.217$ dengan $x_1,\ x_2$ masing-masing sebesar 15.007 dan 9.999.

Penyelesaian Menggunakan Metode Simpleks

Diberikan model progam linier, memaksimumkan fungsi *objektif*:

maks $z = 40x_1 + 30x_2$

kendala:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bentuk standar dari persamaan di atas yaitu:

$$z - 40x_1 - 30x_2 - 0x_4 \quad = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 \quad = 60$$
$$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 1x_4 \quad = 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Tabel 1: Tabel Awal Simpleks untuk Contoh 1

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK
z	1	-40	-30	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	60
x_4	0	2	1	0	1	40

Pada hasil penelitian ini, diperoleh hasil optimal setelah dilakukan iterasi sebanyak 3 kali. Berikut diberikan solusi optimal pada iterasi terakhir yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2: Tabel simpleks iterasi ketiga untuk Contoh 1

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK
z	1	0	0	5	15	900
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	15
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10

Metode simpleks berhenti bila elemen-elemen dari z tidak ada yang bernilai negatif, maka iterasi tidak perlu dilanjutkan. Sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif $z = 900$ dengan $x_1,\ x_2$ masing-masing sebesar 15 dan 10.

Contoh 2 Diketahui model program linier, memaksimumkan fungsi objektif:

maks $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

kendala:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 &\leq 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian Algoritma Interior Point

Menyelesaikan program linier menggunakan algoritma *interior point*, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan cara menambahkan *slack* variabel, maka model program liniernya menjadi:

Maks $\mathrm{z} = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

kendala:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 &= 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{5,} x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Berikut diberikan ilustrasi penyelesaian algoritma *interior point*.Langkah-langkahmenyelesaikan algoritma *interior point* sebagai berikut:

Iterasi 1:

1. Diambil *interior point*$[1, 0, 8, 32, 4, 2]$
   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:
   $$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:
   $$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.50 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   $$c^T = [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
   Berdasarkan persamaan (2), sehingga diperoleh:
   $$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8\ 32 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 12\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4\ \ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{c}^T = [60 \quad 0 \quad 160 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
3. Menentukan matriks proyeksi P

dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (3), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 0.806 & 0 & -0.290 & -0.129 & 0.065 & -0.226 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.290 & 0 & 0.176 & 0.029 & -0.237 & -0.061 \\ 0.129 & 0 & 0.029 & 0.025 & 0.043 & 0.072 \\ -0.065 & 0 & -0.237 & 0.043 & 0.645 & 0.409 \\ 0.226 & 0 & -0.061 & 0.072 & 0.409 & 0.348 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (4), sehingga diproleh:

   $c_p{}^T = [1.935 \quad 0 \quad 10.681 \quad -3.154 \quad -33.978 \quad -23.297]$ dan

   $v = |-33.978| = 33.978.$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (5), sehingga diperoleh:

   $\tilde{x}^T = [1.051 \quad 1 \quad 1.283 \quad 0.916 \quad 0.091 \quad 0.383]$.

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (6), sehingga diperoleh:

   $x^T = [1.051 \quad 0 \quad 10.263 \quad 29.327 \quad 0.391 \quad 0.766]$ dan

   $Z = [268.342]$

Hasil penelitian ini, untuk memperoleh hasil yang optimal fungsi obyektif mendekati nilai yang sama dilakukan Langkah-Langkah yang sama untuk iterasi berikutnya. Pada contoh 2 dilakukan iterasi sebanyak 7 kali.Umumnya diperoleh nilai α menghasilkan nilai optimal lebih baik untuk nilai $\alpha \geq 0.5$. Sehingga diperoleh nilai maksimum pada iterasi ke-7 nilai fungsi obyektif $z = 280.244$ dengan $x_1,\ x_2$ masing-masing sebesar $2.0003, 0, 8.011, 2, 0, 8$.

Penyelesaian menggunakan Metode Simpleks

Diketahui model program linier, memaksimumkan fungsi objektif:

$$\text{maks } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

kendala:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 &\leq 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bentuk standar dari persamaan di atas, yaitu:

$$\begin{aligned} z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 &= 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 &= 20 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \quad = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \quad \geq 0$$

Tabel 3: Tabel Awal Simpleks untuk Contoh 2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	NK
z	1	-60	-30	-20	0	0	0	0
x_4	0	8	6	1	1	0	0	48
x_5	0	4	2	1.5	0	1	0	20
x_6	0	2	1.5	0.5	0	0	1	8

NK adalah Nilai Kanan dari fungsi kendala

Pada hasil penelitian ini, diperoleh hasil optimal setelah dilakukan iterasi sebanyak 3 kali. Berikut diberikan solusi optimal pada iterasi terakhir yang disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4: Tabel simpleks iterasi ketiga untuk contoh 2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	NK
z	1	0	5	0	0	10	10	280
x_1	0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_4	0	0	-2	0	1	2	-8	24

Metode simpleks berhenti bila elemen-elemen dari z tidak ada yang bernilai negatif, maka iterasi tidak perlu dilanjutkan. Sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif $z = 280$ dengan $x_1,\ x_2,\ x_3$ masing-masing sebesar $2, 0$ dan 8

Kesimpulan

1. Pemberian nilai *interior point* diberikan secara acak, dengan nilai yang harus memenuhi batasan (*constraint*) yang ada pada permasalahan. Apabila nilai *interior point* tidak memenuhi batasan dan syarat yang ada, maka tidak dapat dihasilkan nilai solusi yang optimal.
2. Berdasarkan contohpenyelesaian program linier menggunakan metode simpleks lebih efisien dibandingkan algoritma *interior point*, hal ini dapat dilihat dari banyaknya iterasi yang dilakukan.
3. Berdasarkan kedua metode yaitu algoritma *interior point* dan metode simpleks menghasilkan nilai z optimum untuk contoh 1 sebesar 900.217 dan 900 dengan nilai variabel keputusan untuk kedua metode masing-masing sebesar $15.007, 9.999, 15, 10$ sedangkan untuk contoh 2 nilai z optimum sebesar 280.244 dan 280 dengan nilai variabel keputusan untuk kedua metode masing-masing $2.0003, 0, 8.011, 2, 0, 8$.

Daftar Pustaka

[1] Cillen, C.G. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[2] Gere, J.M. dkk. 1983. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Erlangga, Jakarta.

[3] Hendri, J. 2009. *Riset Operasional*. Universitas Gunadarma.

[4] Hiller, F. S dan Liberman, G. J, *Pengantar Riset Operasi*, Jilid 1, Terj. dari Introduction to Operations Research, oleh S. Ellen G dan Mulia, A. W, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990.

[5] Kartono. 1995. *Pengantar Topologi*. Andi Offset, Yogyakarta.

[6] Klain, D. 2010. *Orthogonal Projections and Reflections (with exercises)*. Tecnische Universitas Berlin,

[7] Lianah. 2008. *Matematika Ekonomi*. Universitas MarcuBuana, Jakarta.

[8] Siswanto. 2007. *Operation Research Jilid satu*. Erlangga, Jakarta.

[9] Sukirno, S. 2005. *Mikro Ekonomi Teori Pengantar*. PT Raja Grafindo Persada, Jakarta.

[10] Supranto, J. 1983. *Linear Programming Edisi dua*. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

[11] Tjutju. 1999. *Opertions Research Model-Model PengambilanKeputusan*. Sinar Baru Algensindo.

[12] Tuwankotta, J.M. 2010. *Analisis Real*. FMIPA ITB, Bandung.

[13] Yuwono, B. 2007. *Bahan Kuliah Riset Operasional*. Teknik Informatika UPN, Yogyakarta.

[14] Winston, W. L. 2004. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*, Fourth Ed., Thomson Learning, Belmont CA 94002, U.S.A.