ISBN: 978-979-792-552-9

Alternatif Menentukan Lingkaran Singgung Luar Segitiga dan Titik Gergonne

Nurul Azizah[1*], Sri Gemawati[2], Hasriati[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

*nurul.lazizah1741@gmail.com

Abstrak

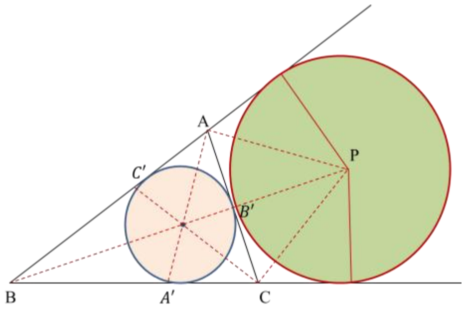
Pada sebarang segitiga, menentukan lingkaran singgung luar adalah dengan membuat lingkaran singgung dalam dan memperpanjang sisi-sisinya dengan membuat garis bagi sudut luar di dua titik sudutnya dan garis bagi dalam titik sudut lainnya. Sedangkan Titik Gergonne pada segitiga merupakan titik yang berasal dari konkurensi tiga garis dari ketiga titik sudut segitiga ke titik singgung antara lingkaran dalam dan sisi segitiga. Konkurensi titik Gergonne dalam segitiga dibuktikan dengan menggunakan teorema Ceva. Pada tulisan ini akan diberikan alternatif menentukan lingkaran singgung luar segitiga dengan menggunakan lingkaran luar segitiga dan akan dibuktikan konkurensi titik Gergonne pada lingkaran singgung luar segitiga.

Kata kunci: Lingkaran singgung luar, lingkaran dalam, teorema Ceva, dan titik Gergonne

1 Pendahuluan

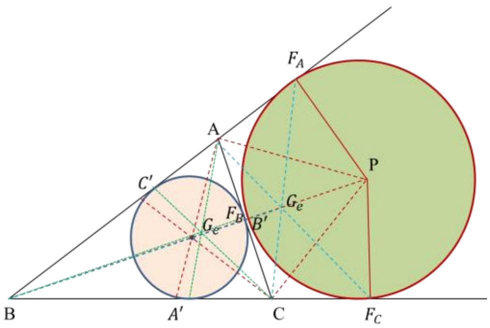
Pada sebarang ΔABC jika dibuat garis bagi pada masing-masing sudutnya maka akan berpotongan di satu titik yaitu *incenter*. Dari titik *incenter* dapat dibuat lingkaran yang menyinggung ΔABC masing-masing di titik A' pada sisi BC, di titik B' pada sisi AC, dan di titik C' pada sisi AB. Jika masing-masing sisi BC dan BA diperpanjang, kemudian jika dibuat internal bisektor pada $\angle B$ dan eksternal bisektor pada dua sudut lainnya yaitu $\angle A$ dan $\angle C$, maka perpanjangan dari ketiga garis bagi tersebut akan berpotongan (konkuren) di titik P dan konkurensi tersebut disebut *excenter* [8,10]. Perhatikan Gambar 1 berikut.

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 1: Segitiga ABC konkuren di titik P

Selanjutnya apabila ditarik garis dari ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung lingkaran dalam terhadap sisi segitiga tersebut, maka ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik (*concurent*) disebut titik Gergonne [1,4,6,9,11]. Jika terdapat lingkaran singgung luar segitiga (*excircle*) [8,10], maka dapat dibentuk juga titik Gergonne di luar segitiga yang berasal dari lingkaran singgung luar terhadap segitiga. Sehingga dapat dibentuk tiga buah titik Gergonne lainnya dari tiga lingkaran singgung terhadap ketiga sisi segitiga [4]. Perhatikan Gambar 2 berikut.



Gambar 2: Titik Gergonne pada segitiga ABC

Boyd dan Raychowdhury [9], telah membahas bagaimana membuktikan konkurensi titik Gergonne dengan menggunakan lingkaran kosentrik dari lingkaran dalam segitiga asal. Pada artikel ini, penulis membahas alternatif menentukan lingkaran singgung luar segitiga dengan menggunakan lingkaran luar segitiga dan akan dibuktikan konkurensi titik *excenter* dengan menggunakan kongruensi [6,7], kemudian akan ditentukan konkurensi titik Gergonne di luar segitiga melalui segitiga kongruen [8] dan garis singgung lingkaran [6].

2 Lingkaran Singgung Luar Segitiga

Pada sebarang ΔABC yang memuat *incircle*, jika masing-masing sisi BC dan BA diperpanjang. Kemudian jika dibuat internal bisektor pada $\angle B$ dan eksternal bisektor pada dua sudut lainnya yaitu, $\angle C$ dan $\angle A$, maka perpanjangan dari ketiga garis bagi

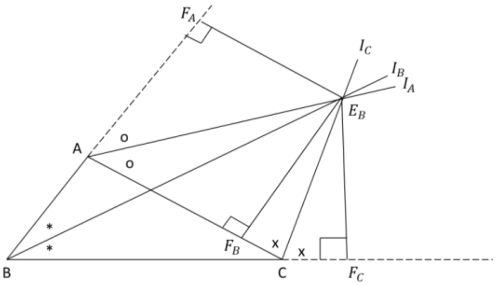
ISBN: 978-979-792-552-9

tersebut akan berpotongan pada satu titik (konkuren) disebut *excenter* segitiga [8,10]. Untuk menentukan lingkaran singgung luar segitiga digunakan Teorema sebagai berikut.

Teorema 1. Bisektor dari dua sudut luar segitiga dan bisektor sudut dalam lainnya berpotongan pada satu titik.

Bukti: Lihat [4].

Teorema I diilustrasikan dengan Gambar 3.



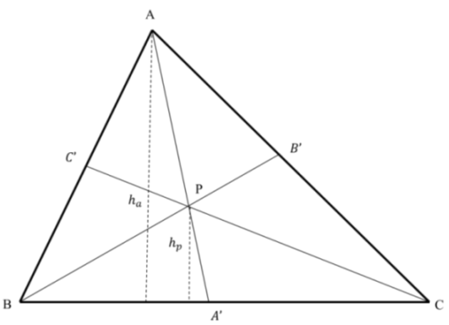
Gambar 3: ΔABC yang memuat *excenter*.

Teorema 2. (Teorema Ceva) Jika diberikan sebuah ΔABC dengan titik $A', B',$ dan C' masing-masing adalah titik pada sisi $BC, CA,$ dan AB maka garis AA', BB' dan CC' berpotongan di satu titik jika dan hanya jika:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \qquad (1)$$

Bukti: Teorema Ceva dibahas pada [11].

Untuk melihat hubungan pada persamaan (1), perhatikan Gambar 4 .



Gambar 4: Ketiga garis AA', BB' dan CC' berpotongan di titik P.

Berikut ini diberikan alternatif menentukan lingkaran singgung luar segitiga dengan menggunakan lingkaran luar segitiga.

Misalkan ada sebarang ΔABC, kontruksi garis bagi dari masing-masing titik sudut sehingga berpotongan di satu titik, misal titik E. Kemudian kontruksi bisektor garis yang tegak lurus dengan masing-masing sisi pada segitiga dan berpotongan di satu titik, sebut titik O. Dari titik O dapat dibuat lingkaran luar ΔABC, sebut lingkaran 1.

Selanjutnya, perpanjang sisi AB dan sisi BC, tarik garis bagi sudut luar $\angle A$ dan $\angle C$ masing-masing berpotongan di satu titik, misal titik E_B, perhatikan bahwa AE_B dan CE_B merupakan garis singgung terhadap lingkaran 1 di titik A dan C, maka $AE_B = CE_B$.

Perhatikan ΔACE_B, kontruksi bisektor garis yang tegak lurus dengan masing-masing sisi pada ΔACE_B dan berpotongan di satu titik, sebut titik O'. Dari titik O' dapat dibuat lingkaran luar ΔACE_B, sebut lingkaran 2. Tarik garis dari titik O' yang tegak lurus dengan sisi BC di titik C dan sisi AB di titik A. Akan ditunjukkan $O'A = O'C = r$.

Untuk membuktikan O' merupakan titik pusat lingkaran 2 dan $AO' = CO' = r$, Perhatikan □$BAO'C$, jika BA dan BC adalah garis singgung terhadap lingkaran 2 pada titik A dan C, maka $BA = BC$.

Perhatikan $\Delta BAO'$ siku-siku di A, maka

$$AO'^2 = BO'^2 - BA^2 \qquad (2)$$

Dan pada $\Delta BCO'$ siku-siku di C, maka

$$CO'^2 = BO'^2 - BC^2 \qquad (3)$$

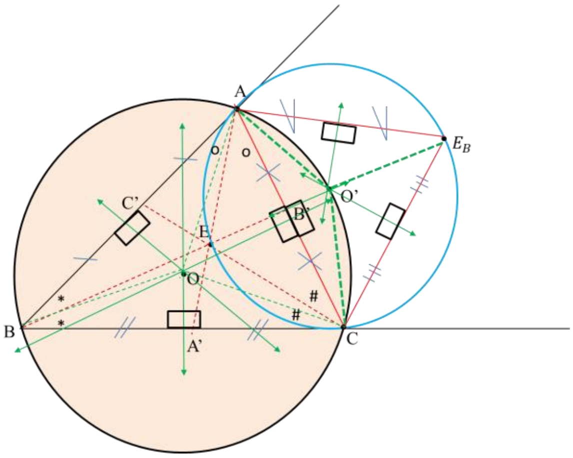
Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$AO'^2 = CO'^2$$
$$AO' = CO' \qquad (4)$$

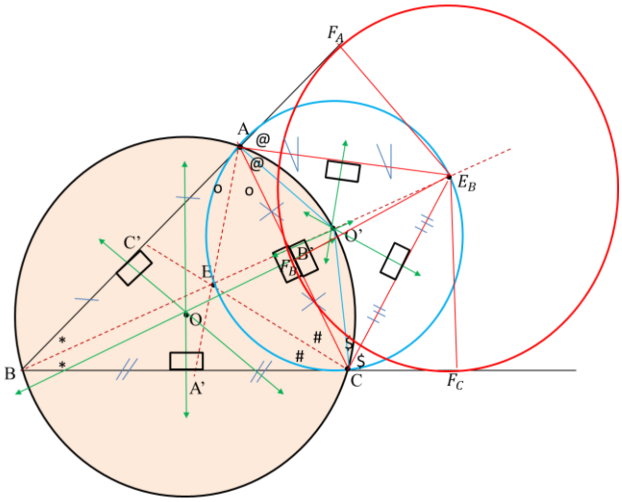
Karena $AO' = CO'$ dan tegak lurus terhadap garis singgung maka terbukti AO' dan CO' merupakan jari-jari lingkaran 2 dan O' merupakan titik pusat lingkaran 2. Kemudian, karena AE_B dan CE_B merupakan garis singgung lingkaran 1, AB dan BC merupakan garis singgung lingkaran 2, maka lingkaran 1 dan lingkaran 2 berpotongan di titik A dan C. Perhatikan Gambar 5.

Selanjutnya, tarik garis bagi $\angle B$ melewati titik E dan memotong lingkaran luar ΔABC di titik O', tarik garis dari titik E_B yang tegak lurus dengan sisi BC di titik F_C, tarik garis dari titik E_B yang tegak lurus dengan sisi BA di titik F_A, dan tarik garis dari titik E_B yang tegak lurus dengan sisi AC di titik F_B. Kontruksi lingkaran berpusat di titik E_B (lingkaran 3) dan menyinggung ketiga sisi ΔABC masing-masing di sisi AC, perpanjangan sisi BA, dan perpanjangan sisi BC. Akan ditunjukkan E_B merupakan titik pusat lingkaran singgung luar ΔABC. Perhatikan Gambar 6.

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 5: Lingkaran 1 dan Lingkaran 2 berpotongan di titik A dan C



Gambar 6: Lingkaran singgung luar segitiga ABC

Perhatikan $\Delta E_B F_B C$ dan $\Delta E_B F_C C$, maka

$CE_B \cong CE_B$	(s)	(garis yang sama)
$\angle F_B CE_B \cong \angle F_C CE_B$	(sd)	(eksternal bisektor sudut C)
$\angle E_B F_B C \cong \angle E_B F_C C$	(sd)	(sudut siku-siku)

dengan (s) := sisi dan (sd) := sudut.

Berdasarkan korespondensi (s-sd-sd), maka $\Delta E_B F_B C \cong \Delta E_B F_C C$ yang mengakibatkan

$$E_B F_B \cong E_B F_C \qquad (5)$$

dengan cara yang sama pada $\Delta E_B F_B A \cong \Delta E_B F_A A$ diperoleh

$$E_B F_B \cong E_B F_A \qquad (6)$$

dari persamaan (5) dan (6) maka diperoleh

$$E_B F_A = E_B F_B = E_B F_C \qquad (7)$$

Karena $E_B F_A = E_B F_B = E_B F_C$ dan tegak lurus terhadap garis singgung maka terbukti $E_B F_A, E_B F_B$ dan $E_B F_C$ merupakan jari-jari lingkaran 3.

Kemudian dibuktikan AE_B dan CE_B juga berpotongan di titik E_B, dengan menunjukkan AE_B dan CE_B merupakan *external* bisektor pada ΔABC.

Pada Gambar 6, perhatikan $\Delta E_B F_B A$ dan $E_B F_A A$, diperoleh

$$AF_B{}^2 = AE_B{}^2 - E_B F_B{}^2$$

dan

$$AF_A{}^2 = AE_B{}^2 - E_B F_A{}^2$$

sehingga

$$AF_B{}^2 = AF_A{}^2$$

atau

$$AF_B = AF_A. \qquad (8)$$

Perhatikan $\Delta E_B F_B A$ dan $E_B F_A A$, diperoleh

$E_B F_B \cong E_B F_A$	(s)	(dari persamaan (7))
$\angle AF_B E_B \cong \angle AF_A E_B$	(sd)	(sudut siku-siku)
$AF_B \cong AF_A$	(s)	(dari persamaan (8))

Berdasarkan korespondensi (s-sd-s), maka $\Delta E_B F_B A$ dan $\Delta E_B F_A A$ yang mengakibatkan

$$\angle F_B AE_B \cong \angle F_A AE_B$$

Sehingga terbukti AE_B merupakan *external* bisektor $\angle A$ pada ΔABC dan berpotongan di titik E_B.

Perhatikan $\Delta E_B F_C C$ dan $E_B F_B C$, diperoleh

$$CF_C{}^2 = CE_B{}^2 - E_B F_C{}^2$$

dan

$$CF_B{}^2 = CE_B{}^2 - E_B F_B{}^2$$

Sehingga

$$CF_C{}^2 = CF_B{}^2$$

atau

$$CF_C = CF_B \qquad (9)$$

Perhatikan $\Delta E_B F_C C$ dan $E_B F_B C$, diperoleh

$E_B F_C \cong E_B F_B$	(s)	(dari persamaan (7))
$\angle CF_C E_B \cong \angle CF_B E_B$	(sd)	(sudut siku-siku)
$\angle CF_C \cong \angle CF_B$	(s)	(dari persamaan (9))

keterangan:

(s) = sisi

(sd) = sudut

Berdasarkan korespondensi (s-sd-s), maka $\Delta E_B F_C C$ dan $\Delta E_B F_B C$ yang mengakibatkan

$$\angle F_C CE_B \cong \angle F_B CE_B$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Sehingga terbukti CE_B merupakan *external* bisektor $\angle C$ pada ΔABC dan berpotongan di titik E_B.

Karena $AE_B, BE_B,$ dan CE_B terbukti merupakan bisektor sudut dan berpotongan di tiitk E_B, maka E_B merupakan titik pusat lingkaran luar dari ΔABC.

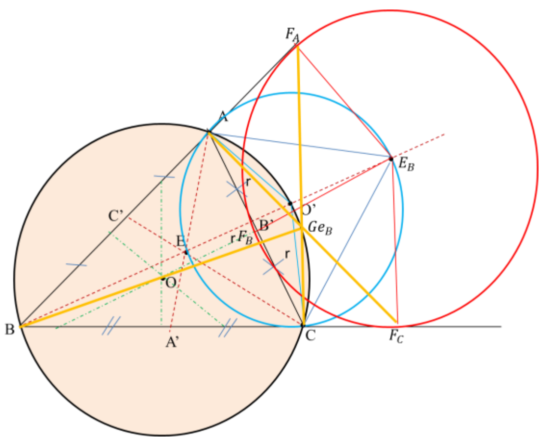
3 Konkurensi Titik Gergonne di Luar Segitiga

Pada bagian ini dibahas mengenai konkurensi titik Gergonne yang berada di luar segitiga, untuk membuktikan konkurensi titik Gergonne, digunakan teorema Ceva [11,14,15].

Pada sebarang ΔABC yang memuat tiga lingkaran singgung luar, masing-masing di titik F_B pada sisi AC, F_E pada perpanjangan sisi BC dan F_G pada perpanjangan sisi AB. Dari ketiga lingkaran singgung luar tersebut dapat dibentuk titik Gergonne berada di luar segitiga. Tarik garis dari titik singgung F_A, F_B dan F_C terhadap sudut segitiga dihadapannya, ketiga garis tersebut akan berpotongan pada satu titik Ge_B. Konkurensi titik Ge_B telah dinyatakan dalam [5].

Perhatikan Gambar 7, ΔABC dengan E_B adalah titik pusat lingkaran singgung luar ΔABC pada sisi AC, akan ditunjukkan $AF_A, BF_B,$ dan CF_C berpotongan pada satu titik di titik Ge_B dengan menggunakan segitiga kongruen dan garis singgung lingkaran.

Konkurensi Titik Gergonne di Luar Segitiga dengan Menggunakan Segitiga Kongruen



Gambar 7. Titik Ge_B adalah titik Gergonne luar ΔABC

Perhatikan $E_B B F_C$ dan $E_B B F_A$, misalkan $\angle F_C B F_A = \alpha$. Karena $E_B B$ merupakan bisektor sudut maka

$$\angle E_B B F_C \cong \angle E_B B F_A = \frac{\alpha}{2}$$

Selanjutnya karena $E_B F_C$ dan $E_B F_A$ merupakan jari-jari sehingga diperoleh

$$\angle B E_B F_C \cong \angle B E_B F_A = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

Maka pada $\Delta E_B B F_C$ dan $\Delta E_B B F_A$ diperoleh

$$\angle B E_B F_C \cong \angle B E_B F_A \quad \text{(sd)} \quad \text{(bisektor sudut)}$$
$$E_B B \cong E_B B \quad \text{(s)} \quad \text{(garis yang sama)}$$
$$\angle B F_C E_B \cong \angle B F_A E_B \quad \text{(sd)} \quad \text{(sudut siku-siku)}$$

Berdasarkan korespondensi (sd-s-sd) pada postulat, dinyatakan bahwa $\Delta B E_B F_C \cong \Delta B E_B F_A$

Sehingga diperoleh

$$B F_C \cong B F_A \tag{10}$$

kemudian perhatikan $E_B C F_B$ dan $E_B C F_C$, diperoleh

$$C F_B \cong C F_C \tag{11}$$

dan juga perhatikan $E_B A F_A$ dan $E_B A F_B$, diperoleh

$$A F_A \cong A F_B \tag{12}$$

Dengan menggunakan teorema Ceva, persamaan (10), (11), dan (12) menjadi

$$\frac{BF_C}{F_C C} \cdot \frac{CF_B}{F_B A} \cdot \frac{AF_A}{BF_A} = 1 \tag{13}$$

Karena persamaan (12) memenuhi teorema Ceva maka terbukti titik Gergonne dari ΔABC adalah konkuren.

Konkurensi Titik Gergonne di Luar Segitiga dengan Menggunakan Garis Singgung Lingkaran.

Perhatikan kembali Gambar 7, $\Delta E_B F_B C$ siku-siku di F_B, maka

$$F_B C^2 = E_B F_B{}^2 - E_B C^2 \tag{14}$$

dan pada $\Delta E_B F_A C$ siku-siku di F_A, maka

$$F_A C^2 = E_B F_A{}^2 - E_B C^2 \tag{15}$$

Dari persamaan (14) dan (15) diperoleh

$$F_B C^2 = F_B C^2$$
$$F_B C = F_A C \tag{16}$$

Perhatikan $\Delta E_B F_C A$ siku-siku di F_C, maka

$$F_C A^2 = E_B F_C{}^2 - E_B A^2 \tag{17}$$

dan pada $\Delta E_B F_B A$ siku-siku di F_B, maka

$$F_B A^2 = E_B F_B{}^2 - E_B A^2 \tag{18}$$

Dari persamaan (17) dan (18) diperoleh

$$F_C A^2 = F_B A^2$$

$$F_C A = F_B A \qquad (19)$$

Perhatikan $\Delta E_B F_C B$ siku-siku di F_C, maka

$$F_C B^2 = E_B F_C^2 - E_B B^2 \qquad (20)$$

dan pada $\Delta E_B F_A B$ siku-siku di F_A, maka

$$F_A B^2 = E_B F_A^2 - E_B B^2 \qquad (21)$$

Dari persamaan (19) dan (20) diperoleh

$$F_C B^2 = F_A B^2$$

$$F_C B = F_A B \qquad (22)$$

Dengan mengalikan persamaan (16), (19), dan (22) diperoleh:

$$F_B C . F_C A . F_A B = F_A C . F_B A . F_C B$$

Kemudian dengan menggunakan teorema Ceva, persamaan tersebut menjadi:

$$\frac{CF_B}{AF_B} \cdot \frac{AF_C}{BF_C} \cdot \frac{BF_A}{CF_A} = \frac{CF_A}{CF_A} \cdot \frac{AF_B}{AF_B} \cdot \frac{BF_C}{BF_C}$$

$$\frac{CF_B}{AF_B} \cdot \frac{AF_C}{BF_C} \cdot \frac{BF_A}{CF_A} = 1 \qquad (23)$$

Karena persamaan (23) memenuhi teorema Ceva maka terbukti titik Gergonne dari ΔABC adalah konkuren.

Kesimpulan

Dari hasil tulisan ini dapat disimpulkan bahwa cara menentukan lingkaran singgung luar segitiga dapat diselesaikan dengan lingkaran luar segitiga, kemudian terdapat dua jenis titik Gergonne yaitu titik Gergonne yang berada di dalam segitiga dan titik Gergonne yang berada di luar segitiga. Konkurensi titik Gergonne di luar segitiga dapat dibuktikan dengan menggunakan segitiga kongruen dan garis singgung lingkaran.

Daftar Pustaka

[1] Boris, O. 2009. *Generalized Gergonne Nagel Points*. Geometry Preprint Series, Vienna University of Technology, Technical Report No. 197, June 2009.

[2] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC., Reading.

[3] Godfray, C & A.W. Siddons. 1908. *Modern Geometry*. Cambridge University Press. London.

[4] Gogeometry.1hal.http:/www.gogeometry.com/geometry/p682_triagle_Gergonne points excircle tangency point concurrent.htm. 23 Oktober 2014, pkl. 03.00.

[5] Gogeometry. 1 hal.http:/www.gogeometry.com/geometry/p720_excenter_

[6] interesting_circles_midpoint_angel_measurement.htm. 23 Oktober 2014, pkl. 03.00.

ISBN: 978-979-792-552-9

[7] Gutierrez, A. Gergonne Point. 1 hal. Gogeometry.com/center/gergonne-point-theorem-html-ipad-nexus.htm. 23 Oktober 2014, pkl. 03.00.

[8] Gutierrez, A. Semiperimeter and Incircle. 1 hal. Agute.homestead.com/ files/semiperimeterincircle1.htm. 23 Oktober 2014, pkl. 03.00.

[6] Hoskins, A & Crystal Martin. Essay 2: Gergonne Point. 4 hal.http: //jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Martin/essays/essay2.html.

[7] J.N Boyd & P.N. Raychowdhury. 1999. The Gergonne Point Generalized Through Convex Coordinates, *Internet. Journal Math. Sci*, Vol: 2. 423-430.

[8] Kisil, V. V. 2003. Geometry. 34 hal.https://www1.maths.leeds. ac.uk/pure /staff/kis ilv/coursse/math255.pdf. 25 Oktober 2014, pkl. 08.35.

[9] Mashadi. 2014. *Geometri Revisi*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru.

[10] Minculet, N. & Barbu, C. 2012. Cevian Of Rank (k, l, m) In Triangles. *Internasional Journal of Geometrical*, Vol: 1. 22-23.

[11] R. Johanes P. Mataniari. 2011. *Pengujian Ketepatan Model Ekonometrika dalam Hubungan Geometri.*

[12] Salazar, J. C. 2004. On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles. *Journal Geometricorum*. Vol: 4. 61-65.