ISBN: 978-979-792-552-9

Beberapa Hasil pada Lingkaran Singgung Luar Segiempat Konveks

Puteri Januarti [1*], Mashadi [2], Sri Gemawati [2]

[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[1]Guru SMAS LPM KI Tapung
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

*puteri.januarti@gmail.com

Abstrak

Lingkaran singgung luar yang terdapat dalam berbagai buku geometri yaitu lingkaran singgung luar segitiga. Dalam tulisan ini dibahas cara mengkonstruksi lingkaran singgung luar segiempat konveks serta beberapa persamaan yang terbentuk dari hasil konstruksi tersebut.

Kata Kunci : *Lingkaran Singgung Luar, Segiempat Konveks dan Semiperimeter.*

1 Pendahuluan

Lingkaran singgung luar pada segitiga atau yang biasa dikenal dengan *excircle* telah banyak dibahas dalam beberapa buku geometri seperti [2,3,5,6]. Padahal segiempat juga dapat dibuat lingkaran singgung luar. Saat ini baru [4] yang membahas tentang lingkaran singgung luar pada segiempat. Namun yang dibahas oleh [4] adalah tentang beberapa kesamaan rumus antara lingkaran singgung dalam dan luar pada segiempat konveks. Oleh karena itulah pada artikel ini akan dibahas cara mengkonstruksi lingkaran singgung luar segiempat dan serta memaparkan beberapa persamaan yang muncul dalam pengkonstruksian tersebut.

2 Lingkaran Singgung Luar Segiempat Konveks

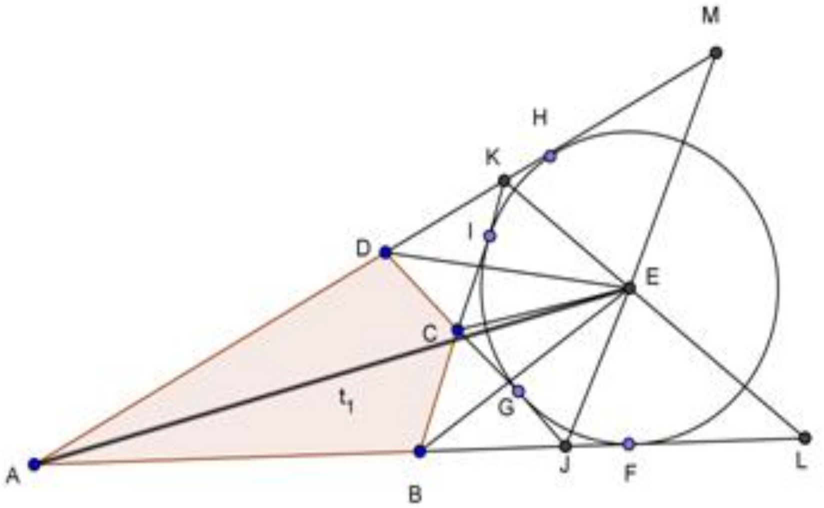
Lingkaran singgung luar segiempat ada dua bentuk, bentuk pertama yaitu lingkaran yang menyinggung salah satu sisi dan perpanjangan dua sisi lainnya yang dijelaskan pada [1]. Sedangkan bentuk ke dua yaitu lingkaran yang menyinggung perpanjangan

ISBN: 978-979-792-552-9

dari keempat sisi segiempat. Pada pembahasan ini lingkaran singgung yang dibahas pada bentuk kedua.

Definisi 1. Lingkaran singgung luar segiempat konveks adalah lingkaran yang menyinggung perpanjangan dari ke empat buah sisi segiempat.

Perhatikan Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1: Lingkaran singgung luar segiempat konveks

Pada Gambar 1 terdapat segiempat $ABCD$ dengan panjang sisi $AB = a, BC = b, CD = c$ dan $AD = d$ yang memiliki lingkaran singgung luar yang berpusat di titik E dan menyinggung perpanjangan a di titik F, perpanjangan b di titik I , perpanjangan c di titik G dan perpanjangan d di titik H. Martin dalam [5] memaparkan syarat suatu segiempat mempunyai lingkaran singgung luar bila memenuhi

$$|a - c| = |d - b| \qquad (1)$$

Sehingga jika lingkaran singgung berada di depan titik A atau titik C diperoleh

$$a + b = c + d \qquad (2)$$

Jika lingkaran singgung berada di titik B atau titik D maka diperoleh

$$a + d = b + c$$

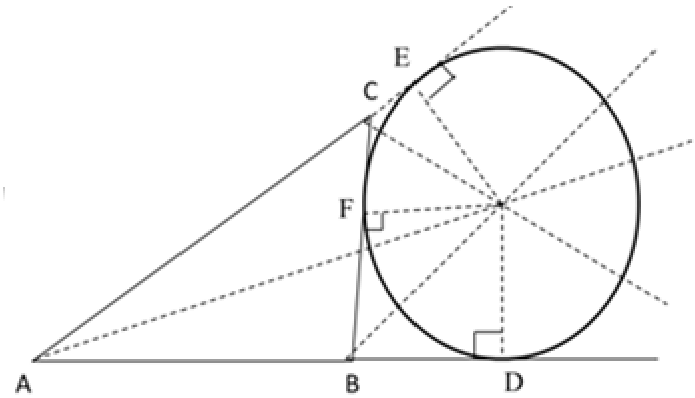
Titik pusat lingkaran singgung luar, titik E, diperoleh dari pertemuan enam buah garis bisektor sudut. Yaitu garis AE, BE, CE, DE, EJ,dan EK. AE dan CE merupakan bisektor sudut internal dari sudut A dan sudut C. BE dan DE merupakan bisektor sudut

ISBN: 978-979-792-552-9

eksternal dari sudut B dan sudut D. JE dan KE merupakan bisektor sudut eksternal yang terbentuk dari perpotongan perpanjangan sisi segiempat yaitu sudut J dan sudut K.

3 Lingkaran Singgung Luar Segitiga

Setiap segitiga dapat dibentuk lingkaran singgung. Menurut [6] lingkaran singgung luar segitiga yaitu lingkaran yang menyinggung salah satu sisi dan perpanjangan dua buah sisi yang lain dari segitiga tersebut. Perhatikan Gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2 : Lingkaran singgung luar $\Delta\, ABC$

Pada Gambar 2, lingkaran tersebut menyinggung sisi BC dititik F, perpanjangan sisi AB dititik D dan perpanjangan sisi ACdititik E. Titik pusat lingkaran singgung segitiga terbentuk dari perpotongan garis bisektor $\angle A$, bisektor $\angle CBD$ dan bisektor $\angle BCE$. Dengan demikian misal O titik pusat lingkaran singgung, maka garis $AO, BO\ dan\ CO$ kongkuren

Teorema 1. Misalkan ABC suatu segitiga sembarang, maka panjang jari-jari lingkarang singgung pada sisi BC adalah

$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A$$

Bukti: Lihat [5]

4 Hasil Utama

Kongkurensi Bisektor

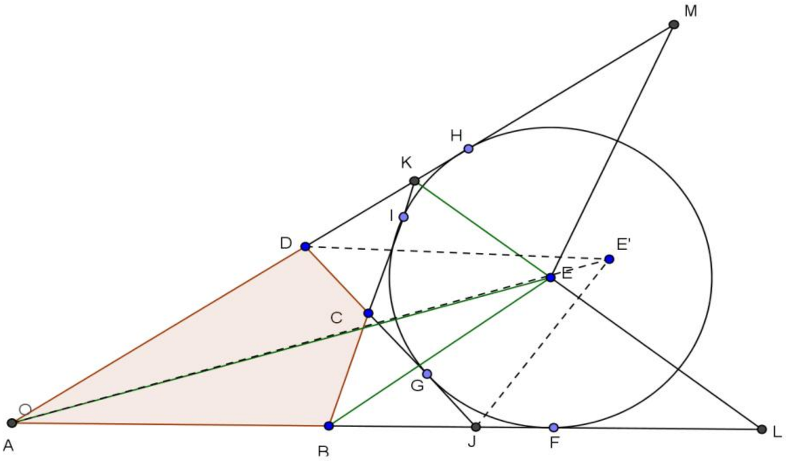
Lingkaran singgung luar segiempat pada Gambar 1 dikonstruksi dengan cara memperpanjang semua sisi pada segiempat $ABCD$, sehingga diperoleh titik J dan K yang masing-masing merupakan perpotongan dari perpanjangan sisi AB dengan CD dan

ISBN: 978-979-792-552-9

sisi AD dengan BC. Titik pusat lingkaran tersebut, titik E, diperoleh dari perpotongan setiap garis bisektor $\angle A, \angle C, \angle CDK, \angle CBJ, \angle CJL$ dan $\angle CKM$. Dari titik E bentuk lingkaran yang menyinggung perpanjangan keempat sisi segiempat $ABCD$ dititik F, G, H dan I. Kongkurensi keenam garis bisektor sudut tersebut akan dibuktikan pada Teorema 2.

Teorema 2. Segiempat konveks $ABCD$ memiliki lingkaran singgung luar yang menyinggung perpanjangan semua sisi segiempat , jika dan hanya jika garis AE, BE, CE, DE, EJ dan EK yang masing-masing merupakan bisektor $\angle A$, $\angle CBJ$, $\angle BCD$, $\angle CDK, \angle CJL$ dan $\angle CKM$ kongkuren.

Bukti: Perhatikan Gambar 3.



Gambar 3: Lingkaran singgung yang memiliki titik pusat berbeda

Perhatikan ΔABK yang memiliki lingkaran singgung yang berpusat di E yang diperoleh dari perpotongan BE, AE dan EK. Lingkaran tersebut menyinggung perpanjangan sisi AK dititik H, perpanjangan AB dititik F dan BK dititik I.

Perhatikan ΔADJ juga mempunyai lingkaran singgung yang menyinggung perpanjangan sisi AD dititik H, perpanjangan AJ dititik F dan DJ dititik G. Lingkaran singgung tersebut berpusat dititik E', yang diperoleh dari perpotongan DE', AE' dan $E'J$.

Karena lingkaran singgung pada ΔABK dan lingkaran singgung pada ΔADJ menyinggung dititik yang sama yaitu titik H yang berada pada perpanjangan AK dan AD, dan titik F yang berada pada perpanjangan AB dan AJ, serta titik E dan E' berada di garis bisektor $\angle A$ maka haruslah

$$E = E'$$

sehingga AE, BE, DE, EJ dan EK kongkurensi.

Karena I dan G titik singgung lingkaran. Dengan menghubungkan titik C dan E maka terbentuk 2 buah segitiga yaitu $\Delta\, CIE$ dan $\Delta\, CEG$ yang memiliki

$$CI = CG \text{ (sisi)} \tag{3}$$

$$\angle CIE = \angle CGE \text{ (sudut)} \tag{4}$$

$$EI = EG \text{ (sisi)} \tag{5}$$

Berdasarkan persamaan (3), (4) dan (5) diperoleh

$$\angle ICE = \angle GCE$$

Sehingga CE garis bisektor $\angle KCJ$. Dengan demikian terbukti bahwa AE, BE, CE, DE, EJ dan EK kongkurensi. ∎

Beberapa Persamaan dari Hasil Konstruksi

Perhatikan $\Delta\, ADJ$ pada Gambar 1 yang memiliki lingkaran singgung, yaitu lingkaran yang berpusat di E. Berdasarkan Teorema 1, panjang jari-jari lingkaran singgung tersebut adalah

$$r_{DJ} = s_{ADJ}\ tan\frac{1}{2}A$$

$$= \frac{AD + DJ + AJ}{2}\ \frac{EF}{AF}$$

Karena $EF = r$

$$2(a + BF) = d + c + CJ + a + BJ$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$2a + 2BF = a + a + b + CJ + BJ$$

$$2BF = keliling\ \Delta\ BCJ \tag{6}$$

Atau

$$s_{BCJ} = BF = BJ + GJ = b + CG$$

Dengan melakukan hal yang sama terhadap $\Delta\, ABK$, diperoleh

$$2DH = keliling\ \Delta DCK\ , \tag{7}$$

atau

$$s_{DCK} = DH = DK + HK + C + cI$$

Perhatikan Gambar 1.

ISBN: 978-979-792-552-9

$$Keliling\ ABK = AD + DK + KI + CI + BC + AB$$

$$= a + b + d + DK + KI + CI$$

Dengan menambahkan $2c$ dan $-2c$ diperoleh

$$= a + b + c + d + DK + KI + CI + c - 2c$$

$$= Keliling\ ABCD + Keliling\ CDK - 2c \qquad (8)$$

$$Keliling\ ADJ = AB + BJ + GJ + CG + CD + AD$$

$$= a + c + d + BJ + GJ + CG$$

Dengan menambahkan $2b$ dan $-2b$ diperoleh

$$= a + b + c + d + BJ + GJ + CG + b - 2b$$

$$= Keliling\ ABCD + Keliling\ BCJ - 2b \qquad (9)$$

Dengan mengurangkan persamaan (8) dan (9) diperoleh

$$Keliling\ ADJ = Keliling\ ABK$$

$$Keliling\ ABCD + Keliling\ BCJ - 2b = Keliling\ ABCD + Keliling\ CDK - 2c$$

$$Keliling\ BCJ - 2b = Keliling\ CDK - 2c$$

Dengan mensubsiitusi persamaan (6) dan (7) diperoleh

$$BF - DH = b - c$$

Kesimpulan

Dalam pengkonstruksian lingkaran singgung luar segiempat terdapat 6 buah bisektor sudut yang berpotongan disatu titik. Selain itu beberapa persamaan yang diperoleh yaitu:

$$2BF = keliling\ \Delta\ BCJ$$

$$2DH = keliling\ \Delta DCK$$

$$BF - DH = b - c$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Daftar Pustaka

[1] Coxeter, H. S. M. dan S. L. Greitzer. 1967. *Geometry Revisited*. MAA,. Washington D. C.

[2] Go Geometri, hal 1 http: //www .gogeometry .com/problem/p569 _quadrilateral _excircles_tangency_point_congruence.htm. diakses 24 Agustus 2014. 08.35 pm

[3] Josefsson, M. 2012. Similiar Metric Characterization of Tangential and Extangential Quadrilateral. *Forum Geometricorum* 12: 63-77

[4] Lang, S dan G. Murrow. 2000. *Geometry*, Edisi ke 2. Springer, New York,

[5] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik UR. Pekanbaru

[6] Yiu, P. 2001. *Introduction to the Geometry of the Triangel*. Lecture Notes. Department of Mathematics. Florida Atlantic University