ISBN: 978-979-792-552-9

Solusi Filter Kalman *Semi-infinite* Positif untuk Solusi Sistem Diskrit

Budi Rudianto[1], Narwen[2]

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas
Kampus UNAND Limau Manis, Padang 25163

budialbarqy@fmipa.unand.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dibahas Solusi Masalah Filter Kalman Deterministik Diskrit pada interval yang *semi-infinite* untuk model kontrol pelacakan linear-kuadrat dengan kondisi awal tidak tetap. Dengan memperhatikan solusi masalah deterministik dan ruang keadaan filter Kalman, akan ditentukan nilai (x, u, x_0) agar fungsi tujuan pada persamaan $J(x, u, x_0) = \min \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_k^T R_k u_k + (C_{x_k} - \bar{y}_k)^T Q (C_{x_k} - \bar{y})_k\right]$ menjadi optimal.

Kata kunci: Filter Kalman deterministik, interval semi-infinite

1 Pendahuluan

Sontag [4] menjelaskan tentang analogi deterministik dari masalah Filter Kalman pada interval-*finite*. Model deterministik memungkinkan perluasan secara alami menjadi interval yang semi-infinite. Perluasan interval ini menjadi menarik karena untuk masalah kontrol stokastik dengan linear-kuadrat dapat diperluas menjadi interval semi-infinite yang mengarah kepada kelengkapan fungsi tujuan (lihat contoh [1]). Menurut Sontag [4], model yang akan diperhatikan adalah model yang berbentuk

$$J(x, u, x_0) = \int_0^{+\infty} [u^T R u + (C_x - \bar{y})^T Q (C_x - \bar{y})] dt \,, \tag{1}$$
$$\dot{x} = Ax + Bu \,, \tag{2}$$
$$x(0) = x_0 \,, \tag{3}$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa pasangan $(x, u) \in ax_0 + Z$, dengan Z adalah subruang vektor pada Ruang Hilbert $L_2^n[0, +\infty) \times L_2^m[0, +\infty)$, (dengan $L_2^n[0, +\infty)$ Ruang Hilbert pada R^n sebagai nilai fungsi kuadrat yang terintegralkan). Sementara itu, Z didefinisikan sebagai

ISBN: 978-979-792-552-9

$$Z = \left\{ \begin{array}{c} (x,u) \in L_2^n[0,+\infty) \times L_2^m[0,+\infty), \\ \dot{x} \in L_2^n[0,+\infty), \dot{x} = Ax + Bu\,, x(0) = x_0 \end{array} \right\}$$

Perhatikan bahwa A adalah matriks bujursangkar berukuran $n \times n$, B matriks bujursangkar berukuran $n \times m$, $R = R^T$ matriks berukuran $n \times n$ dan definit postif, $Q = Q^T$ matriks berukuran $r \times r$ dan definit postif , C matriks berukuran $r \times n$. Sedangkan nilai $\bar{y}$, ditentukan oleh $\bar{y} \in L_2^r[0,+\infty)$.

2 Metode Penelitian

Pada makalah ini dapat diperhatikan bahwa pada persamaan (1)-(3) untuk x_0 yang tidak ditentukan, maka untuk memenuhi kriteria tersebut haruslah semua peubah berbentuk

$$(x,u,x_0) \in L_2^n[0,+\infty) \times L_2^m[0,+\infty) \times R^n.$$

Sehingga interpretasi persamaan (1)-(3) merupakan estimasi dari bentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ \bar{y} &= Cx + v, \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai x yang memenuhi pengamatan $\bar{y}$ dengan melakukan minimisasi perturbasi u, v dan memilih kondisi awal x_0.

3 Hasil Dan Pembahasan

Solusi Masalah Deterministik

Misalkan persamaan aljabar Riccati diberikan sebagai :

$$KA + A^TK + KLK - C^TQT = 0 \;, \tag{4}$$

dengan $L = BR^{-1}B^T$. Selanjutnya, dengan mengasumsikan bahwa pasangan (A, B) dapat distabilkan (*stabilizable*) dan pasangan (C, A) dapat dideteksi (*detectable*), maka terdapat solusi simetrik K_{st} yang definit negatif pada (4) sedemikian hingga matriks $A + LK_{st}$ adalah stabil. Dengan menggunakan hasil pada [2], dapat dijelaskan bahwa untuk x_0 yang ditentukan akan diperoleh solusi optimal.

Karena terdapat solusi unik

$$\rho_0 \in L_2^n[0,+\infty)$$

yang memenuhi persamaan differensial berikut :

$$\dot{\rho} = -(A + LK_{st})^T\rho - C^TQ\bar{y} \tag{5}$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Maka, secara eksplisit ρ_0 dapat dinyatakan dalam persamaan :

$$\rho_0(t) = \int_0^{+\infty} \exp[(A + LK_{st})^T \tau]\, C^T Q \bar{y}(t + \tau) d\tau. \qquad (6)$$

Solusi optimal (x, u) pada persamaan (1)-(3) memiliki bentuk persamaan

$$\dot{x} = (A + LK_{st})x + L\rho_0, \text{ dan } x(0) = x_0 \qquad (7)$$
$$u = R^{-1}B^T(K_{st}x + \rho_0) \qquad (8)$$

Karena ρ_0 tidak bergantung pada x_0, maka untuk menyelesaikan permasalahan pada persamaan (1)-(3) dapat diselesaikan dengan menentukan nilai minimal dari fungsional (1) terhadap x_0.

Teorema 1. *Jika diberikan (x, u)sebagai solusi optimal persamaan (1)-(3) dengan x_0 tetap yang diperoleh dari persamaan (5)-(8). Maka*

$$J(x, u, x_0) = -x_0{}^T K_{st} x_0 - 2\rho_0(0)^T x_0 + \int_0^{+\infty} [\bar{y}^T Q \bar{y} - \rho_0{}^T L \rho_0] dt. \qquad (9)$$

Perhatikan bahwa $J(x, u, x_0)$ merupakan fungsi konveks dari x_0, dan nilai minimum dari $J(x, u, x_0)$ yang dipenuhi oleh nilai

$$x_0^{opt} = -K_{st}^{-1} \rho_0(0) \qquad (10)$$

Sehingga persamaan (5)-(8) memberikan solusi lengkap untuk persamaan awal (1)-(3).

Bukti. Misalkan $(y, w) \in ax_0 + Z$ sebagai solusi fisibel untuk persamaan (1)-(3), dengan x_0 ditentukan. Tetapkan persamaan berikut :

$$\Delta(y, w) = [w - R^{-1}B^T(K_{st}y + \rho_0)]^T R[w - R^{-1}B^T(K_{st}y + \rho_0)]].$$

yang bergantung pada waktu. Sementara itu $\Delta(x, u) = 0$. Oleh karena itu

$$\Delta(y, w) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

dengan

$$\Delta_1 = w^T R w$$
$$\Delta_2 = -2(K_{st}y + \rho_0)^T B w$$
$$\Delta_3 = (K_{st}y + \rho_0)^T L (K_{st}y + \rho_0)$$

Selanjutnya pilih $Bw = \dot{y} - Ay$. Akibatnya, diperoleh

$$\Delta_2 = -2(y^T K_{st} + \rho_0{}^T)(\dot{y} - Ay)$$

Sehingga diperoleh

$$\Delta_2 = y^T(K_{st}A + A^T K_{st})y - 2y^T K_{st}\dot{y} - 2{\rho_0}^T \dot{y} + 2\rho^T Ay,$$
$$\Delta_3 = y^T K_{st} L K_{st} y + {\rho_0}^T L\rho_0 + 2{\rho_0}^T LK_{st} y$$

Akibatnya diperoleh

$$\Delta(y,w) = w^T Rw + {\rho_0}^T L\rho_0 + y^T(K_{st}LK_{st} + K_{st}A + A^T K_{st})y - \tfrac{d}{dt}(y^T K_{st} y)$$
$$- 2\tfrac{d}{dt}({\rho_0}^T y) + 2{\rho_0}^T y + 2{\rho_0}^T y + 2{\rho_0}^T LK_{st} y + 2{\rho_0}^T Ay.$$

Dengan menggunakan persamaan (4) dan (5), diperoleh

$$\Delta(y,w) = w^T Rw + {\rho_0}^T L\rho_0 + y^T C^T QCy - \tfrac{d}{dt}(y^T K_{st} y) - 2\tfrac{d}{dt}({\rho_0}^T y) - 2(C^T Q\bar{y})^T y$$

Jadi

$$\Delta(y,w) = w^T Rw + {\rho_0}^T L\rho_0 - \tfrac{d}{dt}(y^T K_{st} y) - 2\tfrac{d}{dt}({\rho_0}^T y) - (\bar{y} - Cy)^T Q(\bar{y} - Cy) - \bar{y}^T Q\bar{y}.$$

Sehingga, dengan mengambil nilai $\rho_0(t) \to 0$, kemudian $y(t) \to 0$, dan $t \to +\infty$, akan diperoleh persamaan

$$\int_0^{+\infty} \Delta(y,w)dt = \int_0^{+\infty} [w^T Rw + (\bar{y} - Cy)^T Q(\bar{y} - Cy)]\, dt + \int_0^{+\infty} [{\rho_0}^T L\rho_0 - \bar{y}^T Q\bar{y}]dt + 2\rho_0(0)^T x_0 + x_0 K_{st}\, x_0$$

Jadi diperoleh

$$\int_0^{+\infty} \Delta(y,w)dt = J(y,w,x_0) + 2\rho_0(0)^T x_0 + x_0 K_{st} x_0 + c$$

dengan

$$c = \int_0^{+\infty} [{\rho_0}^T L\rho_0 - \bar{y}^T Q\bar{y}]dt$$

Akibatnya, $\Delta(y,w) \geq 0$ dan $\Delta(x,u) \equiv 0$. Hal ini menunjukkan bahwa (x,u) merupakan solusi optimal pada persamaan (1)-(3), untuk nilai x_0 ditentukan dan terbukti persamaan (9). ■

ISBN: 978-979-792-552-9

Steady State Filter Kalman Deterministik

Perhatikan persamaan (10), dengan menggunakan proses

$$z(t) = -K_{st}^{-1}\rho_0(t), \text{ dengan } t \in [0, +\infty) \tag{11}$$

sebagai estimasi solusi optimal persamaan (1)-(3). Selanjutnya akan ditentukan persamaan differensial dari $z(t)$.

Proposisi 1. *Perhatikan bahwa persamaan differensial $z(t)$ dapat dinyatakan sebagai :*

$$\dot{z} = Az + K_{st}^{-1}C^T Q(\bar{y} - Cz) \tag{12}$$

Perhatikan bahwa K_{st}^{-1} merupakan solusi untuk persamaan aljabar

$$L - PC^T QCP + AP + PA^T = 0. \tag{13}$$

Selanjutnya persamaan differensial (12) merupakan analog deterministik untuk persamaan differensial stokastik yang menjelaskan estimasi optimal sebagai keadaan yang steady (*steady state*) pada masalah filter Kalman.

Bukti. Dengan menggunakan persamaan (5) dan persamaan (11), diperoleh :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= K_{st}^{-1}(A + LK_{st})^T\rho_0 + K_{st}^{-1}C^T Q\bar{y} \\ &= -(K_{st}^{-1}A^T + L)(K_{st}z) + K_{st}^{-1}C^T Q\bar{y} \end{aligned}$$

Sehingga K_{st} merupakan solusi dari persamaan (4), akibatnya diperoleh

$$-K_{st}^{-1}A^T K_{st} - LK_{st} = A - K_{st}^{-1}C^T QC\,,$$

sehingga

$$\dot{z} = Az - K_{st}^{-1}C^T QCz + K_{st}^{-1}C^T Q\bar{y}.$$

Oleh sebab itu, terpenuhilah bahwa

$$\dot{z} = Az + K_{st}^{-1}C^T Q(\bar{y} - Cz) \qquad \blacksquare$$

4 Solusi Masalah Deterministik Diskrit

Perhatikan bahwa untuk kasus diskrit persamaan (1)-(3), dapat dinyatakan sebagai

$$J(x, u, x_0) = \min \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_k^T R_k u_k + (C_{x_k} - \bar{y}_k)^T Q(C_{x_k} - \bar{y})_k\right] \tag{14}$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k\,, \tag{15}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{16}$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Selanjutnya x menyatakan barisan $\{x_k\} \in R^n$ untuk $k = 0 \ldots \infty$. Dapat diperoleh bahwa $x \in I_2^n(N)$ jika $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$. Dan $(x, u) \in$.
Seperti pada kasus kontinu, diasumsikan bahwa pasangan $(x, u) \in ax_0 + Z$, dengan Z adalah subruang dari Ruang Hilbert $I_2^n(N) \times I_2^m(N)$. Pandang hasil kali dalam pada H memenuhi persamaan

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle_H = \sum_{k=0}^{\infty} \{\langle x_k, u_k \rangle + \langle y_k, v_k \rangle\}$$

Sedangkan subruang Z, berbentuk :

$$Z = \{(x, u) \in H: x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, k = 0,1, \ldots, x_0 = 0\}$$

Pada persamaan (14)-(16) merupakan estimasi masalah dari bentuk :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ \bar{y}_k &= Cx_k + Dv_k, \end{aligned} \tag{17}$$

Dengan tujuan dicari x sedemikian hingga $\bar{y}$ diperoleh melalui meminimumkan perturbasi u dan v, serta kondisi awal x_0.

Selanjutnya dapat ditentukan bahwa *cost function* masalah kontrol linear kuadratik diskrit dengan pendekatan linier pada *cost function* dapat berbentuk

$$J(x, u, x_0) = \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k] + x_k^T \varphi_k + u_k^T \emptyset_k$$

Solusi dari persamaan tersebut dapat dijelaskan dengan pendekatan Persamaan Riccati, yaitu

$$K = A^T KA - A^T KB(R + B^T KB)^{-1} (A^T KB)^T + Q$$

Asumsikan bahwa persamaan tersebut mempunyai solusi definit positif K_{st}, maka dari persamaan

$$J(x, u, x_0) = \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k^T R_k u_k + (C_{x_k} - \bar{y}_k)^T Q (C_{x_k} - \bar{y})_k\right]$$

Diperoleh bahwa $\varphi_k = -C^T Q \bar{y}_k$, dan $\emptyset_k = 0$, dengan $k = 0,1, \ldots$, oleh karena itu $\bar{\rho} = \{\bar{\rho}_k\} I_2^m(N)$
Sehingga

$$\rho_k = A^T - (A^T K_{st} B)(R + B^T K_{st} B)^{-1} B^T \rho_{k+1} + C^T Q \bar{y}_k$$

Selanjutnya dengan menyatakan

ISBN: 978-979-792-552-9

$$\bar{R} = (R + B^T K_{st} B)$$

Dan $L = B\bar{R}^{-1}B^T$, sehingga diperoleh

$$\rho_k = [A^T - A^T K_{st} L]\rho_{k+1} + C^T Q \bar{y}_k$$

Sedangkan

$$K = A^T K A - (A^T K B)\bar{R}^{-1}(A^T K B)^T + C^T Q C,$$

atau

$$K = A^T K A - A^T K L K A + C^T Q C.$$

Akibatnya solusi optimal pada persamaan (14)-(16) akan diperoleh, jika

$$x_{k+1} = (A^T - A^T K_{st} L)^T x_k + L\bar{\rho}_{k+1}$$
$$u_k = -\bar{R}^{-1} B^T K_{st} A x_k + \bar{R}^{-1} B^T \bar{\rho}_{k+1}.$$

Kesimpulan

Persamaan differensial (12) merupakan salah satu estimasi dari $z(t)$ yang didasarkan pada pengamatan $\bar{y}$, sehingga diperoleh $z(0) = x_0^{opt}$, dengan

$$z(0) = -K_{st}^{-1} \int_0^{+\infty} \exp[(A + LK_{st})^T \tau]\, C^T Q \bar{y}(\tau) d\tau .$$

Untuk kasus deterministik diskrit persamaan (14)-(16) akan memperoleh solusi optimal, jika

$$x_{k+1} = (A^T - A^T K_{st} L)^T x_k + L\bar{\rho}_{k+1}$$
$$u_k = -\bar{R}^{-1} B^T K_{st} A x_k + \bar{R}^{-1} B^T \bar{\rho}_{k+1}.$$

Daftar Pustaka

[1] M. H. A. Davis. 1997. *Linear Estimation and Stochastic Control*, Chapman and Hall, London.

[2] L. Faybusovich and T. Mouktonglang. 2003. Linear-Quadratic Control Problem with a Linear Term on Semi-infinite Interval: Theory and Applications, *Technical Report*, University of Notre Dame.

[3] L. Faybusovich, T. Mouktonglang and T. Tsuchiya (2006). Implementation of infinite dimensional interior point method for solving multi criteria linear-quadratic control problem, *Optm. Methods Softw.* 2(2): 315-341.

[4] E. D. Sontag, 1990. Mathematical Control Theory, Springer.

[5] W. M. Wonham, 1974. *Linear Multivariable Control*: *A Geometric Approach*, Springer.