ISBN: 978-979-792-552-9

Pengembangan Hasil Kali Titik Pada Vektor

Suwandi[1*], Sri Gemawati[2], Syamsudhuha[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, Dosen Pendidikan Matematika
Universitas Pasir Pengaraian
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

*****wandisuwandi2323@gmail.com

ABSTRAK

Hasil kali titik dari vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ yang masing-masing bukan vektor nol dinyatakan dengan $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$. Hasil kali titik vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah suatu bilangan real yang didefinisikan oleh $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$. Hasil kali titik pada vektor dapat diinterpretasikan secara geometri. Pada tulisan ini dibahas interpretasi hasil kali titik secara geometri dan membuktikan cosinus jumlah sudut dan selisih sudut melalui hasil kali titik pada vektor.

Kata kunci: Hasil kali titik, cosinus, vektor

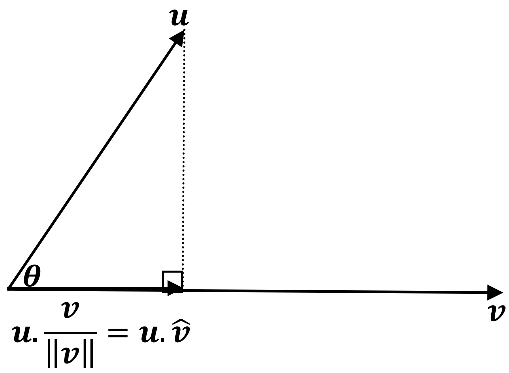
1 Pendahuluan

Pada buku pelajaran matematika SMA/MA kelas 3 IPA karangan Sartono siswa hanya sekedar menghitung nilai hasil kali titik dari suatu vektor saja tanpa memahami apa yang sedang mereka kerjakan. Pada buku matematika SMA/MA tersebut dikatakan bahwa hasil kali titik antara dua vektor didefinisikan sebagai hasil kali panjang/norma kedua vektor dan cosinus sudut antara vektor tersebut [6, h 158]. Dengan formula hasil kali titik antara dua vektor adalah $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta,\ 0^0 \leq \theta \leq 180^0$ atau $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ [6, h 158]. Siswa merasa dalam matematika banyak rumus yang harus dihafal dan pembelajarannya terasa membosankan, padahal hasil kali titik dapat dikembangkan dengan menginterpretasikan hasil kali titik tersebut secara geometri [2, h 128]. Pada tulisan ini diinterpretasikan hasil kali titik melalui kesebangunan segitiga serta membuktikan sudut trigonometri (cosinus jumlah sudut dan selisih sudut) melalui hasil kali titik pada vektor.

ISBN: 978-979-792-552-9

2 Interpretasi Hasil Kali Titik secara Geometri

Misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ berimpit pada pangkal vektor, kemudian tarik garis tegak lurus dari ujung vektor $\boldsymbol{u}$ ke vektor $\boldsymbol{v}$. Perhatikan Gambar 1 berikut ini



Gambar 1: Hasil kali titik sebagai dasar proyeksi

Hasil kali titik adalah sebagai dasar sebuah proyeksi. Pada Gambar 1, hasil kali titik dari sebuah vektor dengan sebuah vektor unit adalah proyeksi vektor tersebut dengan arah vektor unit [5, 1, h 128]. Secara geometri didapatkan formula

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta,\ 0^0 \leq \theta \leq 180^0 \tag{1}$$

Dari persamaan (1) hasil kali sebuah vektor dengan dirinya sendiri adalah panjang kuadrat dari vektor tersebut

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor yang tegak lurus maka

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = 0.$$

3 Pengembangan Hasil Kali Titik pada Vektor

Interpretasi Hasil Kali Titik Secara Geometri

Misalkan vektor $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{3})$ dan $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{8}, \boldsymbol{0})$ berimpit pada titik pangkal, kemudian vektor $\boldsymbol{u}$ diperpanjang dan ditarik garis dari titik ujung vektor $\boldsymbol{v}$ yang membentuk sudut siku-siku di D pada perpanjangan vektor $\boldsymbol{u}$. Perhatikan Gambar 2.

Dari Gambar 2 diperoleh $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ dan $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$. Kemudian,

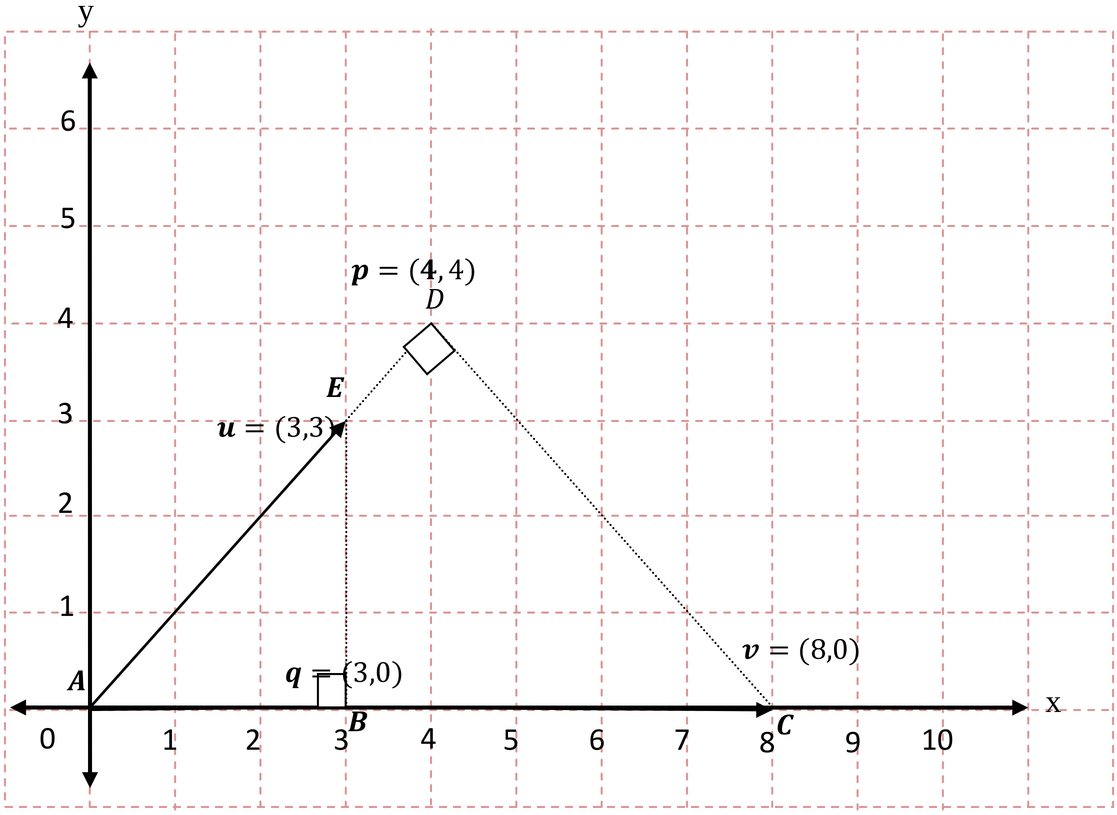
$$\widehat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{(8,0)}{8} = (1,0) \text{ dan } \widehat{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{(3,3)}{3\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right),$$

sehingga

$$\boldsymbol{AB} = \|proy_v \boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{u}.\widehat{\boldsymbol{v}} = (3,3).(1,0) = 3,$$

ISBN: 978-979-792-552-9

$$\boldsymbol{AD} = \|proy_v \boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{v}.\hat{\boldsymbol{u}} = (8{,}0).\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}.$$



Gambar 2: Contoh khusus interpretasi vektor

Hakekatnya vektor pada Gambar 2 dalam R^3 sementara $\boldsymbol{u} = (u_{1,}u_2)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_{1,}v_2)$ adalah vektor-vektor pada R^2, untuk menghindari masalah dimensi maka $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ dilihat vektor pada bidang xy dari suatu sistem koordinat xyz dimana vektor-vektor tersebut dinyatakan $\boldsymbol{u} = (u_{1,}u_2, 0)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_{1,}v_2, 0)$.

Dari Gambar 2, maka interpretasi hasil kali titik secara geometri diperumum. Perhatikan Gambar 3, misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ berimpit pada titik pangkal vektor, kemudian vektor $\boldsymbol{u}$ diperpanjang dan ditarik garis dari titik ujung vektor $\boldsymbol{v}$ yang membentuk sudut siku-siku di $\boldsymbol{D}$ pada perpanjangan vektor $\boldsymbol{u}$ sehingga $\Delta\boldsymbol{ABE}$ sebangun $\Delta\boldsymbol{ADC}$.

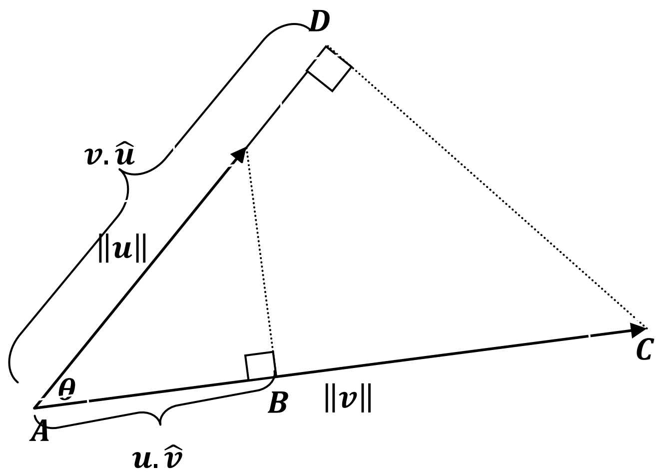
Pada $\Delta\boldsymbol{ADC}$ diperoleh

$$\cos\theta = \frac{AD}{\|\boldsymbol{v}\|} \text{ maka } \boldsymbol{AD} = \|\boldsymbol{v}\|\cos\theta. \tag{2}$$

Pada $\Delta\boldsymbol{ABE}$ diperoleh

$$\cos\theta = \frac{AB}{\|\boldsymbol{u}\|} \text{ maka } \boldsymbol{AB} = \|\boldsymbol{u}\|\cos\theta. \tag{3}$$

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 3: Interpretasi vektor secara umum

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh hubungan

$$\frac{AD}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{AB}{\|\boldsymbol{u}\|}. \tag{4}$$

Pada Gambar 3 diperoleh $\Delta\boldsymbol{ABE}$ sebangun $\Delta\boldsymbol{ADC},$ sehingga berlaku

$$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AD}} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{BE}}{\boldsymbol{DC}}$$

Dari persamaan (4) diperoleh

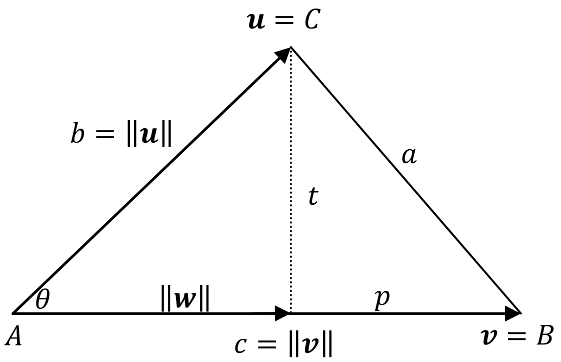
$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|proy_v\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \text{ maka } \|proy_v\boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{u}.\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \boldsymbol{u}.\hat{\boldsymbol{v}},$$

dan

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|proy_u\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{u}\| \text{ maka } \|proy_u\boldsymbol{v}\| = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\hat{\boldsymbol{u}}$$

Atauran Cosinus Melalui Vektor

Misalkan vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ berimpit pada titik pangkal, kemudian tarik garis dari titik ujung vektor $\boldsymbol{u}$ ke titik ujung vektor $\boldsymbol{v}$. Perhatikan Gambar 4.



Gambar 4: Pembuktian aturan cosinus melalui vektor

ISBN: 978-979-792-552-9

Pada Gambar 4 diperoleh

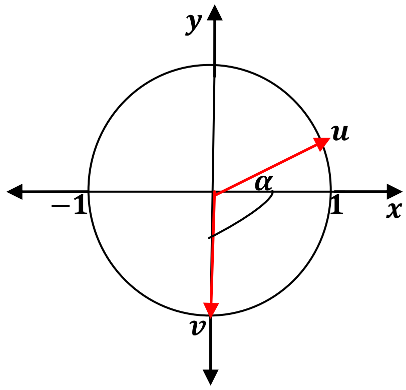
$$t = \|\boldsymbol{u}\| \sin\theta = b\sin\theta$$
$$\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{u}\|\cos\theta = b\cos\theta$$
$$p = c - \|\boldsymbol{w}\| = c - (b\cos\theta)$$

Dengan menggunakan teorema phythagoras diperoleh aturan cosinus

$$a^2 = t^2 + p^2$$
$$a^2 = (b\sin\theta)^2 + (c - (b\cos\theta))^2$$
$$a^2 = b^2 sin^2\theta + c^2 - 2bc\ cos\ \theta + b^2 cos^2\theta$$
$$a^2 = b^2(sin^2\theta + \cos\theta^2) + c^2 - 2bc\ cos\ \theta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \theta \qquad (10)$$

Membuktikan Cosinus Jumlah Sudut

Misalkan pada lingkaran unit dengan $r = 1$ satuan, maka vektor dalam lingkaran unit dapat ditulis $\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$ dimana θ adalah sudut pada x positif berlawanan arah jarum jam dan $-\theta$ jika searah jarum jam. Perhatikan Gambar 5 berikut ini.



Gambar 5: Membuktikan *cosinus* $(90 + \alpha)$

Pada Gambar 5 diketahui

$$\boldsymbol{u} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{v} = \cos(-90)\boldsymbol{i} + \sin(-90)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}$$
$$\cos\ (90 + \alpha) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = [\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}].[-\boldsymbol{j}]$$
$$\cos\ (90 + \alpha) = -\cos\alpha\ (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}) - \sin\alpha\ (\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j})$$
$$\cos\ (90 + \alpha) = -\sin\alpha$$

Dari Gambar 5, dapat diperumum untuk mendapatkan formula cosinus jumlah sudut, perhatikan Gambar 6.

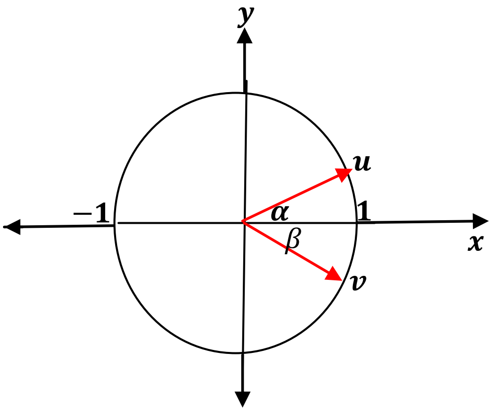
Pada Gambar 6 diketahui $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = \cos(-\beta)\boldsymbol{i} + \sin(-\beta)\boldsymbol{j}$ atau $\boldsymbol{v} = \cos\beta\boldsymbol{i} - \sin\beta\boldsymbol{j}$, sehingga

$$\cos\ (\alpha + \beta)\ = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = [\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}].[\cos\beta\boldsymbol{i} - \sin\beta\boldsymbol{j}]$$
$$= \cos\alpha\cos\beta\ (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}) + \cos\alpha\sin\beta\ (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}) + \sin\alpha\cos\beta\ (\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i})$$

ISBN: 978-979-792-552-9

$$- \sin\alpha \sin\beta\,(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j})$$
$$= \cos\alpha\cos\beta\,(1) + \cos\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{0}) + \sin\alpha\cos\beta\,(\boldsymbol{0})$$
$$- \sin\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{1})$$
$$\cos\,(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

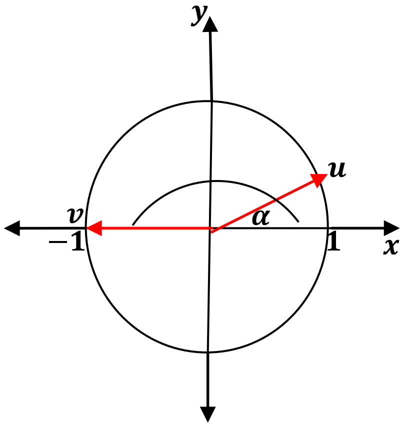
Jika $\alpha = \beta$ maka $\cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha.$



Gambar 6: Membuktikan *cosinus* jumlah sudut

Membuktikan Cosinus Selisih Sudut

Misalkan pada lingkaran unit dengan $r = 1$ satuan, maka vektor dalam lingkaran unit dapat ditulis $\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$ dimana θ adalah sudut pada x positif. Perhatikan Gambar 7 berikut ini:

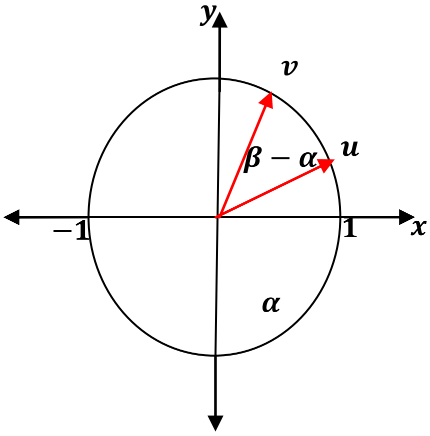


Gambar 7: Membuktikan *cosinus* $(180 - \alpha)$

Pada Gambar 7 diketahui $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{v} = \cos 180\boldsymbol{i} + \sin 180\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i},$ sehinga

$$\cos\,(180-\alpha) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = [\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}].[-\boldsymbol{i}]$$
$$\cos\,(180-\alpha) = -\cos\alpha\,(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}) - \sin\alpha\,(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i})$$
$$\cos\,(180-\alpha) = -\cos\alpha$$

Dari Gambar 7, dapat diperumum untuk mendapatkan formula cosinus selisih sudut, perhatikan Gambar 8 berikut ini



Gambar 8: Membuktikan *cosinus* sudut selisih

Pada Gambar 8, diketahui $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{v} = \cos\beta\boldsymbol{i} + \sin\beta\boldsymbol{j}$, sehingga

$$\cos\ (\beta-\alpha) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = [\cos\ \alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}].[\cos\beta\boldsymbol{i} + \sin\beta\boldsymbol{j}]$$

$$\begin{aligned}\cos\ (\beta-\alpha) &= \cos\alpha\cos\beta\,(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}) + \cos\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}) + \sin\alpha\cos\beta\,(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i}) \\ &\quad + \sin\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j}) \\ &= \cos\alpha\cos\beta\,(1) + \cos\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{0}) + \sin\alpha\cos\beta\,(\boldsymbol{0}) \\ &\quad + \sin\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{1})\end{aligned}$$

$$\cos\ (\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$-\cos\ (\beta-\alpha) = \cos(-(\beta-\alpha)) = \cos\ (\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Jika $\alpha = \beta$ maka $1 = cos^2\alpha + sin^2\alpha$

Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa interpretasi hasil kali titik secara geometri dapat kembangkan melalui kesebangunan segitiga dan untuk memudahkan siswa dalam mengingat formula cosinus sudut jumlah dan selisih dapat dibuktikan melalui hasil kali titik yaitu dengan melukiskan dua buah vektor pada lingkaran unit.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H dan Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*., Erlangga, Bandung.
[2] Anton, H. *Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1*., Binarupa Aksara., Jakarta, 1997.
[3] Bretscher, O. 2005. *Linear Algebra with Applications 3ed*., Pearson Education, London.
[4] C. Dray, Tevian. 2008. *The Geometry of the Dot and Cross Products*., corinne@phisics., Oregonstate. Edu.
[5] Stirling, B. *Linear Algebra*., Oxford University Press, New York, 1992.
[6] Wirodikromo. S. 2006. *Matematika SMA 3 IPA*, Erlangga, Jakarta.